**Формулы $P_{n,k}(\varepsilon)$, найденные с использованием программных, аналитических и дискретно-комбинаторных алгоритмов.** Отыскание формул $P_{n,k}(\varepsilon)$ эквивалентно решению следующей задачи:

«Найти вероятность того, что при случайном бросании $n$ точек на интервал (0,1) не будет образовано ни одной группировки, сосредоточенной внутри некоторого подынтервала $\Omega_\varepsilon \subset (0,1)$ длиной $\varepsilon$ и имеющей в своем составе более $k$ точек».

При $k$>1, в отличие от простейшего случая $k$=1, вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ не может быть представлена в виде единой замкнутой аналитической формулы, справедливой во всех диапазонах изменения непрерывного параметра $\varepsilon$. Однако с использованием компьютерных и дискретно-комбинаторных инструментов, включая программно-аналитические вычисления и обобщенные числа Каталана, для вероятностей $P_{n,k}(\varepsilon)$ нами найден целый ряд аналитических зависимостей, в том числе:

**I.** Для четных значений $n$=2$m$ на участке $\frac{1}{m} < \varepsilon < \frac{1}{m-1}$ установлена и доказана формула

$$P_{2m,2}(\varepsilon) = \frac{1}{m+1} C_{2m}^{m} (1-(m-1)\varepsilon)^{2m}.$$

**II.** Для четных значений $n$=2$m$ на участке $\frac{1}{m+1} < \varepsilon < \frac{1}{m}$ установлена и доказана формула

$$\begin{aligned} P_{2m,2}(\varepsilon) &= C_{2m}^{m}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m} - C_{2m}^{m-1}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m} - \\ &- C_{2m}^{m-2}(1-m\varepsilon)^{m+2}(1-(m-2)\varepsilon)^{m-2} + \\ &+ 2C_{2m}^{m-3}(1-m\varepsilon)^{m+3}(1-(m-2)\varepsilon)^{m-3} - C_{2m}^{m-4}(1-m\varepsilon)^{m+4}(1-(m-2)\varepsilon)^{m-4}. \end{aligned}$$

**III.** Для нечетных значений $n$=2$m$+1 на участке $\frac{1}{m+1} < \varepsilon < \frac{1}{m}$ установлена и доказана формула

$$\begin{aligned} P_{2m+1,2}(\varepsilon) &= C_{2m+1}^{m+1}(1-m\varepsilon)^{m+1}(1-(m-1)\varepsilon)^{m} - \\ &- 2C_{2m+1}^{m+2}(1-m\varepsilon)^{m+2}(1-(m-1)\varepsilon)^{m-1} + \\ &+ C_{2m+1}^{m+3}(1-m\varepsilon)^{m+3}(1-(m-1)\varepsilon)^{m-2}. \end{aligned}$$

**IV.** Для $k$=$n$-1 доказана зависимость

$$P_{n,n-1}(\varepsilon) = 1 - n\varepsilon^{n-1} + (n-1)\varepsilon^{n}.$$

Эта формула описывает, в частности, вероятность того, что при случайном бросании $n$ точек на интервал (0,1) все они не «собьются» в одну компактную $\varepsilon$-группировку.

**V.** Для $k$=$n$-2 зависимость $P_{n,k}(\varepsilon)$ более сложна:

$$P_{n,n-2}(\varepsilon)=\begin{cases} 1-2C_n^2\varepsilon^{n-2}(1-\varepsilon)^2-2\varepsilon^n, & 0\le\varepsilon\le(1/2); \\ 1-2C_n^2\varepsilon^{n-2}(1-\varepsilon)^2-2\varepsilon^n+(2\varepsilon-1)^n, & (1/2)\le\varepsilon\le 1. \end{cases}$$

**VI.** Для $k$=$n$-3 зависимость $P_{n,k}(\varepsilon)$ усложняется настолько, что обнаружить ее путем анализа частных программных решений весьма затруднительно:

$$\underset{(n>6)}{P_{n,n-3}(\varepsilon)}=\begin{cases} 1-2\varepsilon^n+C_n^1(6\varepsilon^n-4\varepsilon^{n-1})+C_n^2(-3\varepsilon^n+\varepsilon^{n-2})+ \\ \quad +C_n^3(9\varepsilon^n-18\varepsilon^{n-1}+12\varepsilon^{n-2}-3\varepsilon^{n-3}), \\ \qquad 0\le\varepsilon\le(1/2); \\ 1-2\varepsilon^n+(2\varepsilon-1)^n+C_n^1(1-\varepsilon)(-2\varepsilon^{n-1}+2(2\varepsilon-1)^{n-1})+ \\ \quad +C_n^2(1-\varepsilon)^2(\varepsilon^{n-2}+(2\varepsilon-1)^{n-2})-3C_n^3\varepsilon^{n-3}(1-\varepsilon)^3, \\ \qquad (1/2)\le\varepsilon\le 1. \end{cases}$$

Формулы (IV-VI) подтверждены с помощью прямого интегрирования.