ЗАДАЧА №1 (классические числа Каталана в словарно-комбинаторной постановке).

В образовании слова участвуют N символов «a» и N символов «b». Сколько из этих слов таких, что при просмотре слова слева направо количество встреченных символов «b» никогда не превышает количества встреченных символов «a»?

Решение:

$$WORD_1(N) = \frac{(2N)!}{N!N!} - \frac{(2N)!}{(N+1)!(N-1)!} = \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}.$$

Эта последовательность, хорошо известная как классические числа Каталана, возникает при решении многих комбинаторно-вероятностных задач и впервые встречается еще в работах Леонарда Эйлера, однако в перечислительную комбинаторику она вошла под именем бельгийского математика Эжена Каталана, который жил столетием позже.

Словарно-комбинаторные задачи, возникающие при исследовании случайных точечных структур и приводящие к многомерному обобщению чисел Каталана.

ЗАДАЧА №2.

В образовании слова участвуют N_a символов «a» и N_b символов «b». Сколько из этих слов таких, что при просмотре слова слева направо количество встреченных символов «b» никогда не превышает количества встреченных символов «a» ? (Естественно, предполагается, что $N_a \geq N_b$).

Решение:

$$WORD_2(N_a, N_b) = \frac{(N_a+N_b)!}{N_a!N_b!} - \frac{(N_a+N_b)!}{(N_a+1)!(N_b-1)!}.$$

Двумерная последовательность $WORD2(N_a, N_b)$ является простейшим расширением классической одномерной последовательности Каталана, которая получается из нее при N_a=N_b.

ЗАДАЧА №3.

В образовании слова участвуют N_a символов «a» и N_b символов «b». Сколько из этих слов таких, что при просмотре слова слева направо количество встреченных символов «b» никогда не превышает количества встреченных символов «a» более чем на k? (Предполагается, что $k \geq 0$ и $N_a+k \geq N_b$).

Решение:

$$WORD_3(N_a, N_b, k) = \frac{(N_a+N_b)!}{N_a!N_b!} - \frac{(N_a+N_b)!}{(N_a+k+1)!(N_b-k-1)!}.$$

Это дальнейшее расширение чисел Каталана, а именно: при k=0 задача №3 эквивалентна задаче №2, а при N_a=N_b и k=0 получаем задачу №1.

ЗАДАЧА №4.

В образовании слова участвуют N_a символов «*a*», N_b символов «*b*» и N_c символов «*c*». Сколько из этих слов таких, что одновременно выполняются два условия:

1) при просмотре слова слева направо количество встреченных символов «*b*» никогда не превышает количества встреченных символов «*a*»;

2) при просмотре слова справа налево количество встреченных символов «*c*» никогда не превышает количества встреченных символов «*a*»?

Решение:

В рассматривавшихся нами задачах с регистрацией случайных точечных полей всегда выполняется условие $N_b + N_c - N_a - 2 < 0$ (вообще говоря, в них выполняется более строгое условие: $N_a \geq N_b + N_c$), поэтому для этих задач справедлива формула

$$WORD_{4.1}(N_a, N_b, N_c) = \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{N_a!N_b!N_c!} - \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{(N_a+1)!(N_b-1)!N_c!} - \\ - \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{(N_a+1)!N_b!(N_c-1)!} + \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{(N_a+2)!(N_b-1)!(N_c-1)!},$$

которая была получена нами чисто геометрическим путем с использованием классического метода зеркального отражения [*D. Andre. Solution directe du probleme resola par M. Bertrand, C.R.Acad.Sci.Paris 105(1887) 436-437*]. А вот более общую формулу

$$WORD_4(N_a, N_b, N_c) = \\ = \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{N_a!N_b!N_c!} - \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{(N_a+1)!(N_b-1)!N_c!} - \\ - \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{(N_a+1)!N_b!(N_c-1)!} + \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{(N_a+2)!(N_b-1)!(N_c-1)!} + \\ + \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{(N_b+N_c-N_a-2)!(N_a+1)!(N_a+1)!} - \frac{(N_a+N_b+N_c)!}{(N_b+N_c-N_a-2)!N_a!(N_a+2)!}$$

получить таким способом не удается, поэтому для ее нахождения нами были использованы методы, связанные с подсчетом числа случайных путей в камерах Вейля [*Gessel, Ira M.; Zeilberger, Doron. Random walk in a Weyl chamber. Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), no. 1, 27-31*].

(Заметим, что при N_c =0 задача №4 переходит в задачу №2, так что мы имеем дальнейшее расширение чисел Каталана).

ЗАДАЧА №5.

С помощью 6-символьного алфавита {“*a*”,“*b*”,“*c*”,“*d*”,“*e*”,“*f*”} составляются различные слова длиной $2m$ такие, что:

$$N_a + N_d + N_e = m; \quad N_b + N_c + N_f = m;$$

$$N_a + N_c \le m,$$

где N_a, N_b, N_c, N_d, N_e и N_f – количество использованных в данном слове символов “*a*”,“*b*”,“*c*”,“*d*”,“*e*” и “*f*” соответственно. Требуется для каждого допустимого набора $\{N_a, N_b, N_c, N_d, N_c, N_f\}$ найти общее число слов $WORD5_m(N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f)$, которые при их просмотре слева направо одновременно удовлетворяют трем условиям:

1) количество встреченных символов “*b*” никогда не превышает количества встреченных символов “*a*”;
2) количество встреченных символов “*d*” никогда не превышает количества встреченных символов “*c*”;
3) количество встреченных символов “*f*” никогда не превышает количества встреченных символов “*e*” более чем на $(N_a - N_b)$.

Решение:
С использованием классического метода зеркального отражения Д.Андре нами найдено решение сформулированной задачи:

$$WORD_5(N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f, m) = (2m)! \times$$
$$\times \left\{ \frac{1}{(m-(N_b+N_c))!(m-(N_a+N_d))!} - \frac{1}{(m+1-(N_b+N_d))!(m-1-(N_a+N_c))!} \right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{1}{N_a!N_b!} - \frac{1}{(N_a+1)!(N_b-1)!} \right\} \times \left\{ \frac{1}{N_c!N_d!} - \frac{1}{(N_c+1)!(N_d-1)!} \right\}.$$

ЗАДАЧА №6.

С помощью 6-символьного алфавита {“*a*”,“*b*”,“*c*”,“*d*”,“*e*”,“*f*”} составляются различные слова длиной $2m$ такие, что:

$$N_a + N_d + N_e = m; \quad N_b + N_c + N_f = m;$$

$$N_a + N_c \ge m+1,$$

где N_a, N_b, N_c, N_d, N_e и N_f – количество использованных в данном слове символов “*a*”,“*b*”,“*c*”,“*d*”,“*e*” и “*f*” соответственно. Требуется для каждого допустимого набора $\{N_a, N_b, N_c, N_d, N_c, N_f\}$ найти общее число слов $WORD6_m(N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f)$, которые при их просмотре слева направо одновременно удовлетворяют трем условиям:

1) количество встреченных символов “*b*” никогда не превышает количества встреченных символов “*a*”;
2) количество встреченных символов “*d*” никогда не превышает количества встреченных символов “*c*”;

3) количество встреченных символов “*a*” никогда не превышает количества встреченных символов “*c*” более чем на $(m+1-N_c)$.

<u>Решение</u>:

Используя методы, связанные с подсчетом числа случайных путей в камерах Вейля [*Gessel, Ira M.; Zeilberger, Doron. Random walk in a Weyl chamber. Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), no. 1, 27-31*], мы нашли решение этой задачи:

$$
\begin{aligned}
&WORD_6(N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f, m) = \frac{(2m)!}{N_e! N_f!} \times \\
&\times \left\{ \left[\frac{1}{N_a! N_b! N_c! N_d!} - \frac{1}{N_a! N_b! (N_c+1)! (N_d-1)!} \right] + \right. \\
&+ \left[\frac{1}{(N_a+1)!(N_b-1)!(N_c+1)!(N_d-1)!} - \frac{1}{(N_a+1)!(N_b-1)! N_c! N_d!} \right] + \\
&+ \left[\frac{1}{(m+3)! N_b! (N_d-1)! (N_a+N_c-(m+2))!} - \frac{1}{(m+2)! N_b! N_d! (N_a+N_c-(m+2))!} \right] + \\
&+ \left. \left[\frac{1}{(m+3)!(N_b-1)! N_d! (N_a+N_c-(m+2))!} - \frac{1}{(m+4)!(N_b-1)!(N_d-1)!(N_a+N_c-(m+2))!} \right] \right\}.
\end{aligned}
$$