УДК 519.7

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© **А. Н. Жирабок**[1, 2], **А. В. Зуев**[1, 2], **А. Е. Шумский**[1]

[1]*Дальневосточный федеральный университет,*
690922, г. Владивосток, Русский остров, п. Аякс, 10
[2]*Институт проблем морских технологий ДВО РАН,*
690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 5
E-mail: zhirabok@mail.ru

Рассматривается задача построения функциональных наблюдателей для динамических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, которые подвержены внешним возмущениям. Приводятся соотношения, позволяющие построить наблюдатель пониженной размерности, нечувствительный к возмущениям, который оценивает заданную функцию вектора состояния. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: нелинейные системы, возмущения, функциональный наблюдатель, модель.

DOI: 10.15372/AUT20230407

Введение. Задача оценки заданной функции вектора состояния динамической системы имеет многочисленные приложения в практике и теории систем. Методам построения функциональных наблюдателей посвящены многочисленные публикации, в которых эта задача решается для различных классов систем: линейных [1–7], нелинейных [8–11], нечётких [12, 13], сингулярных [14, 15], с запаздыванием [16]. Пониженная (по сравнению с исходной системой) размерность таких наблюдателей позволяет упростить их программную реализацию и повысить быстродействие систем обработки информации.

Наиболее интересные приложения функциональных наблюдателей относятся к области построения интервальных [1, 5–7] и диагностических [11, 16] наблюдателей.

Целью данного исследования является разработка метода построения функциональных наблюдателей для систем, описываемых динамическими моделями с негладкими нелинейностями при наличии внешних возмущающих воздействий. В отличие от [8, 11] предлагаемый подход не предполагает линеаризацию нелинейных моделей, что расширяет класс систем, для которых такие наблюдатели могут быть построены. Для решения задачи используется специальный математический аппарат — алгебра функций, разработанная в [17] и использованная для решения различных задач теории систем [18, 19]. Кроме того, применяется так называемый логико-динамический подход, позволяющий при некоторых ограничениях анализировать нелинейные системы методами линейной алгебры [20].

Решение задачи в общем виде. Рассматривается класс систем, описываемый нелинейной динамической моделью

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \rho(t)); \qquad y(t) = h(x(t)), \tag{1}$$

где $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ и $y(t) \in \mathbb{R}^l$ — векторы состояния, управления и выхода; $\rho(t) \in \mathbb{R}^s$ — неизвестная ограниченная функция времени, описывающая возмущение на систему; f и h — нелинейные функции, при этом f может быть негладкой.

Требуется построить функциональный наблюдатель, нечувствительный к возмущению, оценивающий переменную $z(t) \in \mathbb{R}^p$, значения которой определяются выражением $z(t) = \mu(x(t))$ для заданной функции μ. Такой наблюдатель строится на основе редуцированной модели системы (1), нечувствительной к возмущению и описываемой в виде

$$\dot{x}_*(t) = f_*(x_*(t), y(t), z(t), u(t)), \qquad z(t) = h_z(x_*(t), y(t)), \tag{2}$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$ — вектор состояния модели, $k < n$ — её размерность, f_* и h_z — функции, подлежащие определению.

Условия и способы построения модели (2), рассматриваемые далее, опираются на математический аппарат алгебры функций, который детально изложен в [17]. Основные конструкции этого аппарата: отношение частичного порядка $\leqslant$ на множестве функций с областью определения X, бинарные операции $\times$ и $\oplus$, бинарное отношение Λ, а также операторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$. Все они заданы на множестве V_X векторных функций с областью определения X. Рассмотрим эти элементы более подробно.

1. *Отношение частичного предпорядка.* Для произвольных функций $\alpha, \beta \in V_X$ записывается $\alpha \leqslant \beta$, если существует функция γ такая, что $\beta(x) = \gamma(\alpha(x))$ для всех $x \in X$. Определение означает, что каждая компонента функции β может быть выражена через компоненты функции α. Если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$, то функции α и β называются эквивалентными, что обозначается как $\alpha \cong \beta$.

2. *Бинарные операции.* Известно, что для произвольных функций $\alpha, \beta \in V_X$ существуют две бинарные операции $\times$ и $\oplus$, выраженные следующим образом:

$$\alpha \times \beta = \inf(\alpha, \beta), \qquad \alpha \oplus \beta = \sup(\alpha, \beta).$$

Указанные операции определяют функции с точностью до эквивалентности.

Правило вычисления операции $\times$ имеет вид: $(\alpha \times \beta)(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}$. В простейших случаях для вычисления операции $\alpha \oplus \beta$ может быть использовано её определение в виде $\alpha \oplus \beta = \sup(\alpha, \beta)$. Рассмотрим пример вычисления функций $\alpha \times \beta$ и $\alpha \oplus \beta$. Пусть $X = \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \beta(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $(\alpha \times \beta)(x) \cong (x_1 + x_2, x_3, x_1 x_3)^\top$, $(\alpha \oplus \beta)(x) = x_3(x_1 + x_2)$.

3. *Бинарное отношение* Λ. Гладкие функции $\alpha, \beta \in V_X$ образуют пару, если

$$(\alpha, \beta) \in \Lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\alpha}{dx}\,(f(x,u)) = f_*(\beta(x), u)$$

для всех $(x, u) \in X \times U$ и некоторой функции f_*. Бинарное отношение Λ самостоятельного значения не имеет и используется для нахождения операторов.

4. *Операторы* $\mathbf{m}$ *и* $\mathbf{M}$. Для произвольных функций $\alpha, \beta \in V_X$ определим операторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$ следующим образом. Оператор $\mathbf{m}$ задаёт функцию $\mathbf{m}(\alpha) \in V_X$, удовлетворяющую условиям: (i) $(\alpha, \mathbf{m}(\alpha)) \in \boldsymbol{\Lambda}$, (ii) если $(\alpha, \beta) \in \Lambda$, то $\mathbf{m}(\alpha) \leqslant \beta$. Оператор $\mathbf{M}$ задаёт функцию $\mathbf{M}(\beta) \in V_X$, удовлетворяющую условиям: (i) $(\mathbf{M}(\beta), \beta) \in \boldsymbol{\Lambda}$, (ii) если $(\alpha, \beta) \in \Lambda$, то $\alpha \leqslant \mathbf{M}(\beta)$.

Из последних соотношений следует, что для произвольной α выражение $\mathbf{m}(\alpha)$ представляет собой минимальную функцию, формирующую пару с α, и для произвольной β выражение $\mathbf{M}(\beta)$ представляет собой максимальную функцию, формирующую пару с β.

Операторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{M}$ обладают рядом свойств, которые детально описаны в [17], где также можно найти правила вычисления операторов.

Отметим, что модель (2) фактически представляет собой часть системы (1); предполагается, что векторы состояния $x(t)$ и $x_*(t)$ связаны соотношением $x_*(t) = \varphi(x(t))$ для некоторой функции φ. Можно показать, что функция φ удовлетворяет условию [17, 18]

$$\mathbf{m}\,(h_* \times \varphi) \leqslant \varphi, \tag{3}$$

где $h_*(x) = (h \times \mu)(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ \mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$.

Наилучшей является модель, нечувствительная к возмущениям. Для её построения введём минимальную в смысле отношения $\leqslant$ (содержащую максимальное число функционально независимых компонент) функцию α^0 такую, что $\dfrac{d\alpha^0}{dx}\,(f(x,u,\rho))$ не зависит от ρ. Установим семейство функций $\alpha^0 \leqslant \alpha^1 \leqslant \ldots$ следующим образом:

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i \oplus \mathbf{m}(\alpha^i \times h_*), \qquad i = 0, 1, \ldots .$$

Известно [17, 18], что найдётся k, удовлетворяющее условию $\alpha^{k+1} \cong \alpha^k$. Примем, что $\varphi := \alpha^k$.

Теорема [17, 18]. Функция φ является минимальной (содержащей максимальное число функционально независимых компонент), удовлетворяющей условиям (3) и $\alpha^0 \leqslant \varphi$.

Если $\alpha^k = \mathrm{const}$, задача не имеет решения. Преодолеть это затруднение можно путём расширения вектора выхода системы так, чтобы выполнялось условие $\mathbf{m}(\alpha^0 \times h_* \times h') \leqslant \alpha^0$ или $\alpha^0 \times h_* \times h' \leqslant \mathbf{M}(\alpha^0)$, где функция h' представляет дополнительный выход. Тогда $\varphi = \alpha^0$.

Из определения оператора $\mathbf{m}$ и отношения $\leqslant$ следует, что условие (3) эквивалентно существованию функции f_* такой, что

$$f_*((\varphi \times h_*)x(t), u(t)) = \frac{d\varphi}{dx}\, f(x(t), u(t), \rho(t)), \tag{4}$$

а из условия $\alpha^0 \leqslant \varphi$ и определения функции α^0 получаем, что возмущение $\rho(t)$ не оказывает влияния на функцию f_*.

Для построения модели (2) запишем выражение

$$\dot{x}_*(t) = \frac{d\varphi}{dx}\,\dot{x}(t) = \frac{d\varphi}{dx}\, f(x(t), u(t), \rho(t)) \tag{5}$$

и заменим правую часть в (5) левой частью выражения (4), что в итоге даёт искомое описание динамической части модели (2). Далее необходимо выяснить возможность построения статической части модели, заданной в виде $z = h_z(x_*, y)$. Перепишем эту часть с учётом соотношений $x_* = \varphi(x)$ и $y = h(x)$: $\mu(x) = h_z(\varphi(x), h(x))$, откуда по определению отношения $\leqslant$ следует функциональное неравенство

$$\varphi \times h \leqslant \mu. \tag{6}$$

Если для построенной функции φ это условие выполняется, конкретный вид функции h_z находится на основе неравенства (6) и определения отношения $\leqslant$. Этим заканчивается этап построения модели, нечувствительной к возмущению. Невыполнение условия (6) означает, что модель, нечувствительная к возмущению, не существует.

Устойчивость модели может быть обеспечена методами, описанными, например, в [21].

Отметим, что минимальность функции φ создаёт наилучшие условия для выполнения неравенства (6), однако даёт модель максимальной размерности. Для упрощения модели следует найти функцию φ_* такую, что $\varphi \leqslant \varphi_*$, $h_* \times \varphi_* \leqslant \mathbf{M}(\varphi_*)$. Тогда $\alpha^0 \leqslant \varphi_*$ и функция φ_* может быть использована вместо φ для построения более простой модели, нечувствительной к возмущениям.

Решение на основе логико-динамического подхода. Подход на основе алгебры функций даёт общее решение задачи, когда преобразование исходной системы к модели (2) является нелинейным, но требует применения сложного математического аппарата. При ограничении класса функций φ линейными функциями решение может быть получено методами линейной алгебры на основе логико-динамического (ЛД) подхода [20]. Для его применения представим исходную систему в виде

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + L\rho(t), \qquad y(t) = Hx(t). \tag{7}$$

Здесь матрицы F и G описывают линейную динамику, матрица L — вклад возмущения $\rho(t)$, матрица C — вклад нелинейных составляющих, представленных в виде

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1 x, u) \\ \vdots \\ \varphi_q(A_q x, u) \end{pmatrix},$$

где $A_1, \ldots, A_s$ — матрицы-строки; $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — нелинейные (возможно, негладкие) функции. Предполагается, что $z(t) = Mx(t)$ для заданной матрицы M.

Для реализации ЛД-подхода вначале из модели (7) удаляется нелинейный член, далее для полученной линейной системы и дополнительных ограничений строится линейный функциональный наблюдатель, к которому на последнем этапе добавляется преобразованный нелинейный член. Опишем решение на втором этапе, где линейная модель имеет вид

$$\dot{x}_*(t) = F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* y_*(t); \qquad z(t) = H_z x_*(t) + Qy(t). \tag{8}$$

Здесь $y_*(t) = H_* x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $H_* = \begin{pmatrix} H \\ M \end{pmatrix}$, матрицы F_*, G_*, J_*, H_z и Q подлежат определению.

В нелинейном варианте решения предполагалось, что $x_*(t) = \varphi(x(t))$ для некоторой функции φ; в рассматриваемом случае эта функция линейна и зависимость имеет вид $x_*(t) = \Phi x(t)$ для некоторой матрицы Φ, удовлетворяющей уравнениям [20]

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H_*, \qquad G_* = \Phi G. \tag{9}$$

В [22] рассмотрены две канонические формы реализации матрицы F_* — идентификационная и жорданова; было показано, что в непрерывном случае вторая предпочтительнее, поскольку при соответствующем выборе значений собственных чисел этой матрицы она становится устойчивой. Матрица F_* здесь задаётся в виде

$$F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где по предположению собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ задаются разными и отрицательными. Тогда первое уравнение в (9) может быть представлено в виде k независимых уравнений:

$$\Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H_*, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{11}$$

Дополнительное требование $\Phi L = 0$ — нечувствительность к возмущению — учитывается следующим образом. Введём матрицу L_0 максимального ранга такую, что $L_0 L = 0$, тогда $\Phi = N L_0$ для некоторой матрицы N; отметим, что матрица L_0 — это аналог функции α^0. В результате уравнения (11) могут быть записаны в виде

$$(N_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} L_0(F - \lambda_i I_n) \\ H_* \end{pmatrix} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{12}$$

где I_n — единичная матрица.

Поскольку система (7) содержит нелинейный член, а модель (8) — переменную $z(t)$, матрица Φ должна удовлетворять дополнительным ограничениям. Они были получены в [20] и имеют вид

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H_* \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H_* \\ A' \end{pmatrix}; \qquad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ M \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где матрица A' состоит из тех строк матрицы A, номера $j_1, \ldots, j_d$ которых совпадают с номерами ненулевых столбцов произведения ΦC.

После решения уравнения (12) при $\lambda_i < 0$ определяются строки матрицы Φ и проверяются условия (13); при их выполнении из соотношений, полученных в [22]:

$$A' = A_* \begin{pmatrix} \Phi \\ H_* \end{pmatrix}; \qquad M = H_z \Phi + Q H(t) = (H_z \ Q) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \tag{14}$$

рассчитываются матрицы A_*, H_z, Q, G_* и строится модель в форме (8). Если хотя бы одно из условий (13) не выполняется, рекомендуется найти другое решение уравнения (12) или увеличить размерность k. Будем далее полагать, что условия (13) выполняются.

Преобразованный нелинейный член описывается выражением

$$C_* \Psi(x_*, y_*, u) = C_* \begin{pmatrix} \varphi_{j_1}(A_{*j_1} v, u) \\ \cdots \\ \varphi_{j_d}(A_{*j_d} v, u) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $v = (x_*^\top \ y_*^\top)^\top$. Строки $A_{*j_1}, \ldots, A_{*j_d}$ определяются из уравнения $A'_j = A_{*j} \begin{pmatrix} \Phi \\ H_* \end{pmatrix}$, $j = \overline{j_1, j_d}$, соответствующего первому соотношению в (14); нелинейный член (15) добавляется в правую часть модели (8).

Обеспечение устойчивости. Если $C_* = 0$, т. е. модель линейна, её устойчивость гарантируется канонической формой матрицы F_*, в противном случае необходим дополнительный анализ; возможно, в модель необходимо будет ввести обратную связь. Рассмотрим это подробнее, предполагая, что функция $C_*\Psi(x_*, y_*, u)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу x_*, т. е.

$$\|C_*\Psi(x'_*, y_*, u) - C_*\Psi(x''_*, y_*, u)\| \leqslant N_*\|x'_* - x''_*\|, \tag{16}$$

где $N_* > 0$ — некоторая константа. Из устойчивости матрицы F_* следует, что существуют симметрические положительно-определённые матрицы P и W, удовлетворяющие условию

$$F_*^\top P + PF_* = -W. \tag{17}$$

Введём ошибку $e(t) = \Phi x(t) - x_*(t)$ и с учётом соотношений (9) запишем и преобразуем уравнение для неё:

$$\dot{e}(t) = \Phi(Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) -$$

$$-(F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y_*(t) + C_*\Psi(x_*(t), y_*(t), u(t)) = F_*e(t) + \Delta\Psi(t),$$

где

$$\Delta\Psi(t) = \Phi C\Psi(x(t), u(t)) - C_*\Psi(x_*(t), y_*(t), u(t)) =$$

$$= C_*\Psi(\Phi x(t), y_*(t), u(t)) - C_*\Psi(x_*(t), y_*(t), u(t)).$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(t) = e^\top(t)Pe(t)$ и с учётом (16) и (17) найдём её производную:

$$\dot{V}(t) = (F_{**}e(t) + \Delta\Psi(t))^\top Pe(t) + e^\top(t)P(F_{**}e(t) + \Delta\Psi(t)) =$$

$$= e^\top(t)(F_{**}^\top P + PF_{**})e(t) + 2e^\top(t)P\Delta\Psi(t) = -e^\top(t)We(t) + 2e^\top(t)P\Delta\Psi(t) \leqslant$$

$$\leqslant -\|e(t)\|^2\lambda_{\min}(W) + 2\|e^\top(t)P\Delta\Psi(t)\| \leqslant -\|e(t)\|^2\lambda_{\min}(W) + 2\|e(t)\|^2\lambda_{\max}(P)N_*,$$

где $\lambda_{\min}(W)$ и $\lambda_{\max}(P)$ — минимальное и максимальное собственные числа матриц W и P соответственно. Из последнего выражения ясно, что если $\lambda_{\min}(W) > 2N_*\lambda_{\max}(P)$, то $\dot{V}(t) < 0$, т. е. наблюдатель устойчив и вводить обратную связь нет необходимости. Отметим, что такой подход был рассмотрен в [21].

Подобный вывод может быть сделан, если ошибка $e(t)$ мала, функция $C_*\Psi(x_*, y_*, u)$ дифференцируема по аргументу x_* и может быть разложена в ряд Тейлора относительно его текущего значения. Доказательство проведено в [23], поэтому, не повторяясь, отметим только, что если собственные числа матрицы

$$F_e(x_*, y_*, u) = F_* + C_*\begin{pmatrix} (\partial\varphi_{j_1}(x_*, y_*, u)/\partial x_*)A^1_{*j_1} \\ \dots \\ (\partial\varphi_{j_d}(x_*, y_*, u)/\partial x_*)A^1_{*j_d} \end{pmatrix}$$

лежат в левой полуплоскости, нелинейная модель устойчива; здесь $A^1_{*j_1}, \dots, A^1_{*j_d}$ — это части матриц $A_{*j_1}, \dots, A_{*j_d}$, соответствующие переменной $x_*(t)$. В противном случае необходимо ввести обратную связь по сигналу невязки $r(t) = R_r y(t) - y_r(t)$, где R_r — матрица, удовлетворяющая условию $R_r H = H_r\Phi$ для некоторой матрицы H_r, $y_r(t) = H_r x_*(t)$[20].

Найти эти матрицы можно из уравнения $(H_r \ -R_r)\begin{pmatrix}\Phi\\ H\end{pmatrix} = 0$, для существования решения которого может потребоваться увеличение размерности модели. Когда матрицы R_r и H_r найдены, в нелинейную модель вводится обратная связь $Kr(t)$:

$$\dot{x}_*(t) = F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y_*(t) + C_*\Psi(x_*(t), y_*(t), u(t)) + Kr(t),$$

в результате чего уравнение для ошибки принимает вид

$$\dot{e}(t) = \left(F_* - KH_r + C_*\begin{pmatrix}(\partial\varphi_{j_1}(x_*, y_*, u)/\partial x_*)A^1_{*j_1}\\ \cdots\\ (\partial\varphi_{j_d}(x_*, y_*, u)/\partial x_*)A^1_{*j_d}\end{pmatrix}\right)e(t),$$

из которого следует, что элементы матрицы обратной связи K в этом случае будут зависеть от переменных $x_*(t)$, $y_*(t)$, $u(t)$. Метод определения этих элементов рассмотрен в [23].

Пример. Рассмотрим модель нагруженного электропривода, управляющего одной степенью подвижности многозвенного манипулятора, представленную уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= k_1x_2(t) + \rho(t);\\ \dot{x}_2(t) &= k_2x_2(t) + k_3x_3(t) + k_7\,\mathrm{sign}\,(x_2(t));\\ \dot{x}_3(t) &= k_4x_2(t) + k_5x_3(t) + k_6u(t),\end{aligned}\tag{18}$$

где $x_1(t)$ — угол поворота выходного вала редуктора, $x_2(t)$ — скорость вращения ротора электродвигателя, $x_3(t)$ — ток якоря, $u(t)$ — напряжение на входе усилителя мощности, k_1–k_6 — коэффициенты, определяемые параметрами электропривода.

Предполагается, что $y_1(t) = x_1(t)$, $y_2(t) = x_3(t)$, т. е. $h(x) = x_1 \times x_3$. Построим наблюдатель, оценивающий переменную $x_2(t)$, т. е. $\mu(x) = x_2$. Вычислим функции $h_*(x) = (h \times \mu)(x) = x_1 \times x_3 \times x_2 = \mathbf{0}$, $\alpha^0(x) = x_2 \times x_3$. Поскольку $(\alpha^0 \times h_*)(x) = x_2 \times x_3 \times x_1 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{m}\,(\alpha^0 \times \mathrm{h}_*) = \mathbf{0}$, что даёт $\varphi(x) = \alpha^1(x) = \alpha^0(x) = x_2 \times x_3$. Нетрудно видеть, что условие (6) выполняется.

Функция $\varphi(x)$ даёт наблюдатель размерности 2, но так как её вторая компонента совпадает с наблюдаемым выходом $y_2(t)$, из наблюдателя её можно удалить, что даёт более простую модель с $\varphi_*(x(t)) = x_*(t) = x_2(t)$:

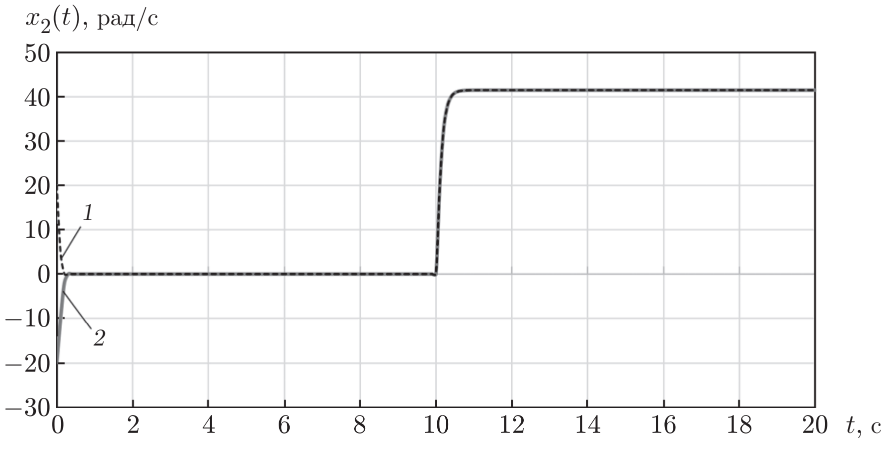
$$\dot{x}_*(t) = k_2x_*(t) + k_2y_2(t) + k_7\,\mathrm{sign}\,(x_*(t)); \qquad z(t) = x_*(t).\tag{19}$$

Можно проверить, что модель устойчива и может быть использована как наблюдатель, так как по определению $k_2 < 0$.

Для применения ЛД-подхода приведём матрицы и нелинейности, описывающие электропривод (18):

$$F = \begin{pmatrix}0 & k_1 & 0\\ 0 & k_2 & k_3\\ 0 & k_4 & k_5\end{pmatrix},\quad G = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ k_6\end{pmatrix},\quad H = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix}0\\ k_7\\ 0\end{pmatrix},\quad L = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\varphi(x, u) = \mathrm{sign}\,(Ax(t)), \qquad A = (0\ 1\ 0).$$



Результаты моделирования

Нетрудно видеть, что

$$M = (0\ 1\ 0), \qquad H_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (12) имеет решение при $\lambda = k_2$: $N = (1\ 0)$, $J_* = (0\ k_3\ 0)$, что даёт $\Phi = NL_0 = (0\ 1\ 0)$. Можно проверить, что условия в (13) выполняются, уравнения (9) и (14) с $A' = A$ дают матрицы $G_* = (0)$, $C_* = k_7$, $A_* = (1\ 0\ 0\ 0)$, $H_z = 1$, $Q = 0$. Линейная модель имеет вид

$$\dot{x}_*(t) = k_2 x_*(t) + k_3 y_2(t), \qquad z(t) = x_*(t);$$

нелинейный член описывается выражением $C_*\Psi(x_*(t)) = k_7 \operatorname{sign}(x_*(t))$. После подстановки этого члена в линейную модель получаем модель (19).

При моделировании были использованы следующие параметры привода: $k_1 = 1/i$, $k_2 = -k_{\text{в}}/J$, $k_3 = k_{\text{м}}/J$, $k_4 = -k_\omega/L$, $k_5 = -R/L$, $k_6 = k_{\text{у}}/L$, $k_7 = M_{\text{ст}}/J$, где $R = 0{,}5$ Ом — активное сопротивление якоря двигателя; $L = 0{,}01$ Гн — индуктивность якоря двигателя; $k_{\text{м}} = 0{,}04$ Нм/А; $k_\omega = 0{,}04$ Вс — коэффициент противоЭДС; $k_{\text{у}} = 1$ — коэффициент усиления; $J = 10^{-3}$ кг/м^2 — момент инерции ротора электродвигателя и вращающихся частей редуктора, приведённый к этому ротору; $i = 100$ — передаточное отношение редуктора, $k_{\text{в}} = 0{,}005$ Нм/с — коэффициент вязкого трения; $M_{\text{ст}} = 0{,}06$ Н — величина момента сухого трения (рисунок). Приняты следующие начальные условия: $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_2(0) = 20$, $z(t) = -20$. Символом *1* обозначено поведение переменной $x_2(t)$, символом *2* — поведение переменной $z(t)$.

Заключение. В данной работе рассмотрена задача построения функциональных наблюдателей для технических систем, описываемых нелинейными моделями в условиях действия внешних возмущений. Предложены два способа решения: на основе алгебры функций, позволяющей получить общее решение, и логико-динамического подхода, дающего решение нелинейных задач методами линейной алгебры. Получены расчётные соотношения, позволяющие построить наблюдатели, нечувствительные к возмущениям. Теоретические результаты иллюстрированы примером реальной системы. Функциональные наблюдатели могут быть использованы при решении различных задач в линейных

[5] и нелинейных [9] системах для обнаружения и локализации дефектов [11], а также для решения задач оптимального управления различными объектами [24, 25].

Финансирование. Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 22-29-01303, https://rscf.ru/project/22-29-01303/).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Angulo M., Moreno J., Fridman L.** On functional observers for linear systems with unknown inputs and HOSM differentiators // Journ. Frankl. Inst. 2014. **351**, N 4. P. 1982–1994.
2. **Chen W., Li D., Lu X.** Impulsive functional observers for linear systems // Int. Journ. Control Automation and Systems. 2011. **9**, N 5. P. 987–992.
3. **Darouach M.** Linear functional observers for systems with delays in State variables: The discrete-time case // IEEE Trans. Automatic Control. 2005. **50**, N 2. P. 228–233.
4. **Deng H., Li H.** Functional observers for linear systems with unknown inputs // Asian Journ. Control. 2004. **6**, N 4. P. 462–468.
5. **Gu D., Liu L., Duan G.** Functional interval observer for the linear systems with disturbances // IET Control Theory and Applications. 2018. **12**, N 18. P. 2562–2568.
6. **Liu L., Xie W., Khan A., Zhang L.** Finite-time functional interval observer for linear systems with uncertainties // IET Control Theory and Applications. 2020. **14**, N 18. P. 2868–2878.
7. **Meyer L.** Robust functional interval observer for multivariable linear systems // Journ. Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2019. **141**, N 9. 094502.
8. **Kravaris C., Venkateswaran S.** Functional observers with linear error dynamics for nonlinear systems // Systems Control Lett. 2021. **157**. P. 105021.
9. **Liu L., Shang Y., Di Y.** Impulsive functional observer design for fractional-order nonlinear systems satisfying incremental quadratic constraints // Circuits Syst. Signal Process. 2022. **41**, N 6. P. 3130–3152.
10. **Trinh H., Fernando T.** Functional Observers for Dynamical Systems. Berlin—Heidelberg: Springer, 2012. 219 p.
11. **Venkateswaran S., Liu Q., Kravaris C.** Design of linear residual generators for fault detection and isolation in nonlinear systems // Int. Journ. Control. 2022. **95**, Iss. 3. P. 804–820.
12. **Islam S., Lim C., Shi P.** Existence of fuzzy functional observer of Takagi-Sugeno fuzzy model // Proc. of the Australian Control Conf. (AuCC 2016). Newcastle, Australia, 03-04 Nov., 2016. P. 353–357.
13. **Islam S. I., Lim C. C., Shi P.** Functional observer-based fuzzy controller design for continuous nonlinear systems // Int. Journ. Systems Science. 2018. **49**, Iss. 5. P. 1047–1060.
14. **Hamzaoui F., Khadhraoui M., Messaoud H.** A new functional observer design of delayed singular systems in discrete-time and frequency domains // Proc. of the Int. Conf. on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD 2020). Paris, France, 7-9 Oct., 2020. 6 p.
15. **Khadhraoui M., Messaoud H.** Design of a functional observer for non-linear singular delayed systems // Proc. of the Int. Conf. on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD 2020). Paris, France, 7-9 Oct., 2020. 7 p.
16. **Islam S., Lim C., Shi P.** Robust fault detection of T-S fuzzy systems with time-delay using fuzzy functional observer // Fuzzy Sets Syst. 2020. **392**. P. 1–23.
17. **Жирабок А. Н., Шумский А. Е.** Алгебраические методы анализа нелинейных динамических систем. Владивосток: Дальнаука, 2008. 231 с.
18. **Kaldmäe A., Kotta Ü., Shumsky A., Zhirabok A.** Measurement feedback disturbance decoupling in discrete-time nonlinear systems // Automatica. 2013. **49**, N 9. P. 2887–2891.

19. **Kaldmäe A., Kotta Ü., Jiang B. et al.** Faulty plant reconfiguration based on disturbance decoupling methods // Asian Journ. Control. 2016. **18**, Iss. 3. P. 858–867.

20. **Жирабок А. Н., Шумский А. Е., Соляник С. П., Суворов В. Ю.** Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // АиТ. 2017. № 9. С. 34–48.

21. **Misawa E., Hedrick J.** Nonlinear observers — a state of the art. Survey // Journ. Dynamic Systems, Measurements and Control. 1989. **111**. P. 344–352.

22. **Жирабок А. Н., Зуев А. В., Филаретов В. Ф. и др.** Каноническая форма Жордана в задачах диагностирования и оценивания // АиТ. 2022. № 9. С. 49–67.

23. **Жирабок А. Н., Ким Чхун Ир.** Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования нелинейных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 1. С. 40–48.

24. **Котов К. Ю., Мальцев А. С., Нестеров А. А., Ян А. П.** Алгоритмы и архитектура системы управления траекторным движением мультироторного летательного аппарата // Автометрия. 2020. **56**, № 3. С. 20–28. DOI: 10.15372/AUT20200303.

25. **Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.** Оптимальное управление подвижными объектами технологической теплофизики // Автометрия. 2022. **58**, № 4. С. 3–19. DOI: 10.15372/AUT20220401.

Поступила в редакцию 31.01.2023
После доработки 16.02.2023
Принята к публикации 14.03.2023