УДК 681.532.8

# УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА*

**Ю. Н. Золотухин, А. А. Нестеров**

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН,*
*630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1*
*E-mail: zol@idisys.iae.nsk.su*

Рассмотрена проблема управления угловым положением летательного аппарата в трёхмерном пространстве. Ориентация представлена углами Эйлера между осями связанной системы координат аппарата и нормальной земной системы. Предложен способ вычисления вращающих моментов, приводящих аппарат в заданное угловое положение. Представлена схема контроллера, реализующего данный метод. Приведены результаты моделирования.

*Ключевые слова:* летательный аппарат, угловое положение, управление ориентацией, вращающие моменты.

**Введение.** При движении летательного аппарата (ЛА) как твёрдого тела различают поступательное движение — движение центра масс аппарата относительно Земли — и вращательное движение — вращение аппарата вокруг его центра масс. При исследовании этих движений используются различные системы координат. Далее мы будем применять нормальную и связанную системы координат [1] для описания поступательного и вращательного движений соответственно.

Начало $O$ нормальной системы координат $OX_gY_gZ_g$ совпадает с центром масс летательного аппарата. Ось $OY_g$ направлена вверх по местной вертикали. Плоскость $OX_gZ_g$ является местной горизонтальной плоскостью, проходящей через точку $O$ перпендикулярно оси $OY_g$. Оси $OX_g$ и $OZ_g$ параллельны осям $O_0X_g$, $O_0Z_g$ нормальной земной системы координат и образуют совместно с осью $OY_g$ прямоугольную правую систему координат.

Начало $O$ связанной системы координат $OXYZ$ совпадает с центром масс ЛА, а оси ориентированы по главным осям инерции аппарата. Продольная ось $OX$ расположена в плоскости симметрии и направлена в сторону носовой части. Поперечная ось $OZ$ перпендикулярна плоскости симметрии и ориентирована по правому полукрылу. Ось $OY$ лежит в плоскости симметрии и направлена к верхней части аппарата. Система $OXYZ$ — прямоугольная правая система координат.

Поскольку оси связанной системы координат неподвижны относительно ЛА и совпадают с его главными осями инерции, её положение относительно нормальной системы координат определяет параметры пространственного положения ЛА в его вращательном движении относительно Земли. Этими параметрами являются эйлеровы углы: $\psi$ — угол рыскания, $\vartheta$ — угол тангажа и $\gamma$ — угол крена [2, 3].

Угол рыскания $\psi$ — угол между осью $OX_g$ нормальной системы координат и проекцией продольной оси $OX$ связанной системы координат на горизонтальную плоскость $OX_gZ_g$ нормальной системы координат.

Угол тангажа $\vartheta$ — угол между продольной осью $OX$ связанной системы координат и горизонтальной плоскостью $OX_gZ_g$ нормальной системы координат.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-08-03233).

Угол крена $\gamma$ — угол между поперечной осью $OZ$ связанной системы координат и осью $OZ_g$ нормальной системы координат.

Далее под управлением ориентацией ЛА мы будем понимать целесообразное изменение значений углов $\psi$, $\vartheta$ и $\gamma$.

Управление ориентацией позволяет менять угловое положение ЛА относительно воздушных потоков, обтекающих аппарат. Это изменяет значения аэродинамических сил и моментов, воздействующих на ЛА, что позволяет управлять скоростью и направлением его движения.

**Постановка задачи и метод решения.** Будем считать, что известны желаемые значения углов $\psi = \psi_{\text{ref}}$, $\vartheta = \vartheta_{\text{ref}}$ и $\gamma = \gamma_{\text{ref}}$, обеспечивающие требуемый режим полёта. Наша задача — путём использования органов управления ЛА перевести значения эйлеровых углов из произвольного начального состояния в заданные значения $\psi_{\text{ref}}$, $\vartheta_{\text{ref}}$, $\gamma_{\text{ref}}$ по траекториям, удовлетворяющим требованиям к качеству переходных процессов.

Вращательное движение ЛА опишем следующими векторными функциями времени:

1) $\mathbf{\Gamma}(t) = (\gamma(t), \psi(t), \vartheta(t))^T$ — вектор текущих значений углов Эйлера;

2) $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))^T$ — вектор угловых скоростей вращения ЛА в проекциях на оси связанной системы координат;

3) $\mathbf{M}(t) = (M_x(t), M_y(t), M_z(t))^T$ — суммарный момент вращения, образуемый всеми силами, воздействующими на ЛА, включая аэродинамические силы, создаваемые управляющими поверхностями аппарата;

4) $\mathbf{I}(m) = (I_x(m), I_y(m), I_z(m))^T$ — вектор моментов инерции ЛА относительно осей связанной системы координат;

5) $m$ — масса ЛА.

При полёте над плоской землёй для описания ориентации ЛА достаточно знания углов $\psi$, $\vartheta$ и $\gamma$, задающих положение осей связанной системы координат относительно нормальной системы координат. В этом случае проекции вектора угловой скорости аппарата на связанные оси определяются кинематической системой дифференциальных уравнений [2, 3]

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x &= \dot\gamma + \dot\psi \sin\vartheta, \\
\omega_y &= \dot\psi \cos\vartheta \cdot \cos\gamma + \dot\vartheta \sin\gamma, \\
\omega_z &= -\dot\psi \cos\vartheta \cdot \sin\gamma + \dot\vartheta \cos\gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

имеющей обращённую форму

$$\left.\begin{aligned}
\dot\gamma &= \omega_x - \tan\vartheta(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma), \\
\dot\psi &= \frac{1}{\cos\vartheta}\,(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma), \\
\dot\vartheta &= \omega_y \sin\gamma + \omega_z \cos\gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а закон изменения вектора угловой скорости задаётся системой динамических уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\dot\omega_x &= \frac{1}{I_x}\,M_x - \frac{I_z - I_y}{I_x}\,\omega_y\omega_z, \\
\dot\omega_y &= \frac{1}{I_y}\,M_y - \frac{I_x - I_z}{I_y}\,\omega_z\omega_x, \\
\dot\omega_z &= \frac{1}{I_z}\,M_z - \frac{I_y - I_x}{I_z}\,\omega_x\omega_y.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Системы уравнений (1)–(3) хорошо известны [2, 3] и являются основой построения систем управления различными режимами полёта ЛА.

Далее будем пользоваться более компактной векторно-матричной формой записи нелинейных дифференциальных уравнений (2) и (3):

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Gamma}), \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\omega}) + B\mathbf{M}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где векторы $\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}$ определены, а значения векторов $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и диагональной матрицы $B$ следуют из сопоставления правых частей уравнений (4) и систем (2) и (3) соответственно.

В уравнениях (4) под $\mathbf{M}$ будем понимать некоторое требуемое значение момента $\mathbf{M}_{\text{ref}}$, позволяющее перевести значения углов $\mathbf{\Gamma}$ в требуемое значение $\mathbf{\Gamma}_{\text{ref}}$ по желаемой траектории $\mathbf{S}(t)$, уравнение которой в соответствии с [4] имеет вид

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{\Gamma}}(t) - K_1(\mathbf{\Gamma}(t) - \mathbf{\Gamma}_{\text{ref}}) = 0. \tag{5}$$

Для выполнения условия (5), т. е. реализации вынужденного движения системы (4) по заданной траектории, найдём $\mathbf{M}_{\text{ref}}$ из условия

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = -K_2\mathbf{S}(t), \tag{6}$$

что с учётом (5) приводит нас к линейному относительно $\mathbf{\Gamma}(t)$ дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{\mathbf{\Gamma}} = -(K_1 + K_2)\dot{\mathbf{\Gamma}} - K_1K_2(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}_{\text{ref}}), \tag{7}$$

определяющему необходимое значение $\ddot{\mathbf{\Gamma}}$ для движения системы по траектории (5).

В уравнениях (5) и (6) коэффициенты диагональных матриц $K_1$ и $K_2$ выбираются из условия устойчивого переходного процесса системы (7) в точку $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_{\text{ref}}$. Так, например, при $K_1 = K_2$ с положительными диагональными элементами соответствующих матриц выполнение уравнения (7) приводит к устойчивым переходным процессам без перерегулирования [5].

Вращающий момент $\mathbf{M}$ согласно (4) может влиять на $\ddot{\mathbf{\Gamma}}$ только через изменения вектора угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$. Из системы (4) получим

$$\ddot{\mathbf{\Gamma}} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Gamma})}{\partial \boldsymbol{\omega}}\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Gamma})}{\partial \mathbf{\Gamma}}\,\dot{\mathbf{\Gamma}} \tag{8}$$

и, подставляя $\dot{\boldsymbol{\omega}}, \dot{\mathbf{\Gamma}}$ из (4) в (8), будем иметь

$$\ddot{\mathbf{\Gamma}} = \frac{\partial \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Gamma})}{\partial \boldsymbol{\omega}}\,\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\omega}) + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Gamma})}{\partial \mathbf{\Gamma}}\,\dot{\mathbf{\Gamma}} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{\Gamma})}{\partial \boldsymbol{\omega}}\,B\mathbf{M}. \tag{9}$$

Для вычисления желаемого значения $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{ref}}$ приравняем правые части соотношений (7) и (9). Опустив обозначения переменных в функциях $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, после несложных преобразований получим

$$\mathbf{M}_{\text{ref}} = -\text{inv}(B)\Big[\mathbf{F}_2 + \text{inv}\Big(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \boldsymbol{\omega}}\Big)\Big(\Big(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{\Gamma}} + K_1 + K_2\Big)\dot{\mathbf{\Gamma}} + K_1K_2(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}_{\text{ref}})\Big)\Big]. \tag{10}$$

Простая подстановка $\mathbf{M}_{\text{ref}}$ из (10) в уравнение (9) приводит к уравнению (7), т. е. введение нелинейной обратной связи в управляемую систему (4) превращает её в линейную систему второго порядка с желаемым переходным процессом из начального состояния $\mathbf{\Gamma}(0)$ в конечное состояние $\mathbf{\Gamma}_{\text{ref}}$. При этом в случае $\mathbf{\Gamma}_{\text{ref}} = \text{const}$ значения $\ddot{\mathbf{\Gamma}}$ и $\dot{\mathbf{\Gamma}}$ экспоненциально стремятся к нулю, что в соответствии с (1) приводит к нулю и вектор угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$.

Соотношение (10) определяет вектор так называемых потребных значений вращающих моментов, позволяющих установить и поддерживать значения углов $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_{\text{ref}}$. Однако из-за особенностей конструкции ЛА и эффективности его рулей не всегда можно выполнить (10). В этом случае говорят о располагаемых значениях моментов вращения и допустимых углах отклонения рулевых поверхностей. Нахождение необходимых углов отклонения рулей существенно зависит от конструкции ЛА.

**Углы отклонения рулей.** Рассмотрим вопрос определения углов отклонения рулей, обеспечивающих требуемое значение момента $\mathbf{M}_{\text{ref}}$. Эффективность рулей зависит от скорости аппарата, плотности воздуха и многих других параметров полёта, наиболее существенными из которых являются скорость движения и углы атаки $\alpha$ и скольжения $\beta$. Углы $\alpha$ и $\beta$ задают положение скоростной системы координат относительно связанной. В скоростной системе ось $OX_a$ направлена по воздушной скорости $\mathbf{V}$, ось подъёмной силы $OY_a$ располагается в плоскости симметрии ЛА и направлена вверх, боковая ось $OZ_a$ — перпендикулярно плоскости симметрии по правому полукрылу [1]. Угол атаки $\alpha$ — угол между осью $OX_a$ и проекцией скорости $\mathbf{V}$ на плоскость $OXY$ связанной системы координат; угол скольжения $\beta$ — угол между скоростью $\mathbf{V}$ и плоскостью $OXY$ связанной системы координат.

Скоростная система координат используется для описания воздействия набегающего потока воздуха при продувках ЛА или его динамически подобных моделей в аэродинамических трубах. Результаты испытаний в аэродинамических трубах сведены в таблицы безразмерных коэффициентов, отражающих зависимости аэродинамических коэффициентов ЛА от углов $\alpha$, $\beta$, углов отклонения рулевых поверхностей и других параметров полёта. Эти таблицы в условиях реального полёта позволяют восстановить силы и моменты, действующие на летательный аппарат.

В общем случае значение располагаемого момента $\mathbf{M}_{av}$ можно представить в виде

$$\mathbf{M}_{av}(\alpha, \beta, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{M}_0(\alpha, \beta) + \frac{\partial \mathbf{M}(\alpha, \beta, \boldsymbol{\delta})}{\partial \boldsymbol{\delta}} \boldsymbol{\delta}. \tag{11}$$

В (11) $\boldsymbol{\delta} = (\delta_a, \delta_r, \delta_e)^T$ — вектор углов отклонений обобщённых рулей крена, курса и высоты; $\mathbf{M}_0(\alpha, \beta)$ — момент вращения, создаваемый воздушным потоком при нулевых отклонениях рулей. Для создания момента в соответствии с (10) необходимо отклонить рули на углы

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{ref}} = \text{inv}\Big(\frac{\partial \mathbf{M}(\alpha, \beta, \boldsymbol{\delta})}{\partial \boldsymbol{\delta}}\Big) (\mathbf{M}_{\text{ref}} - \mathbf{M}_0(\alpha, \beta)). \tag{12}$$

Последнее соотношение справедливо при зависимости $\mathbf{M}_{av}(\alpha, \beta, \boldsymbol{\delta})$ от $\boldsymbol{\delta}$, близкой к линейной при ограниченных углах $\boldsymbol{\delta}$. Углы $\boldsymbol{\delta}$ всегда ограничены либо конструктивными соображениями, либо величиной предельно допустимых перегрузок. При этом не всегда возможно выполнить условие $\mathbf{M}_{av} = \mathbf{M}_{\text{ref}}$ и заданная желаемая траектория (5), (6) оказывается нереализуемой. Выход из такого положения может заключаться в уменьшении диагональных коэффициентов матриц $K_1$ и $K_2$. Это приводит к увеличению постоянных времени переходных процессов на траектории (5), (6) и снижению требований к моменту $\mathbf{M}_{\text{ref}}$.

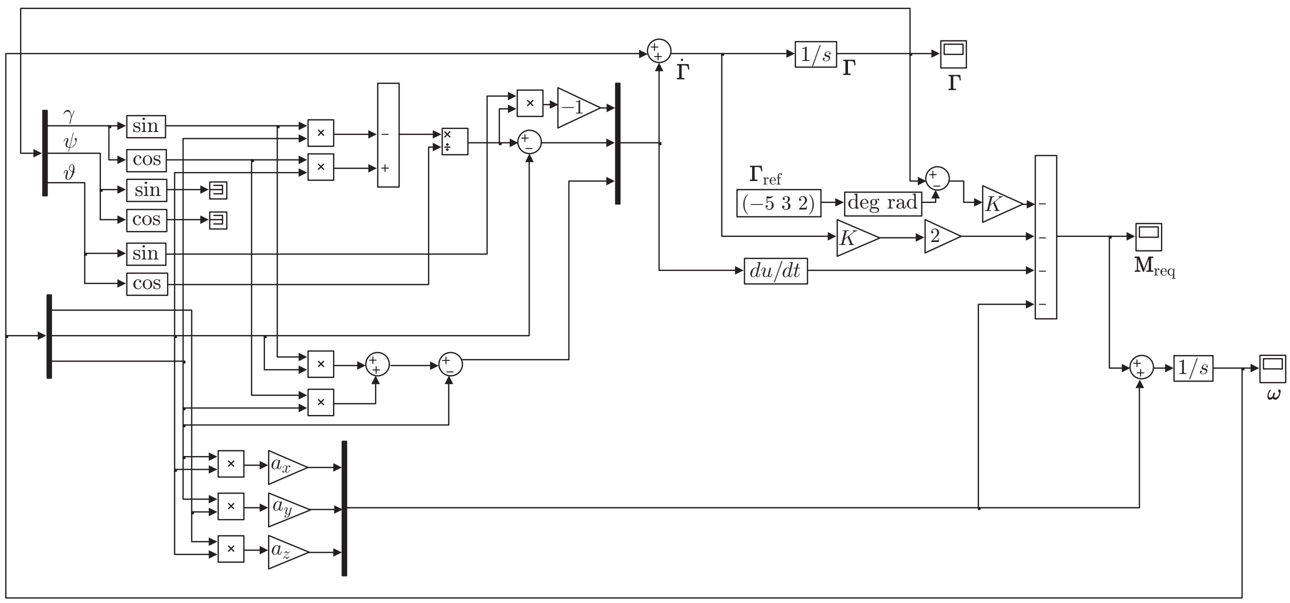


*Рис. 1*

**Моделирование движения.** Предложенный метод управления ориентацией летательного аппарата реализован в среде MATLAB/Simulink. На рис. 1 представлена схема контроллера, обеспечивающая вычисление потребных моментов для перевода ЛА к заданной ориентации. На рис. 2–4 показаны графики переходных процессов углов Эйлера, угловых скоростей и потребных моментов соответственно. При моделировании использованы параметры летательного аппарата "Sekwa" [6, 7]: осевые моменты инерции $I_x = 0{,}19$ кг·м$^2$, $I_y = -0{,}25$ кг·м$^2$, $I_z = 0{,}05$ кг·м$^2$ (учтены различия связанных систем координат по ГОСТ 20058-80 и ISO 1151 [1]).

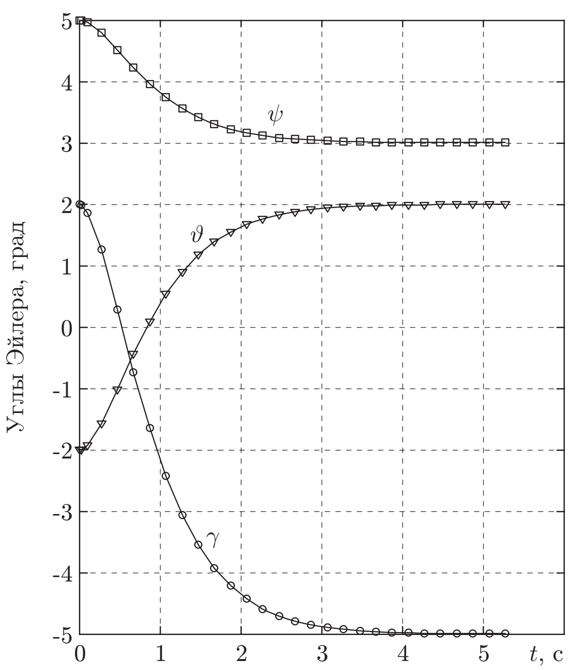


*Рис. 2*

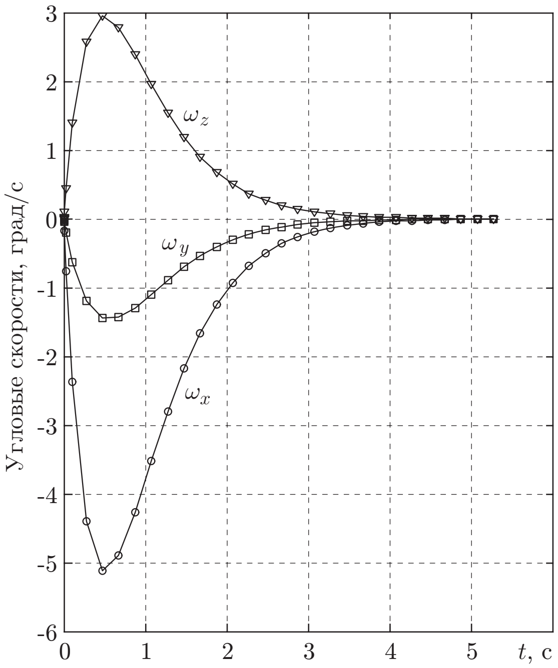


*Рис. 3*

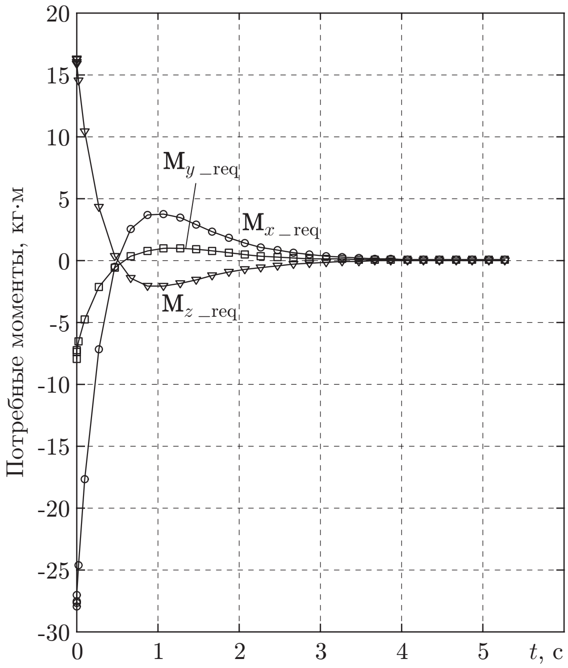


*Рис. 4*

Начальные значения угловых скоростей $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0°$ и углов ориентации $\gamma_0 = 2°$, $\psi = 5°$, $\vartheta = -2°$. Желаемые значения углов ориентации $\gamma_{\mathrm{ref}} = -5°$, $\psi_{\mathrm{ref}} = 3°$, $\vartheta_{\mathrm{ref}} = 2°$.

В схеме контроллера $a_x = (I_y - I_z)/I_x$, $a_y = (I_z - I_x)/I_y$, $a_z = (I_x - I_y)/I_z$. Значения коэффициентов усиления $\tau_x = 2$, $\tau_y = 2$, $\tau_z = 2$.

**Заключение.** Использование метода [4] организации вынужденного движения вдоль желаемой траектории в пространстве состояний для управления ориентацией летательного аппарата позволило достичь удовлетворительных переходных процессов. Представленная схема контроллера более проста в сравнении с результатами, полученными в [7] методом backstepping, при примерно равных показателях качества переходных процессов.

Предложенный способ вычисления потребных для достижения заданной ориентации летательного аппарата моментов реализован в среде MATLAB/Simulink. Результаты численного моделирования подтвердили эффективность данного подхода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **ГОСТ 20058-80.** Динамика летательных аппаратов в атмосфере. М.: Изд-во стандартов, 1981. 54 с. URL: http://gostexpert.ru/gost/getDoc/3780 (дата обращения: 2.06.2015).

2. **Воробьев В. Г., Кузнецов С. В.** Автоматическое управление полетом самолета. М.: Транспорт, 1995. 448 с.

3. **Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.** Динамика полета. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.

4. **Бобко В. Д., Золотухин Ю. Н., Нестеров А. А.** Нечеткая реализация скользящих режимов в системе возбуждения синхронного генератора // Тр. Междунар. конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах». Самара: Изд-во Самарского научного центра РАН, 1999. С. 229–234.

5. **Мирошник И. В.** Теория автоматического управления. Линейные системы. С.-Пб.: Питер, 2005. 336 с.

6. **Blaaw D.** Flight Control System for a Variable Stability Blended-Wing-Body Unmanned Aerial Vehicle: Master of Science Thesis. University of Stellenbosch, South Africa, 2009. 205 p. URL: http://scholar.sun.ac.za/handle/10019.1/2297 (дата обращения: 2.06.2015).
7. **Lungu M.** Stabilization and control of a UAV flight attitude angles using the backstepping method // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2012. **6**, N 1. P. 241–248. URL: http://waset.org/publications/6207/stabilization-and-control-of-a-uav-flight-attitude-angles-using-the-backstepping-method (дата обращения: 2.06.2015).

*Поступила в редакцию 2 июня 2015 г.*