

УДК 621.396.96:621.26

ВЛИЯНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПОМЕХ НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ КОГЕРЕНТНОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

© В. М. Артюшенко¹, В. И. Воловач^{2,3}

¹Технологический университет им. дважды Героя Советского Союза,
лётчика-космонавта А. А. Леонова,

141070, г. Королёв Московской обл., ул. Гагарина, 42

²Поволжский государственный университет сервиса,
445017, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4

³Воронежский государственный университет,

394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1

E-mail: artuschenko@mail.ru, volovach.vi@mail.ru

Рассмотрено и проанализировано влияние мультипликативных помех, действующих одновременно с белым шумом, на точность измерения частоты когерентного сигнала, заданного в виде последовательности когерентных импульсов. Определено условие отсутствия систематических ошибок на выходе следящего измерителя. Найдены крутизна его дискриминационной характеристики, спектральная плотность флюктуаций на выходе дискриминатора и коэффициенты, определяющие нормирующее действие автоматической регулировки усиления. Названные величины задают величину ухудшения точностных характеристик измерителя при воздействии мультипликативных помех. Показано, что влияние мультипликативной помехи возрастает при уменьшении уровня неискажённой части сигнала и при увеличении отношения энергии сигнала, когерентно накапливаемой в линейных цепях дискриминатора, к спектральной плотности мощности аддитивной помехи. Показано, что влияние мультипликативных помех проявляется наиболее сильно в тех случаях, когда ширина спектра функции помеховой модуляции соизмерима с полосой пропускания линейных цепей дискриминатора.

Ключевые слова: следящий измеритель, мультипликативная помеха, белый шум, точность измерения частоты, когерентный входной сигнал, выходной сигнал дискриминатора, крутизна дискриминационной характеристики, спектральная плотность флюктуаций.

DOI: 10.15372/AUT20240109

EDN: CKGSTY

Введение. Воздействию аддитивных помех на полезные сигналы посвящено значительное количество работ [1–6 и др.]. Вместе с тем в гораздо меньшей степени исследовалось влияние мультипликативных (модулирующих) помех как на приём полезных сигналов [7–10 и др.], так и на характеристики качества работы различных радиотехнических систем и устройств.

Цель представленной работы состоит в исследовании влияния мультипликативных помех на точность измерения частоты когерентного сигнала при одновременном воздействии аддитивного белого шума.

Оценим влияние мультипликативных помех на точность измерения частоты когерентного сигнала следящим измерителем. Считаем, что систематическая ошибка измерения отсутствует. Будем проводить анализ применительно к сигналу в виде когерентной последовательности импульсов. При этом все полученные результаты будут справедливы и для непрерывного когерентного сигнала, если принять длительность одного одиночного импульса, равную периоду повторения $T_{\text{п}}$.

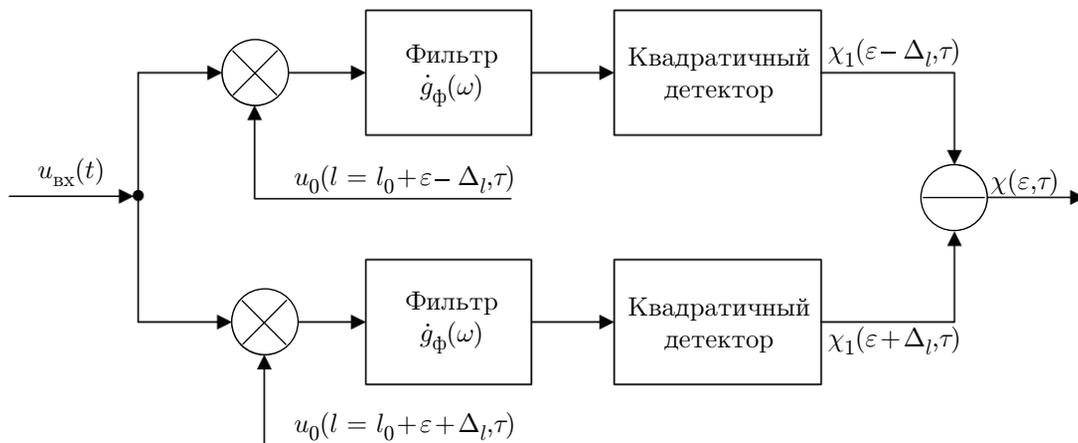


Рис. 1. Функциональная схема двухканального дискриминатора с расстроенными по параметру l каналами

Дальнейшее рассмотрение мы ограничим широко распространённой в различных системах схемой следящего измерителя — двухканальным дискриминатором с расстроенными по параметру l каналами (рис. 1) [11].

Принцип его работы заключается в следующем. Входной сигнал, искажённый помехами, $u_{\text{вх}}(t)$ поступает на два перемножителя, где умножается на опорные сигналы u_0 , смещённые по параметру l на величину $\pm \Delta_l$ относительно измеряемого в данный момент времени значения параметра l^* . Опорные сигналы формируются генераторами, которые управляются сигналами, пропорциональными измеренному значению параметра. После перемножения сигналы поступают на фильтры с частотной характеристикой $\dot{g}_\phi(\omega)$ и затем на квадратичные детекторы огибающей [12]. Здесь $\chi(\varepsilon, \tau)$ представляет собой сигнал рассогласования, пропорциональный разности между измеренным l^* и истинным l_0 значениями параметра $\varepsilon = l^* - l_0$.

Выходной сигнал дискриминатора (сигнал рассогласования, сигнал ошибки) пропорционален разности квадратов огибающих сигналов на выходе фильтров.

Коэффициенты $k_{\text{АРУ}}$, $k_{0,\text{АРУ}}$, которые определяют нормирующее действие автоматической регулировки усиления (АРУ) и поддерживают постоянной мощность входного сигнала в полосе линейных цепей дискриминатора, в рассматриваемой схеме последнего могут быть определены как величины, пропорциональные сумме квадратов огибающих на выходе фильтров. Заметим, что коэффициент $k_{\text{АРУ}}$ определяет нормирующее действие АРУ при одновременном действии аддитивных и мультипликативных помех, $k_{0,\text{АРУ}}$ — коэффициент, характеризующий нормирующее действие АРУ при наличии только аддитивных помех.

В дальнейшем коэффициент пропорциональности будем считать равным единице. При этом в отсутствии помех сигнал на входе линейных цепей дискриминатора с учётом нормирующего действия АРУ будет иметь единичную мощность.

В соответствии с функциональной схемой, представленной на рис. 1, выходной сигнал дискриминатора записывается в виде

$$\chi(\varepsilon, \tau) = \chi_1(\varepsilon - \Delta_l, \tau) - \chi_2(\varepsilon + \Delta_l, \tau),$$

где функции $\chi_{1,2}(\varepsilon \pm \Delta_l, \tau)$ в стационарном режиме равны

$$\chi_{1,2}(\varepsilon \pm \Delta_l, \tau) = \frac{1}{8} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{M}(t_1) \dot{U}(t_1, l_0) + \dot{N}(t_1)] [\dot{M}(t_2) \dot{U}(t_2, l_0) + N^*(t_2)] \times \right.$$

$$\times \dot{H}(\tau - t_1)H^*(\tau - t_2)U_0^*(t_1, l_0 - \varepsilon \mp \Delta_l)\dot{U}_0(t_2, l_0 - \varepsilon \mp \Delta_l) dt_1 dt_2 \}, \quad (1)$$

где $\dot{H}(\tau - t)$ — комплексная огибающая импульсной характеристики фильтра с частотной характеристикой $\dot{g}_\Phi(\omega)$; $\dot{U}_0(t, l_0 + \varepsilon \mp \Delta_l)$ — комплексная огибающая опорного сигнала единичной энергии; $\dot{U}(t, l_0) = \sqrt{E}\dot{U}_0(t, l_0)$ — комплексная огибающая нормированного принимаемого сигнала; E — энергия принимаемого сигнала; $\dot{N}(t)$ — комплексная огибающая аддитивного шума; $\dot{M}(t)$ — функция помеховой модуляции (ФПМ).

Здесь и далее (*) означает комплексно-сопряжённую величину.

В выражении (1) отброшен быстро осциллирующий член, который отфильтровывается в инерционных цепях квадратичных детекторов, включённых в оба канала дискриминатора.

Найдём крутизну дискриминационной характеристики и коэффициенты, определяющие нормирующее действие АРУ, полагая аддитивный шум $n_0(t)$ белым со спектральной плотностью N_0 . Для когерентного входного сигнала среднее значение выходного сигнала дискриминатора в стационарном режиме равно

$$\begin{aligned} \overline{\chi(\varepsilon, \tau)} &= \frac{E}{2} \alpha_0^2 [|\dot{\lambda}(\varepsilon - \Delta_l)|^2 - |\dot{\lambda}(\varepsilon + \Delta_l)|^2] + \\ &+ \frac{E}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_V(\Omega) [|\dot{\lambda}(\varepsilon - \Delta_l, \Omega)|^2 - |\dot{\lambda}(\varepsilon + \Delta_l, \Omega)|^2] d\Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

где α_0 — относительный уровень неискажённой части сигнала; $G_V(\Omega)$ — энергетический спектр флуктуаций ФПМ;

$$\dot{\lambda}(\varepsilon - \Delta_l, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}_\Phi(\omega) \dot{\rho}(\varepsilon - \Delta_l, \Omega - \omega) d\omega; \quad \dot{\lambda}(\varepsilon - \Delta_l) = \dot{\lambda}(\varepsilon - \Delta_l, \Omega - \omega);$$

$$\dot{\rho}(\varepsilon - \Delta_l, \Omega - \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_0(t)U_0^*(t, \varepsilon - \Delta_l) e^{j(\Omega - \omega)t} dt.$$

Коэффициент $k_{\text{АРУ}}$ с учётом (2) равен

$$\begin{aligned} k_{\text{АРУ}} &= \overline{\chi_1(\varepsilon, \tau)} + \overline{\chi_2(\varepsilon, \tau)} = \frac{E}{2} \alpha_0^2 [|\dot{\lambda}(\varepsilon - \Delta_l)|^2 + |\dot{\lambda}(\varepsilon + \Delta_l)|^2] + \\ &+ \frac{E}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_V(\Omega) [|\dot{\lambda}(\varepsilon - \Delta_l, \Omega)|^2 + |\dot{\lambda}(\varepsilon + \Delta_l, \Omega)|^2] d\Omega + \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_\Phi^*(\omega) \dot{\lambda}(0, \omega) d\omega. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\overline{\dot{N}(t_1)N^*(t_2)} = 2N_0\delta(t_1 - t_2)$, $\overline{\dot{N}(t_1)\dot{N}(t_2)} = 0$.

Для определения условий отсутствия систематических ошибок измерения проведём анализ выражения для среднего значения выходного сигнала дискриминатора (2). В общем случае это требование выполняется, если $\overline{\chi(0, \tau)} = 0$.

При отсутствии мультипликативной помехи выходной сигнал дискриминатора, очевидно, будет равен

$$\overline{\chi(\varepsilon, \tau)} = \frac{E}{2} \left[|\dot{\lambda}(\varepsilon - \Delta_l)|^2 - |\dot{\lambda}(\varepsilon + \Delta_l)|^2 \right]. \quad (3)$$

Из (3) видно, что при наличии только аддитивной помехи и одинаковых частотных характеристиках фильтров $\dot{g}_\Phi(\omega)$ в обоих каналах дискриминатора смещение оценки (систематическая ошибка измерения) будет отсутствовать ($\overline{\chi(0, \tau)} = 0$) при условии:

$$|\dot{\lambda}(-\Delta_l)|^2 = |\dot{\lambda}(\Delta_l)|^2. \quad (4)$$

Условие (4) выполняется, в частности, если $|\dot{g}_\Phi(\omega)|$ — функция, чётная относительно средней частоты фильтра.

В дальнейшем будем считать, что в дискриминаторе используются именно такие фильтры.

Измерение частоты. Для когерентной последовательности импульсов с комплексной огибающей

$$\dot{U}(t) = \dot{U}_{\text{ор}}(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{U}_1(t - kT_{\text{п}}), \quad (5)$$

где $\dot{U}_{\text{ор}}(t)$, $\dot{U}_1(t)$ — комплексные огибающие пачки импульсов и отдельного импульса, причём $\dot{U}_{\text{ор}}(t)_{\text{max}} = 1$, $|\dot{U}_1(t)|_{\text{max}} = 1$; функция автокорреляции по частоте имеет вид [13]

$$\dot{\rho}(0, \omega) = \frac{Q_c}{T_3 T_{\text{п}}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{W}_1\left(0, \frac{2\pi k}{T_{\text{п}}}\right) \dot{W}_{\text{ор}}\left(0, \omega - \frac{2\pi k}{T_{\text{п}}}\right),$$

где $\dot{W}_1(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}_1(t)|^2 e^{j\omega t} dt$; $\dot{W}_{\text{ор}}(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_{\text{ор}}^2(t) e^{j\omega t} dt$; $T_3 = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{ор}}^2(t) dt$ — эквивалентная длительность квадрата огибающей сигнала (5); $Q_c = T_{\text{п}}/T_1$ — скважность когерентной последовательности импульсов; $T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{U}_1(t)|^2 dt = W_1(0, 0)$ — эквивалентная длительность каждого импульса последовательности.

В предельном случае при увеличении длительности огибающей когерентного сигнала имеем

$$\dot{\rho}(0, \omega) \rightarrow \frac{1}{T_3 T_{\text{п}}} \dot{W}_1(0, \omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T_{\text{п}}}\right).$$

В практике использования когерентных сигналов длительность обрабатываемого сигнала (пачки импульсов) много больше постоянных времени линейных цепей приёмного устройства, т. е. ширина спектра функции $\dot{W}_{\text{ор}}(0, \omega)$ в частотной области намного меньше полосы пропускания фильтров с частотными характеристиками $\dot{g}_\Phi(\omega)$, включённых в линейные цепи дискриминатора.

В этом случае для функции $\dot{\lambda}(\Delta_\omega, \Omega)$ (2) получим

$$\dot{\lambda}(\Delta_\omega, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}_\Phi(\omega) \rho^*(0, \omega - \Delta_\omega - \Delta) d\omega \simeq$$

$$\simeq \frac{Q_c}{T_\vartheta T_\Pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{W}_1\left(0, \frac{2\pi k}{T_\Pi}\right) \dot{g}_\Phi\left(\Omega + \Delta_\omega + \frac{2\pi k}{T_\Pi}\right). \quad (6)$$

Вследствие необходимости однозначного измерения частоты в когерентных системах выполняется соотношение

$$\dot{g}_\Phi\left(\frac{2\pi k}{T_\Pi}\right)\Big|_{k \neq 0} = 0,$$

т. е. полоса пропускания фильтра $\dot{g}_\Phi(\omega)$ много меньше, чем $2\pi/T_\Pi$.

Подставляя (6) в выражение, описывающее отношение крутизны дискриминационной характеристики k_d при одновременном воздействии аддитивных и мультипликативных помех к крутизне дискриминационной характеристики при наличии только аддитивных помех $k_{d,0}$, получим следующее выражение для отношения $k_d/k_{d,0}$:

$$\frac{k_d}{k_{d,0}} = \alpha_0^2 + [2\pi G'_\Phi(-\Delta_\omega)]^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_1^2\left(0, \frac{2\pi k}{T_\Pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} G_V(\Omega) G'_\Phi\left(\Omega - \Delta_\omega + \frac{2\pi k}{T_\Pi}\right) d\Omega, \quad (7)$$

где $G_\Phi(\omega) = |\dot{g}_\Phi(\omega)|^2$, $G'_\Phi(\omega)$ — производная от $G_\Phi(\omega)$ по ω ; $\rho_1(0, \omega) = \dot{W}_1(0, \omega)/\dot{W}_1(0, 0)$ — функция автокорреляции одного импульса когерентной последовательности.

В тех случаях, когда ширина спектра ФПМ превышает величину $1/T_\Pi$, равную интервалу однозначного измерения частоты в когерентно-импульсных системах, и при малом уровне квадрата неискажённой части сигнала α_0^2 за счёт действия мультипликативных помех измерение частоты вообще может оказаться невозможным.

В задачах, представляющих практический интерес, выполняется обратное соотношение $\Delta\Omega_M \ll 2\pi T_\Pi$, т. е. спектральная плотность мощности флюктуационной ФПМ при $|\Omega| > 2\pi/T_\Pi$ пренебрежимо мала.

В дальнейшем будем полагать, что $G_V(2\pi k/T_\Pi)|_{k \neq 0} = 0$. Тогда (7) преобразуется к виду

$$\frac{k_d}{k_{d,0}} = \alpha_0^2 + [2\pi G'_\Phi(-\Delta_\omega)]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G_V(\Omega) G'_\Phi(\Omega - \Delta_\omega) d\Omega. \quad (8)$$

Такое же выражение для функции $k_d/k_{d,0}$ получается и в случае, когда производится измерение частоты непрерывного когерентного сигнала без угловой модуляции.

Определим коэффициенты, учитывающие действие АРУ, в формулах для дисперсии ошибок измерения:

— для одной RC -цепи, одного интегратора:

$$\sigma_l^2 = \sigma_{l,0}^2 \frac{G_\chi}{G_{\chi,0}} \frac{k_{d,0}^2}{k_d^2} \frac{k_{0,ARU}}{k_{ARU}} = \sigma_{l,0}^2 \eta_{m,1}; \quad (9)$$

— для двух интеграторов с коррекцией:

$$\sigma_l^2 = \sigma_{l,0}^2 \frac{G_\chi}{G_{\chi,0}} \frac{k_{d,0}^2}{k_d^2} \frac{1 + (k_{н,ARU}/k_{ARU})(k_d/k_{d,0})}{1 + k_{н,ARU}/k_{0,ARU}} = \sigma_{l,0}^2 \eta_{m,2}; \quad (10)$$

— для двух RC -цепей с коррекцией:

$$\sigma_l^2 = \sigma_{l,0}^2 \frac{G_\chi}{G_{\chi,0}} \frac{k_{д,0}^2}{k_{д}^2} \frac{1 + (k_{н.АРУ}/k_{АРУ})(k_{д}/2k_{д,0})}{1 + k_{н.АРУ}/2k_{0.АРУ}} = \sigma_{l,0}^2 \eta_{л,3}, \quad (11)$$

где G_χ и $G_{\chi,0}$ — спектральная плотность флюктуаций на выходе дискриминатора при расстройке и при нулевой ошибке соответственно; $\sigma_{l,0}^2$ — дисперсия ошибки измерения при отсутствии действия АРУ; $k_{н.АРУ}$ — коэффициент, характеризующий нормирующее действие АРУ при отсутствии аддитивных и мультипликативных помех.

Таким образом, ухудшение точностных характеристик следящего измерителя за счёт действия мультипликативных помех по сравнению со случаем, когда они отсутствуют, может быть оценено коэффициентами $\eta_{л,i}$ при $\sigma_{l,0}^2$ в (9)–(11).

Для вычисления этих коэффициентов достаточно определить характеристики дискриминатора: крутизну дискриминационной характеристики ($k_{д}, k_{д,0}$) и спектральную плотность флюктуаций на выходе дискриминатора ($G_\chi, G_{\chi,0}$), а также коэффициенты, определяющие нормирующее действие АРУ ($k_{АРУ}, k_{0.АРУ}, k_{н.АРУ}$).

Заметим, что номинальная крутизна дискриминатора $k_{д,н}$ определяется как его крутизна в отсутствии аддитивных и мультипликативных помех.

При условии отсутствия систематической ошибки измерения для входящих в (9)–(11) отношений $k_{АРУ}/k_{0.АРУ}$, $k_{АРУ}/k_{н.АРУ}$, $k_{0.АРУ}/k_{н.АРУ}$ имеем (при $\varepsilon = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{k_{АРУ}}{k_{0.АРУ}} &= \left\{ |\dot{\lambda}(\Delta_l)|^2 + \frac{N_0}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\Phi}^*(\Omega) \dot{\lambda}(0, \Omega) d\Omega \right\}^{-1} \times \\ &\times \left[\alpha_0^2 |\dot{\lambda}(\Delta_l)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_V(\Omega) |\dot{\lambda}(\Delta_l, \Omega)|^2 d\Omega + \frac{N_0}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\Phi}^*(\Omega) \dot{\lambda}(0, \Omega) d\Omega \right]; \\ \frac{k_{АРУ}}{k_{н.АРУ}} &= |\dot{\lambda}(\Delta_l)|^{-2} \left[\alpha_0^2 |\dot{\lambda}(\Delta_l)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_V(\Omega) |\dot{\lambda}(\Delta_l, \Omega)|^2 d\Omega + \right. \\ &\left. + \frac{N_0}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\Phi}^*(\Omega) \dot{\lambda}(0, \Omega) d\Omega \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{k_{0.АРУ}}{k_{н.АРУ}} = |\dot{\lambda}(\Delta_l)|^{-2} \left[|\dot{\lambda}(\Delta_l)|^2 + \frac{N_0}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\Phi}^*(\Omega) \dot{\lambda}(0, \Omega) d\Omega \right].$$

Подставляя (6) в (12) при тех же предположениях, при которых получена формула (8), имеем

$$\frac{k_{АРУ}}{k_{0.АРУ}} = \left[G_{\Phi}(\Delta_\omega) + \frac{2N_0 Q_c}{U^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\Phi}(\Omega) d\Omega \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\alpha_0^2 G_\Phi(\Delta\omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_V(\Omega) G_\Phi(\Omega + \Delta\omega) d\Omega + \frac{2N_0 Q_c}{U^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\Phi(\Omega) d\Omega \right]; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_{\text{APY}}}{k_{\text{H.APY}}} = G_\Phi^{-1}(\Delta\omega) & \left[\alpha_0^2 G_\Phi(\Delta\omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_V(\Omega) G_\Phi(\Omega + \Delta\omega) d\Omega + \right. \\ & \left. + \frac{2N_0 Q_c}{U^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\Phi(\omega) d\omega \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{k_{0.\text{APY}}}{k_{\text{H.APY}}} = G_\Phi^{-1}(\Delta\omega) \left[G_\Phi(\omega) + \frac{2N_0 Q_c}{U^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\Phi(\omega) d\omega \right], \quad (15)$$

где учтено, что энергия сигнала E в формулах (12) для рассматриваемого случая равна $U^2 T_3 / 2Q_c$ (U — амплитуда принимаемого сигнала).

Вычислим отношение спектральных плотностей мощности выходного сигнала дискриминатора $G_\chi / G_{\chi.0}$.

Будем полагать, что частотная характеристика фильтров $\dot{g}_\Phi(\omega)$, включённых в оба канала дискриминатора, удовлетворяет соотношениям

$$\dot{g}_\Phi(\omega) = |\dot{g}_\Phi(\omega)| e^{-j\tau_0\omega}; \quad |\dot{g}_\Phi(\omega)| = |\dot{g}_\Phi(-\omega)|; \quad |\dot{g}_\Phi(0)| = 1.$$

Введём следующую нормировку энергетического спектра ФПМ:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_M(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_0^2 \delta(\Omega) + G_V(\Omega)] d\Omega = \alpha_0^2 + \frac{\Delta\Omega_M}{2\pi} G_V(0) = 1,$$

где $G_M(\Omega)$ — энергетический спектр ФПМ; $\delta(\Omega)$ — изменение частоты сигнала, $\Delta\Omega_M$ — эквивалентная ширина спектра флуктуаций ФПМ, что равнозначно предположению о том, что мультипликативные помехи не изменяют мощности принимаемого сигнала. Тогда

$$G_V(0) = \frac{2\pi(1 - \alpha_0^2)}{\Delta\Omega_M}.$$

Обозначим $G_{V0} = G_V(\Omega) / G_V(0)$. Опуская громоздкие выражения, с учётом сказанного для отношения $G_\chi / G_{\chi.0}$ получим

$$\begin{aligned} \frac{G_\chi}{G_{\chi.0}} = & \frac{\alpha_0^2 G_\Phi(\Delta\omega) [1 - G_\Phi^{0,5}(2\Delta\omega)] + \frac{1 - \alpha_0^2}{\Delta\Omega_M} \int_{-\infty}^{\infty} G_{V0}(\Omega) \times}{G_\Phi(\Delta\omega) [1 - G_\Phi^{0,5}(2\Delta\omega)] + \zeta \frac{2N_0}{U^2} Q_c} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{\times \{G_\Phi(\Omega) G_\Phi(\Omega - \Delta\omega) - [G_\Phi(\Omega) G_\Phi(\Omega - \Delta\omega) G_\Phi(\Omega + \Delta\omega) G_\Phi(\Omega + 2\Delta\omega)]^{0,5}\} d\Omega}{+} \end{aligned}$$

$$\zeta \frac{2N_0}{U^2} Q_c + \frac{U^2}{2N_0 Q_c} \frac{(1 - \alpha_0^2)^2}{\Delta\Omega_M^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{V0}^2(\Omega) [G_\Phi^2(\Omega + \Delta_\omega) - G_\Phi(\Omega + \Delta_\omega)G_\Phi(\Omega - \Delta_\omega)] d\Omega + \frac{G_\Phi(\Delta_\omega)[1 - G_\Phi^{0,5}(2\Delta_\omega)] + \zeta \frac{2N_0}{U^2} Q_c}{}, \quad (16)$$

где $\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [G_\Phi^2(\Omega) - G_\Phi(\Omega)G_\Phi^{0,5}(\Omega - 2\Delta_\omega)G_\Phi^{0,5}(\Omega + 2\Delta_\omega)] d\Omega$ — параметр, зависящий от характеристик фильтра измерителя.

Для примера рассмотрим случай, когда спектр флюктуации ФПМ $G_V(\Omega)$ и частотные характеристики фильтров $G_\Phi(\Omega)$ имеют колоколообразную форму:

$$G_\Phi(\Omega) = \exp\left\{-\frac{\pi\Omega^2}{\Delta\Omega_\Phi^2}\right\}; \quad G_{V0}(\Omega) = \exp\left\{-\frac{\pi\Omega^2}{\Delta\Omega_M^2}\right\}, \quad (17)$$

где Δ_Φ — эквивалентная полоса пропускания фильтра.

Подставляя (17) в (8) и (16), получим

$$\frac{k_d}{k_{д.0}} = \alpha_0^2 + \frac{1 - \alpha_0^2}{(1 + \mu^2)^{3/2}} \exp\left\{\pi\nu^2 \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}\right\},$$

$$\frac{G_\chi}{G_{\chi.0}} = \frac{\alpha_0^2 e^{-\pi\nu^2} (1 - e^{-2\pi\nu^2}) + \frac{1 - \alpha_0^2}{\sqrt{1 + 2\mu^2}} (1 - e^{-2\pi\nu^2}) \exp\left\{-\pi\nu^2 \frac{1 + \mu^2}{1 + 2\mu^2}\right\}}{(1 - e^{-2\pi\nu^2}) e^{-\pi\nu^2} + \frac{1}{8q_1^2} (1 - e^{-4\pi\nu^2})} +$$

$$+ \frac{q_1^2 \frac{(1 - \alpha_0^2)^2}{\mu\sqrt{1 + \mu^2}} e^{-2\pi\nu^2} \left[\exp\left\{2\pi\nu^2 \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}\right\} - 1\right] + \frac{1}{8q_1^2} (1 - e^{-4\pi\nu^2})}{(1 - e^{-2\pi\nu^2}) e^{-\pi\nu^2} + \frac{1}{8q_1^2} (1 - e^{-4\pi\nu^2})}, \quad (18)$$

где $\nu = \Delta_\omega/\Delta\Omega_\Phi$ — коэффициент, характеризующий параметры дискриминатора; $\mu = \Delta\Omega_M/\Delta\Omega_\Phi$ — коэффициент, пропорциональный ширине спектра ФПМ и показывающий, во сколько раз постоянная времени линейных цепей дискриминатора больше (меньше) интервала корреляции ФПМ; $q_1^2 = \frac{\pi U^2}{N_0 Q_c \Delta\Omega_\Phi \sqrt{2}}$ — коэффициент, пропорциональный отношению энергии, когерентно накапливаемой в линейных цепях дискриминатора $\pi U^2/Q_c \Delta\Omega_\Phi$, к спектральной плотности мощности аддитивного шума.

Выражение (18) принимает простой вид при $q_1^2 \gg 1$

$$\frac{G_\chi}{G_{\chi.0}} = \alpha_0^2 + \frac{1 - \alpha_0^2}{\sqrt{1 + 2\mu^2}} \exp\left\{\pi\nu^2 \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}\right\} + q_1^2 \frac{(1 - \alpha_0^2)^2}{\mu\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{\exp\left\{2\pi\nu^2 \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}\right\} - 1}{1 - e^{-2\pi\nu^2}} e^{-\pi\nu^2}.$$

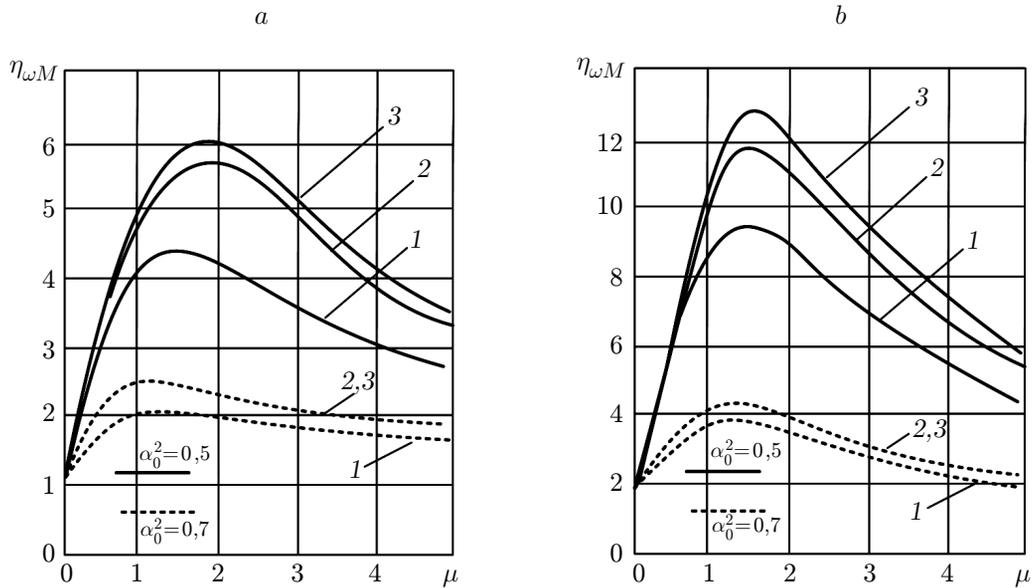


Рис. 2. Зависимости коэффициента $\eta_{\omega M}$ от параметра μ при различных значениях α_0^2 : $q_1^2 = 20$ (а); $q_1^2 = 50$ (б)

Коэффициенты $k_{АРУ}/k_{0.АРУ}$, $k_{АРУ}/k_{н.АРУ}$, $k_{0.АРУ}/k_{н.АРУ}$, определяемые выражениями (13)–(15), в рассматриваемом примере задаются соотношениями

$$\frac{k_{АРУ}}{k_{0.АРУ}} = \left(e^{-\pi\nu^2} + \frac{1}{q_1^2\sqrt{2}} \right)^{-1} \left[\alpha_0^2 e^{-\pi\nu^2} + \frac{1 - \alpha_0^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} \exp \left\{ -\frac{\pi\nu^2}{1 + \mu^2} \right\} + \frac{1}{q_1^2\sqrt{2}} \right];$$

$$\frac{k_{АРУ}}{k_{н.АРУ}} = e^{\pi\nu^2} \left(\alpha_0^2 e^{-\pi\nu^2} + \frac{1 - \alpha_0^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} \exp \left\{ -\frac{\pi\nu^2}{1 + \mu^2} \right\} + \frac{1}{q_1^2\sqrt{2}} \right); \quad (19)$$

$$\frac{k_{0.АРУ}}{k_{н.АРУ}} = e^{\pi\nu^2} \left(e^{-\pi\nu^2} + \frac{1}{q_1^2\sqrt{2}} \right).$$

При очень низком уровне аддитивных помех ($q_1^2 \gg 1$) $k_{0.АРУ} \simeq k_{н.АРУ}$, что приводит к значительному упрощению не только формулы (19), но и формул, определяющих дисперсии ошибок измерения (9)–(11).

На рис. 2 для рассматриваемого случая приведены зависимости коэффициента $\eta_{\omega M} = \sigma_{\omega}^2/\sigma_{\omega,0}^2$, равного отношению дисперсии измерения частоты при наличии мультипликативных и аддитивных помех к дисперсии измерения частоты при наличии только аддитивных помех, от параметра μ при $\nu = 0,5$ и различных значениях параметров α_0^2 и q_1^2 .

Как и следовало ожидать (см. рис. 2), влияние мультипликативных помех тем больше, чем меньше уровень неискажённой части сигнала и чем больше величина q_1^2 , пропорциональная отношению энергии сигнала, когерентно накапливаемого в линейных цепях дискриминатора, к спектральной плотности мощности аддитивной помехи.

Влияние мультипликативных помех наиболее сильно в тех случаях, когда ширина спектра ФПМ соизмерима с полосой пропускания линейных цепей дискриминатора (полосой пропускания фильтров с частотной характеристикой $\dot{g}_\Phi(\omega)$).

Заметим, что отношение $\sigma_{\omega}^2/\sigma_{\omega,0}^2$ меньше для следящих измерителей со сглаживающими цепями в виде одного интегратора или одной RC -цепи (кривые 1), чем при двух

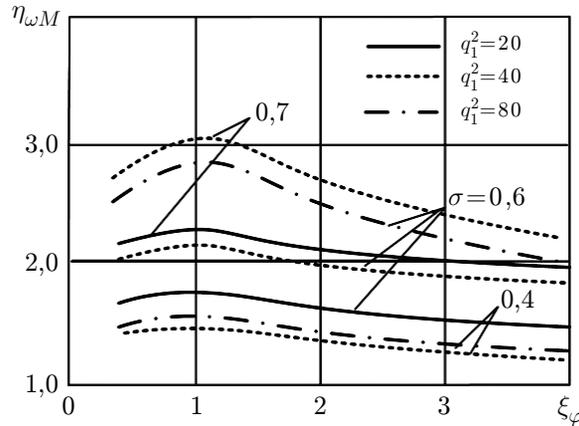


Рис. 3. Зависимости коэффициента $\eta_{\omega M}$ от параметра ξ_φ при различных значениях параметров q_1^2 и σ_φ

интеграторах с коррекцией (кривые 2) или двух RC -цепях с коррекцией (кривые 3), однако первые измерители имеют большие динамические ошибки [12].

Представляет интерес сравнение зависимости коэффициента $\eta_{\omega M}$ от параметров мультипликативных помех для рассмотренного следящего измерителя и неследящего измерителя, приведённого в [14]. Как видно из сравнения рис. 2 и 3 [14], для обоих измерителей указанные зависимости имеют качественно сходный характер.

Параметр q_1 выражается следующим образом через энергию когерентно накапливаемого сигнала и спектральную плотность мощности шума:

$$q_1^2 = \frac{2E}{N_0} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{q^2}{2\sqrt{2}}.$$

Учитывая, что время когерентного накопления сигнала в следящем измерителе T_k примерно равно $2\pi/\Delta\Omega_\phi$, имеем $\mu = \Delta\Omega_M T_k/2\pi$, т. е. параметры μ и $\xi = \Delta\Omega_M T/2\pi$, по существу, совпадают.

Поскольку при малых фазовых искажениях ширина спектра фазовых искажений $\Delta\Omega_\phi$, использовавшаяся в [14], при расчёте функции $\eta_{\omega M}$ примерно равна $\Delta\Omega_M/2$, то имеем следующее приближённое соотношение: $\mu \simeq 2\xi_\varphi$.

При $q_1^2 = 20$, $\alpha_0^2 = 0,7$, $\mu = 2$ для следящих измерителей с различными сглаживающими фильтрами $\eta_{\omega M} = 2 \dots 2,4$. Для следящего измерителя при $q^2 \approx 56$, $\varphi_3 \approx 0,6$, $\xi_\varphi \approx 1$ из рис. 3 [14] имеем $\eta_{\omega M} \approx 2,35$.

Таким образом, при $\nu = 0,5$ даже количественно влияние мультипликативных помех на точность измерения частоты оказывается примерно одинаковым для следящего и неследящего измерителей.

Заключение. Осуществлён анализ влияния мультипликативных помех на фоне белого шума на точность измерения частоты когерентного сигнала, заданного в виде когерентной последовательности импульсов. Приведено условие, необходимое для измерения частоты когерентного сигнала, заключающееся в том, что спектральная плотность мощности флюктуационной функции помеховой модуляции должна быть пренебрежимо мала. Показано, что ухудшение точностных характеристик следящего измерителя определяется крутизной дискриминационной характеристики, коэффициентов, учитывающих нормирующее действие АРУ, и спектральной плотности флюктуаций на выходе дискриминатора. Показано, что влияние мультипликативных помех тем больше, чем меньше уровень неискажённой части сигнала и чем больше отношение энергии сигнала, когерентно накапли-

ваемого в линейных цепях дискриминатора, к спектральной плотности мощности аддитивной помехи. Показано, что влияние мультипликативных помех проявляется наиболее сильно в тех случаях, когда ширина спектра функции помеховой модуляции соизмерима с полосой пропускания линейных цепей дискриминатора. При значении $\nu = 0,5$ коэффициента, характеризующего параметры дискриминатора, влияние мультипликативных помех на точность измерения частоты примерно одинаково для следящего и несledящего измерителей.

Финансирование. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-21-00452, <https://rscf.ru/pro-ject/23-21-00452/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
2. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
3. **Сосулин Ю. Г.** Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978. 320 с.
4. **Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др.** Теория обнаружения сигналов / Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984. 440 с.
5. **Тихонов В. И.** Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
6. **Trees H. L. V., Bell K. L., Tian Z.** Detection, Estimation, and Modulation Theory. 2nd Edition. Pt. I. Detection, Estimation, and Filtering Theory. London: Wiley & Sons, Inc., 2013. 1151 p.
7. **Кремер И. Я., Владимиров В. И., Карпухин В. И.** Модулирующие (мультипликативные) помехи и приём радиосигналов / Под. ред. Кремера И. Я. М.: Сов. радио, 1972. 480 с.
8. **Ширман Я. Д., Манжос В. Н.** Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
9. **Островитянов Р. В., Басалов Ф. А.** Статистическая теория радиолокации протяжённых целей. М.: Радио и связь, 1982. 232 с.
10. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Статистические характеристики сигнала при наличии модулирующей помехи // Автометрия. 2021. **57**, № 2. С. 49–61. DOI: 10.15372/AUT20210206.
11. **Artyushenko V. M., Volovach V. I.** Analysis of Operation of the non-Energy Parameter Meter of the Useful Signal under the Influence of Additive and Multiplicative Noises // Proc. of the Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT). Moscow, Russia, June 9–11, 2022. DOI: 10.1109/MWENT455238.2022/9802276.
12. **Бакут П. А., Большаков И. А., Герасимов Б. М. и др.** Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Тартаковского Г. П. Т. 1. М.: Сов. радио, 1963. 424 с.
13. **Бакулев П. А.** Радиолокация движущихся целей. М.: Сов. радио, 1964. 336 с.
14. **Artyushenko V. M., Volovach V. I.** Accuracy of Measuring the Frequency and Time of Arrival of the Useful Signal in the Presence of Additive and Multiplicative Low Level Noise // Proc. of the XV International IEEE Scientific and Technical Conference. Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). Omsk, Russia, 9–11 Nov., 2021. DOI: 10.1109/Dynamics52735.2021.9653702.

Поступила в редакцию 28.03.2023

После доработки 12.07.2023

Принята к публикации 13.07.2023