

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЛАДКИХ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ МАРШРУТОВ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА (КИНЕМАТИКА)

С.А. Белокопьев, Ю.Н. Золотухин, А.А. Нестеров

Институт автоматизации и электротехники СО РАН
630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 1, Россия
zol@idisys.iae.nsk.su
тел: +7 (383) 333-26-25, факс: +7 (383) 333-88-78

Ключевые слова: летательный аппарат, планирование траектории, поворотные пункты маршрута, спираль Корню (клотоида), ограничение перегрузки.

Abstract

In the paper we presented the smoothing 2D-path planning procedure for aircraft. Desired path is given as an ordered sequence of waypoints. Modeling results demonstrate an effectiveness of proposed technique based on the use of clothoid.

Введение

Для решения проблемы планирования маршрута, заданного последовательностью поворотных пунктов маршрута (ППМ), используются два основных метода. В первом способе аппарат должен следовать за точкой, передвигающейся вдоль желаемой траектории с установленной скоростью; этот способ называется «отслеживанием траектории» [1]. При этом неявно требуется, чтобы аппарат находился в определенном положении в определенное время.

Второй способ – это «следование вдоль пути» [2]. Цель следования вдоль пути – нахождение аппарата на пути, а не в определенном положении в определенное время. Алгоритмы следования вдоль пути используют либо метод векторных полей, либо метод потенциальных полей [3, 4].

Данная работа может быть отнесена к работам, использующим второй способ планирования маршрута. Далее под маршрутом движения летательного аппарата (ЛА) понимается проекция трехмерной траектории полета на горизонтальную плоскость. Основой планирования такого маршрута является указание координат поворотных пунктов маршрута и определение траекторий движения между ППМ и траекторий поворотов в окрестностях этих пунктов. На рис. 1. представлена схема фрагмента маршрута, состоящего из трех ППМ и соответствующих траекторий L_1, L_2, S_1 .

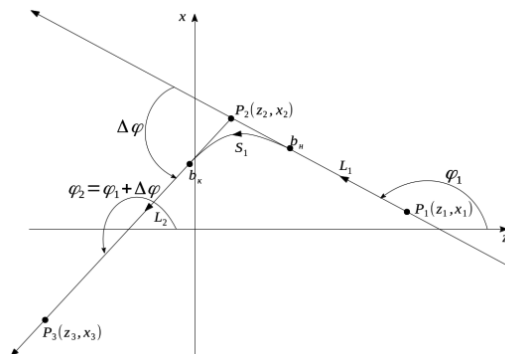


Рисунок 1 – Схема фрагмента маршрута

Пункты поворота представлены точками P_1, P_2, P_3 с указанием координат в системе (z, x) , принятой при описании движения ЛА. Движение между ППМ осуществляется по прямым линиям в направлениях возрастания индексов ППМ, т. е. по отрезкам L_1, L_2 ориентированных прямых линий. Поворот от траектории L_1 к траектории L_2 осуществляется по кривой S_1 , к которой предъявляются специфические требования, связанные с необходимостью учета ограничений на перегрузки, испытываемые ЛА.

Определим перегрузку \bar{n} как отношение ускорений, испытываемых ЛА, к ускорению силы тяжести g , т. е.:

$$\bar{n} = \frac{\dot{V}}{g},$$

где \dot{V} – вектор ускорения (a_t, a_n) с компонентами a_t – тангенциальное ускорение, и a_n – нормальное ускорение. Без потери общности мы будем считать, что движение по маршруту осуществляется с постоянной скоростью $V = const$ и, следовательно, в перегрузке отсутствует компонента a_t , т. е.

$$(1) \quad n = \frac{a_n}{g}$$

В точках b_s и b_e начала и конца поворота соответственно прямые L_1 и L_2 должны быть касательными к кривой S_1 . Это необходимо для непрерывности траектории. Но для гладкости траектории этого недостаточно. Необходимо еще соблюсти равенство кривизны траекторий в точках сопряжения. Важность этого требования демонстрируется, например, в случае сопряжения прямой с окружностью. В этом случае в точке сопряжения нормальное ускорение скачком изменяется от нуля на прямой до V^2/R на окружности. Внезапное приложение такого ускорения, в общем случае немало, воспринимается конструкцией ЛА как ударная нагрузка, при которой деформации элементов конструкции могут значительно превысить деформации при медленном приложении аналогичной нагрузки. С этим явлением, например, давно знакомы строители дорог. Ими широко используется кривая, сопряжение которой с прямолинейными участками траектории не приводит к ударным нагрузкам. Это спираль Корню или клотоида [5].

Основные результаты

В данной работе мы предлагаем упрощенный метод расчета гладкого маршрута P_1, P_2, P_3 с использованием клотоида в качестве траектории поворота и ориентированных прямых L_1, L_2 в качестве маршрутов движения от точки P_1 к точке P_2 , и от P_2 к P_3 соответственно.

Для описания маршрутов L_1 и L_2 естественно воспользоваться хорошо разработанной теорией ориентированных пересекающихся прямых, проходящих через две заданные точки [3]. Для сокращения объема излагаемого материала мы воспользуемся векторной формой вычислений.

Введем в рассмотрение радиусы-векторы $\bar{r}_1(z_1, x_1) = [z_1 \ x_1]^T$, $\bar{r}_2(z_2, x_2) = [z_2 \ x_2]^T$ и $\bar{r}(z, x) = [z \ x]^T$ точек P_1, P_2 и произвольных точек $P(z, x)$, лежащих на прямых L_1 и L_2 соответственно (рис. 2).

Вектор $\bar{R}_1 = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ определяет направление движения ЛА от точки P_1 к точке P_2 , т. е. единичный вектор \bar{t}_1 касательной к траектории L_1 :

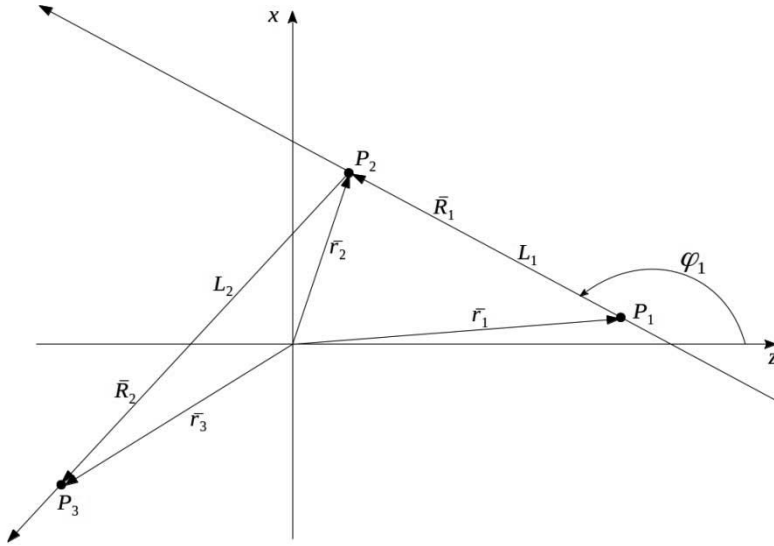


Рисунок 2 – Радиусы-векторы

$$(2) \quad \bar{r}_1 = \frac{\bar{R}_1}{|\bar{R}_1|} = [(\bar{r}_1)_z \quad (\bar{r}_1)_x]^T = [\cos \varphi_1 \quad \sin \varphi_1]^T$$

и единичный вектор нормали к этой траектории

$$(3) \quad \bar{n}_1 = [(\bar{r}_1)_z \quad -(\bar{r}_1)_x]^T = [\cos \varphi_1 \quad -\sin \varphi_1]^T,$$

где φ_1 – угол между положительным направлением оси z и ориентированной прямой L_1 соответственно.

Сама прямая $L_1(z, x)$ определяется уравнением

$$(4) \quad L_1(z, x) = \vec{r}(z, x) \cdot \bar{n}_1 + c_1 = z \cdot \sin \varphi_1 - x \cdot \cos \varphi_1 + c_1 = 0.$$

Уравнение прямой $L_2(z, x)$ определяется аналогично с заменой индексов 1 на 2:

$$(5) \quad L_2(z, x) = \vec{r}(z, x) \cdot \bar{n}_2 + c_2 = z \cdot \sin \varphi_2 - x \cdot \cos \varphi_2 + c_2 = 0.$$

Константы c_1 и c_2 определяются из условия прохождения прямых L_1 и L_2 через точки P_1 и P_2 для L_1 и точки P_2 и P_3 для L_2 :

$$(6) \quad \begin{cases} c_1 = -\vec{r}_1(z_1, x_1) \cdot \bar{n}_1 = -\vec{r}_2(z_2, x_2) \cdot \bar{n}_1 \\ c_2 = -\vec{r}_2(z_2, x_2) \cdot \bar{n}_2 = -\vec{r}_3(z_3, x_3) \cdot \bar{n}_2 \end{cases}$$

Очевидно, величина и направление скоростей движения по прямым L_1 и L_2 определяются векторами

$$(7) \quad \vec{V}_1 = V \cdot \bar{r}_1, \quad \vec{V}_2 = V \cdot \bar{r}_2,$$

где $V = const.$ – линейная скорость ЛА.

В качестве траектории поворота S_1 принимаем клотоиду (спираль Корню), которая не только обеспечивает непрерывное с заданной скоростью изменение центростремительного ускорения, но и является самой короткой среди переходных кривых подобного класса.

В координатах (z, x) спираль Корню описывается интегралами Френеля

$$(8) \begin{cases} z(U) = \int_0^U \cos \frac{\pi}{2} U^2 dU, \\ x(U) = \int_0^U \sin \frac{\pi}{2} U^2 dU. \end{cases}$$

Поскольку мы не будем пользоваться табличными значениями интегралов Френеля, нам удобнее другая нормировка в соотношениях (8) и мы определим клотоиду в форме

$$(9) \begin{cases} z(\tau) = a \cdot \int_0^\tau \cos \frac{\tau^2}{2} d\tau \\ x(\tau) = a \cdot \int_0^\tau \sin \frac{\tau^2}{2} d\tau \end{cases}$$

Чтобы соотношения (9) имели физический смысл, параметр a следует рассматривать как некий масштабный коэффициент, т. е. положить $[a] = M$, и принять τ за безразмерное время, т. е. положить $\Delta\tau = \frac{\Delta t}{T}$, где $[T] = [t] = c$. Здесь и далее знак $[\bullet]$ обозначает размерность переменной.

Соотношения (9) задают траекторию поворота S_1 в параметрической форме. Дважды дифференцируя (9) по параметру τ получаем:

$$(10) \bar{V}(\tau) = a \cdot \begin{bmatrix} \cos \frac{\tau^2}{2} \\ \sin \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix} \text{ и } \frac{d\bar{V}(\tau)}{d\tau} = a\tau \cdot \begin{bmatrix} -\sin \frac{\tau^2}{2} \\ \cos \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix},$$

т. е. векторы скорости и ускорения ЛА в функции параметра τ .

Из второго соотношения (10) очевидно, что $\left| \frac{d\bar{V}(\tau)}{d\tau} \right| = a\tau$ и, следовательно, для плавного перехода к повороту или выхода из него в точках сопряжения клотоиды с прямыми L_1 и L_2 необходимо иметь $\tau = 0$.

Определим (τ) – угол наклона касательной к клотоиде. В точке сопряжения клотоиды с прямой L_1 $\tau = 0$ и $(0) = 0$. При движении по клотоиде $\Delta(\tau)$ будет получать приращение

$$\Delta(\tau) = \Delta \arctg \frac{V_x(\tau)}{V_z(\tau)} = \Delta \frac{\tau^2}{2}, \text{ т. е.}$$

$$(11) \frac{d}{d\tau} = \tau \text{ и } \varphi(\tau) = \varphi(0) + \frac{\tau^2}{2}.$$

Очевидно, что соотношение (11) не может одновременно удовлетворять условиям $\varphi(0) = \varphi_1$ и $\varphi(0) = \varphi_2$ в точках сопряжения с прямыми L_1 и L_2 . Это противоречие устраняется использованием так называемой симметричной клотоиды, состоящей из двух частей. При этом параметр τ изменяется от $\tau = 0$ в точке сопряжения с прямой L_1 до некоторого значения τ_c с соответствующим изменением $\varphi(\tau)$ от $\varphi(0) = \varphi_1$ на L_1 до некоторого $\varphi(\tau_c) = \varphi_c$ и обратного изменения τ от τ_c до $\tau = 0$ на участке изменения $\varphi(\tau)$ от $\varphi(\tau_c) = \varphi_c$ до $\varphi(0) = \varphi_2$ на L_2 . Соотношение (11) в этом случае принимает форму $\varphi(\tau) = \varphi(0) \pm \frac{\tau^2}{2}$, справедливую для обоих участков клотоиды.

Для симметричности клотоиды следует положить

$$(12) \Delta\varphi(\tau_c) = \frac{\Delta\varphi}{2} = \pm \frac{\tau_c^2}{2},$$

где $\Delta\varphi$ – угол между положительными направлениями прямых L_1 и L_2 .

Знак в (12) определяется знаком угла $\Delta\varphi$, т. е. необходимо положить

$$(13) \tau_c^2 = |\Delta\varphi| \text{ и } \tau_c = \sqrt{|\Delta\varphi|}.$$

Угол $\Delta\varphi$ отсчитывается от положительного направления L_1 до положительного направления L_2 против часовой стрелки, т. е. $\Delta\varphi \geq 0$ при левом повороте от L_1 к L_2 и $\Delta\varphi \leq 0$ при правом повороте от L_1 к L_2 .

При таком определении $\Delta\varphi$ всегда должно выполняться равенство

$$(14) \varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi.$$

В [3] приведены соотношения для вычисления $\Delta\varphi$ при задании прямых в форме

$$f(z, x) = Az + Bx + C = 0.$$

В нашем случае с учетом (2), (3), (4), (5) получим

$$(15) A_1 = (\bar{\tau}_1)_z, B_1 = -(\bar{\tau}_1)_x, A_2 = (\bar{\tau}_2)_z, B_2 = -(\bar{\tau}_2)_x.$$

Теперь из (15) получим

$$(16) \begin{cases} \cos\Delta &= (\bar{\tau}_1)_x \cdot (\bar{\tau}_2)_x + (\bar{\tau}_1)_z \cdot (\bar{\tau}_2)_z = \bar{\tau}_1 \cdot \bar{\tau}_2, \\ \sin\Delta &= (\bar{\tau}_1)_z \cdot (\bar{\tau}_2)_x - (\bar{\tau}_2)_z \cdot (\bar{\tau}_1)_x = \bar{\tau}_1 \cdot \bar{n}_2 \end{cases}$$

Применение процедуры atan2 системы MATLAB™ к соотношениям (16) дает значение $\Delta\varphi$, удовлетворяющее условию $-\pi < \Delta\varphi < \pi$, что при выполнении (14) исключает ошибки, связанные с многозначностью функции Arctg.

Очевидно, прямая с углом наклона

$$(17) \varphi_c = \varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{2} = \varphi_2 - \frac{\Delta\varphi}{2},$$

проходящая через точку $P_2(z_2, x_2)$, делит угол между положительными направлениями прямых L_1 и L_2 пополам, т. е.

$$(18) \varphi_h = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Из (17) следуют более удобные соотношения

$$(19) \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \text{ и } \tau_c = \sqrt{|\varphi_2 - \varphi_1|}.$$

Теперь можно полностью определить закон изменения угла $\Delta\varphi_{\tan}(\tau)$ наклона касательной к клотоиде в функции параметра τ :

1. $\Delta\varphi > 0, \varphi_2 > \varphi_c > \varphi_1$ (левый поворот):

$$(20) \varphi_{\tan}(\tau) = \begin{cases} \varphi_1 + \frac{\tau^2}{2} & \text{for } 0 \leq \tau \leq \tau_c, \frac{d\tau}{dt} > 0, \\ \varphi_2 - \frac{\tau^2}{2} & \text{for } \tau_c > \tau \geq 0, \frac{d\tau}{dt} < 0 \end{cases}.$$

2. $\Delta\varphi < 0, \varphi_1 > \varphi_c > \varphi_2$ (правый поворот):

$$(21) \varphi_{\tan}(\tau) = \begin{cases} \varphi_1 - \frac{\tau^2}{2} & \text{for } 0 \leq \tau \leq \tau_c, \frac{d\tau}{dt} > 0, \\ \varphi_2 + \frac{\tau^2}{2} & \text{for } \tau_c > \tau \geq 0, \frac{d\tau}{dt} < 0 \end{cases}.$$

Соотношения (20), (21) можно объединить:

$$(22) \varphi_{\tan}(\tau) = \begin{cases} \varphi_1 + \text{sign}\Delta\varphi \cdot \frac{\tau^2}{2} & \text{for } 0 \leq \tau \leq \tau_c, \frac{d\tau}{dt} > 0, \\ \varphi_2 - \text{sign}\Delta\varphi \cdot \frac{\tau^2}{2} & \text{for } \tau_c > \tau \geq 0, \frac{d\tau}{dt} < 0 \end{cases}.$$

Для полного описания траектории поворота необходимо определить точки $b_s(z_s, x_s)$ и $b_e(z_e, x_e)$ начала и конца траектории поворота. Очевидно, координаты этих точек должны удовлетворять уравнениям (4) и (5) соответственно. Это дает два уравнения для четырех неизвестных координат. При движении по клотоиде координаты ЛА получают приращения, которые мы обозначим через Δz_{cl} и Δx_{cl} . Это дает нам еще два уравнения:

$$(23) \begin{cases} z_e = z_s + \Delta z_{cl}, \\ x_e = x_s + \Delta x_{cl} \end{cases}.$$

Введем обозначения:

$$(24) \begin{cases} I_1 = \int_0^{\tau_c} \cos \left(\varphi_1 + \text{sign} \Delta \varphi \cdot \frac{\tau^2}{2} \right) d\tau \\ I_2 = - \int_0^{\tau_c} \cos \left(\varphi_2 - \text{sign} \Delta \varphi \cdot \frac{\tau^2}{2} \right) d\tau \\ I_3 = \int_0^{\tau_c} \sin \left(\varphi_1 + \text{sign} \Delta \varphi \cdot \frac{\tau^2}{2} \right) d\tau \\ I_4 = - \int_0^{\tau_c} \sin \left(\varphi_2 - \text{sign} \Delta \varphi \cdot \frac{\tau^2}{2} \right) d\tau \end{cases} .$$

и функции

$$(25) CF(\tau_c) = \int_0^{\tau_c} \cos \frac{\tau^2}{2} d\tau \quad SF(\tau_c) = \int_0^{\tau_c} \sin \frac{\tau^2}{2} d\tau .$$

С учетом этих обозначений после простых преобразований интегралы в (24) приобретают простую форму

$$(26) \begin{cases} I_1 = \mathbf{cos} \varphi_1 \cdot CF(\tau_c) - \text{sign}(\Delta \varphi) \cdot \mathbf{sin} \varphi_1 \cdot SF(\tau_c), \\ I_2 = -\mathbf{cos} \varphi_2 \cdot CF(\tau_c) - \text{sign}(\Delta \varphi) \cdot \mathbf{sin} \varphi_2 \cdot SF(\tau_c), \\ I_3 = \mathbf{sin} \varphi_1 \cdot CF(\tau_c) + \text{sign}(\Delta \varphi) \cdot \mathbf{cos} \varphi_1 \cdot SF(\tau_c), \\ I_4 = -\mathbf{sin} \varphi_2 \cdot CF(\tau_c) + \text{sign}(\Delta \varphi) \cdot \mathbf{sin} \varphi_2 \cdot SF(\tau_c), \end{cases}$$

и для Δz_{cl} и Δx_{cl} получаем соотношения

$$(27) \Delta z_{cl} = a \cdot (I_1 + I_2), \quad \Delta x_{cl} = a \cdot (I_3 + I_4).$$

Подставляя векторы $[z_s \ x_s]^T$ и $[z_e \ x_e]^T$ с учетом (23) и (27) в уравнения (4) и (5) соответственно, получим систему линейных уравнений относительно координат (z_s, x_s) точки начала поворота. Решение этой системы в матричной форме имеет вид:

$$(28) \begin{bmatrix} z_s \\ x_s \end{bmatrix} = in \nu \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{\tau}_1)_z & -(\bar{\tau}_1)_x \\ (\bar{\tau}_2)_z & -(\bar{\tau}_2)_x \end{bmatrix} \\ -C_2 - \begin{bmatrix} -C_1 \\ (\bar{\tau}_2)_x \\ -(\bar{\tau}_2)_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta z_{cl} \\ \Delta x_{cl} \end{bmatrix} \end{bmatrix} .$$

Для дальнейшего планирования маршрута желательно описать движение ЛА в функции времени. Выше отмечалось, что параметр τ удобно определить как безразмерное время.

Пусть t – текущее время движения по маршруту и t_s – время начала поворота. Определим

$\Delta t = t - t_s$ и положим $\tau = \Delta t T$. Тогда $\Delta t_c = T \cdot \tau_c$ – интервал времени, необходимый для изменения угла $\varphi(\tau)$ наклона касательной к клотоиде от $\varphi(0) = \varphi_1$ до $\varphi(\tau_c) = \varphi_c$ и для $\tau(t)$ справедливо соотношение

$$(29) \tau(t) = \frac{t-t_s}{T}, \quad t_s \leq t \leq t_s + T \cdot \tau_c, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T}.$$

Очевидно, на интервале изменения $\varphi(\tau)$ от $\varphi(\tau_c) = \varphi_c$ до $\varphi(0) = \varphi_2$ $\tau(t)$ будет изменяться по закону

$$(30) \tau(t) = \frac{2T \cdot \tau_c - (t-t_s)}{T}, \quad T \cdot \tau_c + t_s < t \leq 2T \cdot \tau_c + t_s.$$

Полученные соотношения позволяют определить вектор скорости движения ЛА по переходной кривой в функции времени. Из (9), (10), (22), (29), (30) получаем

$$(31) \vec{V}(t) = \vec{V}(\tau) \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{a}{T} \cdot [\cos \varphi_{\tan}(\tau(t)) \quad \sin \varphi_{\tan}(\tau(t))]^T,$$

где

$$(32) \varphi_{\tan}(t) = \begin{cases} \varphi_1 + \text{sign} \Delta \varphi \cdot \left(\frac{t-t_s}{T} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \text{ for } t_s \leq t \leq t_s + T \cdot \tau_c, \\ \varphi_2 - \text{sign} \Delta \varphi \cdot \left(\frac{2T \cdot \tau_c - (t-t_s)}{T} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \text{ for } t_s + T \cdot \tau_c < t \leq t_s + 2T \cdot \tau_c \end{cases}.$$

Осталось определить постоянные a и T . Из (9.1) определяем $\left[\frac{a}{T} \right] = m/s = [V]$. Из структуры (31) очевидно, что следует положить

$$(33) V = \frac{a}{T},$$

где V – заданная линейная скорость движения ЛА по переходной кривой, и

$$(34) \vec{V}(t) = V \cdot [\cos \varphi_{\tan}(\tau(t)) \quad \sin \varphi_{\tan}(\tau(t))]^T.$$

Далее, из соотношений (9) легко определяются основные свойства клотоиды:

$$\text{кривизна } k(\tau) = \frac{\tau}{a};$$

$$\text{радиус кривизны } \rho(\tau) = \frac{a}{\tau};$$

$$\text{длина траектории поворота } S(\tau) = 2a \cdot \tau_c.$$

$$\text{Нормальное ускорение } a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{a} \cdot \tau \text{ достигает максимума при } \tau = \tau_c.$$

Из (1) необходимо

$$(35) n_{\max} = \frac{V^2 \tau_c}{ag} \leq n_{enable}.$$

Из (33) и (35) получаем оценку

$$\frac{V}{T} \tau_c \leq g \cdot n_{enable} \quad \text{и} \quad T \geq \frac{V \cdot \tau_c}{g \cdot n_{enable}}.$$

С учетом (13) положим

$$(36) \quad T = \frac{V}{g \cdot n_{enable}} \cdot \sqrt{|\Delta\varphi|}, \quad a = \frac{V^2 \cdot \sqrt{|\Delta\varphi|}}{g \cdot n_{enable}}, \quad S = 2 \cdot \frac{V^2 \cdot \sqrt{|\Delta\varphi|}}{g \cdot n_{enable}}.$$

Предложенный метод планирования траектории движения, заданной последовательностью поворотных пунктов маршрута, реализован в среде MATLAB/Simulink. На рисунке 3 представлены результаты планирования траектории движения с использованием клотоиды для перехода между отрезками прямых маршрута.

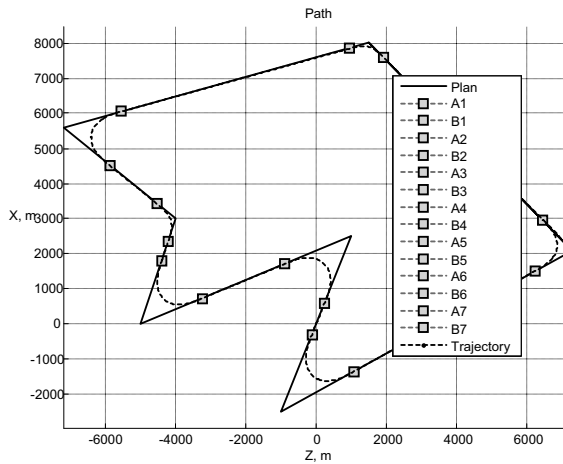


Рисунок 3 – Планирование траектории движения

Заключение

Результаты моделирования процедуры планирования гладких траекторий движения, заданных последовательностью поворотных пунктов маршрута подтвердили работоспособность и эффективность предложенного упрощенного метода планирования с использованием кривых Корню.

Благодарности

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 15-08-03233.

Список литературы

- [1] Kaminer, I., Pascoal, A., Hallberg, E. and Silvestre, C., Trajectory tracking for autonomous vehicles: An integrated approach to guidance and control // AIAA J. Guidance, Control Dynam., 1998, vol. 21, no. 1, pp. 29–38.
- [2] P. Aguiar, J. Hespanha, and P. Kokotović, Path-following for non-minimum phase systems removes performance limitations, IEEE Trans. Automat. Control, vol. 50, no. 2, pp. 234–239, Mar. 2005.
- [3] Khatib, O., Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots, The International Journal of Robotics Research, March 1 1986, vol. 5, pp. 90-98.
- [4] Borenstein, J. and Koren, Y. Real-time obstacle avoidance for fast mobile robots, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1989, vol. 19, pp. 1179-1187.
- [5] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. ГИИТЛ, Москва, 1957.