

УДК 681.515.8

## СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА В ВИДЕ ДВОЙНОГО ПЕРЕВЁРНУТОГО МАЯТНИКА НА ТЕЛЕЖКЕ

© О. А. Вотрина, Г. А. Французова, Д. С. Худяков

*Новосибирский государственный технический университет,  
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: frants@ac.cs.nstu.ru*

Обсуждается возможность применения алгоритма стабилизации для линеаризованной системы Двойной перевёрнутый маятник на тележке посредством метода локализации. В целях упрощения процедуры расчёта регулятора предлагается предварительно преобразовать описание объекта к каноническому базису и сформировать алгоритм управления в виде функции канонических переменных. Путём обратного преобразования переменных описание регулятора представляется в исходном базисе, что позволяет дать рекомендации по его физической реализации. Поскольку только часть внутренних переменных объекта доступна для непосредственного измерения, то для создания регулятора необходимо получить оценку оставшихся переменных. С этой целью предлагается применить три одно-типных дифференцирующих устройства, что позволяет оценить полный вектор состояния. Показано, что рассчитанный регулятор обеспечивает стабилизацию маятника в верхнем положении при малом отклонении угла от вертикали. Основные свойства синтезированной системы иллюстрируют результаты моделирования в интегрированной среде MATLAB Simulink.

*Ключевые слова:* двойной перевёрнутый маятник на тележке, стабилизация, метод локализации, синтез регулятора, фильтр оценки состояния.

DOI: 10.15372/AUT20220410

**Введение.** Современные исследования, рассматривающие стабилизацию различных моделей, затрагивают большой класс маятниковых систем [1–3]. Такого рода объекты в основном неустойчивы и подвержены влиянию внешних возмущений, что приводит к колебательному характеру переходных процессов, которые отражают динамические свойства. К подобным системам относится двойной перевёрнутый маятник на тележке, стабилизация которого входит в перечень классических задач теории управления [3–5]. На примере данного объекта проводятся исследования различных техник и способов стабилизации маятниковых систем, которые в дальнейшем распространяются на широкий класс нелинейных объектов [6].

Заметим, что задача стабилизации модельного объекта в виде двойного перевёрнутого маятника на тележке является актуальной, так как данная модель характерна для ряда технических устройств, используется во многих разработках и научных исследованиях [7–10]. Так, например, в отрасли, связанной с разработками по покорению космоса, модель перевёрнутого маятника применяется для описания ракеты в момент отрыва от Земли [11], а солнечные батареи искусственных космических летательных аппаратов соответствуют модели двойного перевёрнутого маятника [12].

На сегодняшний день существует несколько различных подходов к решению задачи стабилизации двойного перевёрнутого маятника в верхнем положении [13, 14]. Так, в работе [15] рассмотрен способ организации скользящего режима и релейного управления для стабилизации двойного перевёрнутого маятника на тележке. Недостатком такого подхода являются постоянные переключения управления, что негативно влияет на исполнительные механизмы, задействованные при стабилизации объекта.

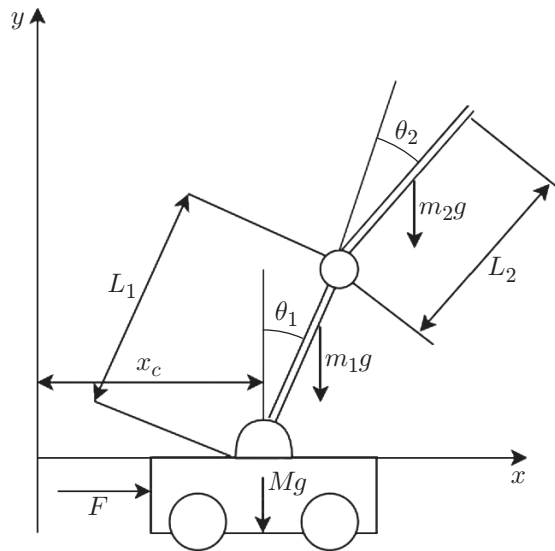


Рис. 1. Двойной перевёрнутый маятник на тележке

Цель данной работы — исследование возможности применения непрерывного регулятора, основанного на методе локализации [16], для стабилизации двойного перевёрнутого маятника на тележке. Основная идея метода заключается в использовании в обратной связи вектора скорости изменения переменных состояния или старшей производной выходной переменной, что позволяет получить косвенную оценку текущей информации о нелинейных характеристиках объекта и действующих на него внешних возмущений [17].

**Постановка задачи.** Рассмотрим маятниковую систему (рис. 1), которая состоит из балансирующей тележки и двух маятников [13], один из которых закреплён на тележке, а другой соединён с первым перевёрнутым маятником.

Здесь приняты обозначения:  $\theta_1$  — угол отклонения первого маятника,  $\theta_2$  — угол между первым и вторым маятником,  $F$  — прикладываемая управляющим двигателем сила,  $x_c$  — перемещение тележки,  $m_1$  — масса первого маятника,  $m_2$  — масса второго маятника,  $M$  — масса тележки,  $L_1$  — длина первого маятника,  $L_2$  — длина второго маятника,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Математическая модель объекта, полученная с помощью уравнений Лагранжа [13], имеет вид

$$\begin{cases} h_1 \ddot{x}_c + h_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + h_3 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) - h_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - \\ - h_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = h_{10} U - h_9 \dot{x}_c; \\ h_2 \ddot{x}_c \cos \theta_1 + h_4 \ddot{\theta}_1 + h_5 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - h_5 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin \theta_2 - h_6 \sin \theta_1 = 0; \\ h_3 \ddot{x}_c \cos(\theta_1 + \theta_2) + h_7 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + h_5 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + h_5 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 - h_8 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $h_1 = M + m_1 + m_2$ ;  $h_2 = m_1 l_1 + m_2 L_1$ ;  $h_3 = m_2 l_2$ ;  $h_4 = m_2 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_1$ ;  $h_5 = m_2 l_2 L_1$ ;  $h_6 = m_1 l_1 g + m_2 L_1 g$ ;  $h_7 = m_2 l_2^2 + J_2$ ;  $h_8 = m_2 l_2 g$ ;  $h_9 = K_m^2 K_g^2 / (r^2 R_a)$ ;  $h_{10} = K_m K_g / (r R_a)$ ;  $l_1$  — расстояние от центра масс до первого маятника;  $l_2$  — расстояние от центра масс до второго маятника;  $J_1$  — момент инерции первого маятника;  $J_2$  — момент инерции второго маятника;  $U$  — ограниченное управляющее напряжение,  $|U| \leq U_m$ ;  $K_m$  — крутящий момент двигателя;  $K_g$  — передаточное число;  $r$  — радиус выходной передачи;  $R_a$  — сопротивление обмотки статора двигателя;  $\dot{x}_c$  — линейная скорость тележки.

Предполагается, что в начальный момент времени маятниковая система находится в некоторой малой окрестности положения равновесия, т. е.  $|\theta_i(0)| \leq \theta_i^*$ ,  $i = 1, 2$ , а угловая скорость удовлетворяет условию  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ .

Необходимо обеспечить стабилизацию двойного перевернутого маятника в верхнем вертикальном положении за заданное время  $t_n$  при малом отклонении угла от вертикали ( $\theta_i^* \leq 5^\circ$ ), что соответствует локальной стабилизации системы (1).

**Преобразование модели объекта.** Процедуру расчёта системы стабилизации будем рассматривать для линеаризованного объекта и с этой целью используем разложение в ряд Фурье. В результате при малом отклонении маятников от вертикали получим линеаризованную модель [15]

$$\begin{cases} h_1\ddot{x}_c + h_9\dot{x}_c + h_2\ddot{\theta}_1 + h_3\dot{\theta}_1 + h_3\ddot{\theta}_2 = h_{10}U; \\ h_2\ddot{x}_c + h_4\ddot{\theta}_1 + h_5\dot{\theta}_1 - h_6\theta_1 + h_5\ddot{\theta}_2 = 0; \\ h_3\ddot{x}_c + h_5\ddot{\theta}_1 + h_7\dot{\theta}_1 - h_8\theta_1 + h_7\ddot{\theta}_2 - h_8\theta_2 = 0, \end{cases}$$

которую с учётом введённых переменных состояния ( $x_1 = x_c$ ,  $x_2 = \dot{x}_c$ ,  $x_3 = \theta_1$ ,  $x_4 = \dot{\theta}_1$ ,  $x_5 = \theta_2$ ,  $x_6 = \dot{\theta}_2$ ) представим в векторно-матричной форме

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU; \\ y = CX, \end{cases} \quad (2)$$

где  $X \in \mathbb{R}^6$  — вектор состояния;  $U \in \mathbb{R}^1$  — скалярное управляющее воздействие;  $y \in \mathbb{R}^3$  — вектор выходных переменных. Матрицы в описании (2) имеют следующий вид:

$$A = H^{-1}\tilde{A}; \quad B = H^{-1}\tilde{B}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = (h_1h_4h_7 - h_1h_5^2 - h_2^2h_7 - 2h_2h_3h_5 - h_3^2h_4),$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (h_4h_7 - h_5^2)h_9 & (h_3h_5 - h_2h_7)h_6 + (h_2h_5 - h_3h_4)(h_8 - h_9) & 0 & (-h_2h_5 + h_3h_4)h_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (h_2h_5 - h_3h_4)h_8 & (h_1h_7 - h_3^2)h_6 + 2(h_2h_3 - h_1h_5)h_8 & 0 & (h_2h_3 - h_1h_5)h_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (h_2h_5 - h_3h_4)h_9 & [h_3(h_2 + h_3) - h_1(h_5 + h_7)]h_6 + 2h_1(h_4 + h_5) - 2h_2(h_2 + h_3)h_8 & 0 & [h_1(h_4 + h_5) - h_2(h_2 + h_3)]h_8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = [0 \quad (h_4h_7 - h_5^2)h_{10} \quad 0 \quad (h_3h_5 - h_2h_7)h_{10} \quad 0 \quad [h_5(h_2 - h_3) - h_3h_4 + h_2h_7]h_{10}]^T.$$

Следующим этапом является представление модели (2) в канонической форме Коши с помощью преобразования переменных:  $X = TX^*$ , где  $X^* \in \mathbb{R}^6$  — вектор состояния

объекта в каноническом базисе;  $T$  — невырожденная матрица преобразования, которая формируется по известному правилу [15, 18]. В результате модель (2) в развёрнутой форме принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = x_2^*; \\ \dot{x}_2^* = x_3^*; \\ \dot{x}_3^* = x_4^*; \\ \dot{x}_4^* = x_5^*; \\ \dot{x}_5^* = x_6^*; \\ \dot{x}_6^* = -a_0x_1^* - a_1x_2^* - a_2x_3^* - a_3x_4^* - a_4x_5^* - a_5x_6^* + bU, \end{cases} \quad (3)$$

где  $a_i$  — коэффициенты канонической формы ( $i = \overline{0, 5}$ ),  $b = 1$ .

**Синтез регулятора на основе метода локализации.** Представление модели перевернутого маятника на тележке в виде (3) позволяет существенно упростить процедуру аналитического формирования требований к синтезируемой системе стабилизации, которая должна обеспечивать удержание маятников в вертикальном положении с одновременной стабилизацией каретки в ограниченном диапазоне перемещений при выполнении требований по быстродействию и точности. В соответствии с методом локализации [16, 17] на основе требований к системе сформируем для неё желаемое дифференциальное уравнение того же порядка, что и порядок объекта. Отметим, что требования к качеству процессов в системе, как правило, можно обеспечить в классе линейных дифференциальных уравнений. При этом рекомендуется сначала записать желаемое характеристическое уравнение на основе корневых оценок качества процессов [17], а затем представить желаемое уравнение в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = x_2^*; \\ \dot{x}_2^* = x_3^*; \\ \dot{x}_3^* = x_4^*; \\ \dot{x}_4^* = x_5^*; \\ \dot{x}_5^* = x_6^*; \\ \dot{x}_6^* = F^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_6^*, v) = -c_1^*x_1^* - c_2^*x_2^* - c_3^*x_3^* - c_4^*x_4^* - c_5^*x_5^* - c_6^*x_6^* + c_1^*v, \end{cases} \quad (4)$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{X}^* = C^*X^* + D^*v, \quad (5)$$

где  $v \in \mathbb{R}^1$  — входное воздействие на замкнутую систему.

С учётом (4) в каноническом базисе закон управления будет иметь вид

$$U^* = k[F^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_6^*, v) - \dot{x}_6^*], \quad (6)$$

где  $k$  — коэффициент регулятора. Наличие производной  $\dot{x}_6^*$  в законе управления позволяет в неявной форме иметь полную текущую информацию об объекте (3), что является характерной особенностью метода локализации [17].

Если теперь в модель (3) вместо управления подставить его значение (6), то получим следующее описание замкнутой системы в канонической форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = x_2^*; \\ \dot{x}_2^* = x_3^*; \\ \dot{x}_3^* = x_4^*; \\ \dot{x}_4^* = x_5^*; \\ \dot{x}_5^* = x_6^*; \\ \dot{x}_6^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_6^*) + bk[F^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_6^*, v) - \dot{x}_6^*]. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь используется обозначение  $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_6^*) = -\sum_{i=0}^5 a_i x_i^*$ . Последнее уравнение в (7) преобразуем к виду

$$\dot{x}_6^* = \frac{1}{1+bk} f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_6^*) + \frac{bk}{1+bk} F^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_6^*, v). \quad (8)$$

Отсюда следует, что в асимптотике при  $k \rightarrow \infty$  уравнение (8) вырождается в (4), т. е. динамика системы в каноническом базисе полностью соответствует желаемому дифференциальному уравнению. При этом коэффициент регулятора  $k$  следует выбирать в зависимости от требований точности обеспечения желаемых свойств по известным соотношениям [16, 17].

Следующий этап синтеза регулятора предполагает переход от его описания (6) к представлению в исходном базисе. Для этого прежде всего необходимо в исходном базисе представить желаемое дифференциальное уравнение (5). С этой целью используем обратную матрицу преобразования  $T^{-1}$  и замену переменных  $X^* = T^{-1}X$ . В результате желаемое уравнение в исходном базисе принимает форму

$$\dot{X} = CX + Dv = F(X, v) \quad (9)$$

с матрицами  $C = TC^*T^{-1}$ ,  $D = TD^*$ .

С учётом представления (9) получим следующее управляющее воздействие для исходных переменных

$$U = K[F(X, v) - \dot{X}], \quad (10)$$

где  $K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6]$  — вектор-строка коэффициентов, каждый из которых определяется по аналогичным скалярному коэффициенту  $k$  соотношениям [16, 17].

**Рекомендации по реализации регулятора.** Характерной особенностью объекта (2) является наличие трёх измеряемых выходных переменных, совпадающих с частью переменных состояния, а именно:  $y_1 = x_1 = x_c$ ,  $y_2 = x_3 = \theta_1$  и  $y_3 = x_5 = \theta_2$ . Остальные переменные состояния в уравнении (10) представляют собой их первые производные. Следовательно, для реализации регулятора (10) необходимо получить оценки соответствующих производных измеряемых переменных.

С этой целью предлагается использовать однотипные линейные дифференцирующие устройства, так называемые дифференцирующие фильтры [17], переходные процессы в которых должны заканчиваться существенно быстрее, чем основные процессы системы. Передаточные функции дифференцирующих фильтров имеют вид

$$W_{f_i}(s) = \frac{\dot{y}_i}{y_i} = \frac{s}{\mu^2 s^2 + 2d\mu s + 1}. \quad (11)$$

Здесь  $\dot{y}_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , — оценка соответствующей производной выходной переменной;  $d$  — коэффициент демпфирования;  $\mu$  — малая постоянная времени, которая определяет длительность процессов фильтра. Заметим, что использование дифференцирующих устройств (11) позволяет одновременно отфильтровывать высокочастотные помехи измерения выходных сигналов. Такие фильтры дают возможность получить следующие оценки недостающих переменных состояния:  $\hat{x}_2 = \dot{y}_1$ ,  $\hat{x}_4 = \dot{y}_2$  и  $\hat{x}_6 = \dot{y}_3$ . В результате закон управления (10) принимает окончательный вид

$$U = K[F(\hat{X}, v) - \dot{\hat{X}}], \quad (12)$$

который можно реализовать для обеспечения стабилизации рассматриваемой маятниковой системы.

**Пример расчёта системы.** Рассмотрим следующую модель объекта в исходном базисе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -2,2048x_2 - 2,9159x_3 - 0,1162x_5 + 1,3942U; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = 3,5505x_2 + 20,4931x_3 - 1,3134x_5 - 2,2452U; \\ \dot{x}_5 = x_6; \\ \dot{x}_6 = -1,997x_2 - 11,5419x_3 + 24,0840x_5 + 1,2645U; \\ y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_5. \end{cases}$$

Необходимо стабилизировать маятник в верхнем положении из заданной окрестности  $|\theta_i(0)| \leq 5^\circ$  ( $i = 1, 2$ ) за время  $t_n \leq 1,5$  с. В соответствии с этими требованиями выберем распределение корней системы:  $\lambda_1 = -4,2$ ;  $\lambda_2 = -4,3$ ;  $\lambda_{3,4} = -6 \pm j6$ ;  $\lambda_{5,6} = -6,5 \pm j7$ , на основании которого формируем желаемое дифференциальное уравнение в каноническом базисе:

$$\begin{cases} \dot{x}_i^* = x_{i+1}^*, \quad i = \overline{1, 5}; \\ \dot{x}_6^* = -33,5x_6^* - 549,81x_5^* - 5196,13x_4^* - 29\,599,15x_3^* - \\ - 92\,524,86x_2^* - 118654,2x_1^* + 118\,654,2v. \end{cases}$$

Для перехода к исходному базису определим характеристическое уравнение объекта

$$A(p) = p^6 + 2,205p^5 - 44,577p^3 - 88,163p^2 + 478,394p + 813,091 = 0,$$

с учётом коэффициентов которого составим матрицу преобразования  $T$  и получим желаемые уравнения системы в исходном базисе:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -0,0000828 & 0,999 & -0,000088 & -0,00000000391 & -0,0000650 & 0,00000000174 \\ 103,250 & -16,511 & -136,0158 & -797,315 & -101996,142 & -132222,063 \\ 0,000495 & 0,0000000471 & 0,000526 & 1,000 & 0,000389 & -0,0000000104 \\ -166,272 & 26,589 & 234,834 & 1283,985 & 164251,646 & 212928,544 \\ -0,000819 & -0,0000000780 & -0,000870 & -0,0000000387 & -0,000643 & 1,000 \\ 93,646 & -14,972 & -132,258 & -723,142 & -92483,428 & -119921,674 \end{bmatrix} X +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 165427,686 \\ 0 \\ -266402,410 \\ 0 \\ 150038,236 \end{bmatrix} v.$$

Для реализации регулятора (12) выбираем коэффициенты  $k_i = 20$ ,  $i = 2, 4, 6$ , а  $k_1 = = k_3 = k_5 = 0$  и используем дифференцирующие фильтры (11) с параметрами  $\mu = 0,0054$  с;  $d = 1$ .

Моделирование замкнутой системы стабилизации было проведено в интегрированной системе MATLAB Simulink. На графиках рис. 2 представлены переходные процессы в системе при следующих начальных условиях:  $x_1(0) = 0$  м,  $x_3(0) = 0$  рад,  $x_5(0) = 0,1$  рад.

На рис. 2, *a* показано изменение положения каретки, на рис. 2, *b* — угол отклонения первого маятника от вертикали, на рис. 2, *c* — угол отклонения второго маятника, на рис. 2, *d* — изменение управляющего воздействия в системе. Как видно из графиков

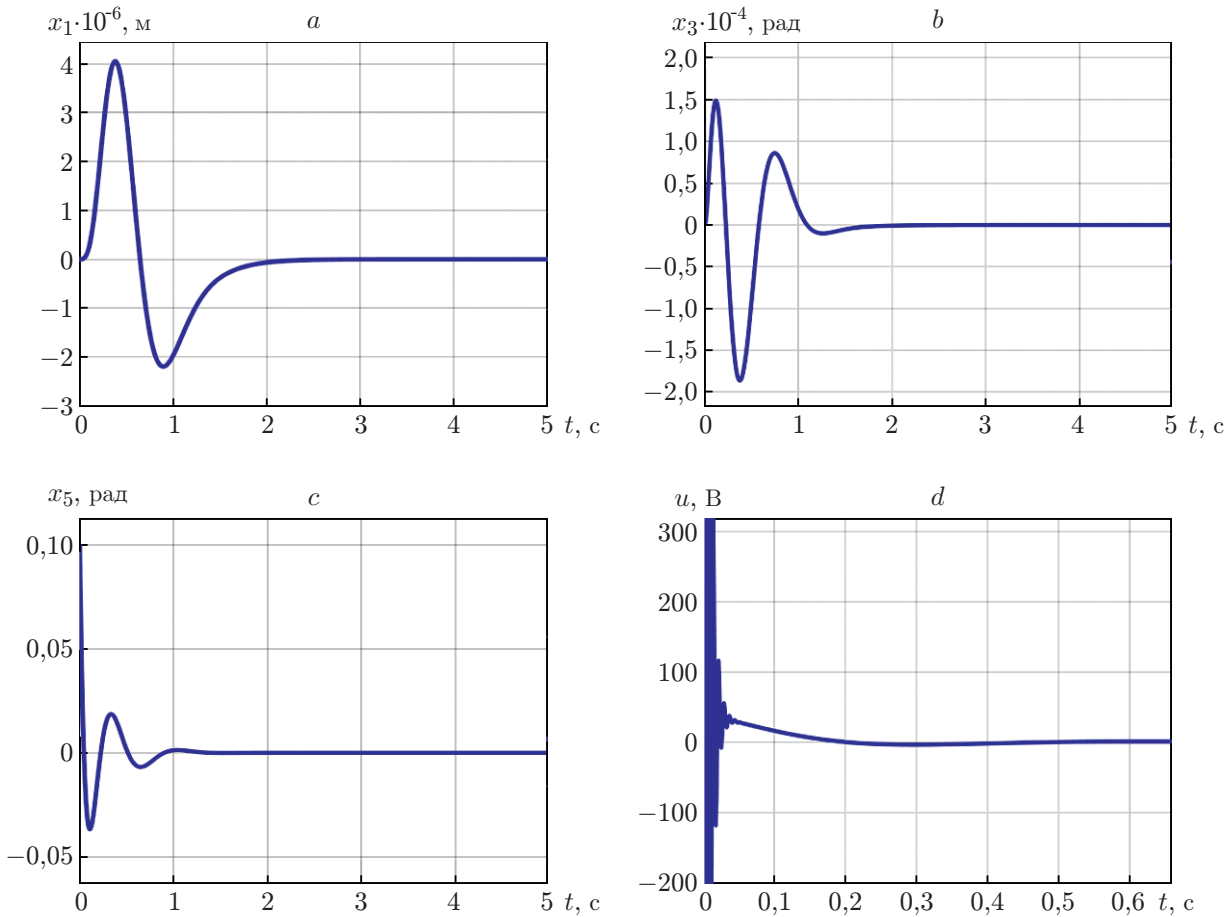


Рис. 2. Переходные процессы в системе: *a* — координата каретки  $x_c$ ; *b* — угол отклонения первого маятника; *c* — угол отклонения второго маятника; *d* — управляющее воздействие

(см. рис. 2, *a-c*), время переходного процесса не превышает 1,5 с, т. е. выполняется требование по быстродействию, предъявляемое к системе стабилизации. Изменение управления (см. рис. 2, *d*) происходит существенно быстрее, поскольку на него влияют колебательные быстрые процессы, возникающие из-за наличия в системе дифференцирующих фильтров с малой постоянной времени. При этом особенностью систем, основанных на методе локализации, является первоначальный «бросок» по управлению [16], который в представленном примере равен значению  $k_6 \mu^{-1} x_5(0)$ .

Таким образом, применение метода локализации к расчёту регулятора для сложного неустойчивого объекта управления позволяет успешно стабилизировать систему за заданное время при использовании трёх дифференцирующих фильтров для оценки переменных состояния, прямое измерение которых не представляется возможным.

**Заключение.** Рассмотрена возможность проектирования регулятора на основе метода локализации для линейной модели объекта в виде двойного перевёрнутого маятника на тележке. Показано, что синтезируемый алгоритм управления непрерывный, и это является его преимуществом по сравнению с релейными алгоритмами стабилизации [15, 19, 20], поскольку меньше влияет на износ исполнительных механизмов, применяемых при реализации физической системы стабилизации.

Процедура расчёта предполагает предварительное преобразование модели объекта в канонический базис, в котором наиболее просто формируются динамические требования

к системе и рассчитывается регулятор. С помощью обратного преобразования переменных определяются его параметры для исходного базиса. Возможность непосредственного измерения части внутренних переменных объекта упрощает реализацию регулятора, так как для измерения производных выходных переменных можно использовать простые однотипные дифференцирующие устройства.

Поскольку метод локализации применим для широкого класса нелинейных объектов, то его можно рекомендовать для стабилизации объектов с высоким уровнем колебательности, подверженных влиянию внешних воздействий. В дальнейшем предполагается рассмотрение возможности применения такого рода регулятора для управления объектом в виде двойного перевёрнутого маятника на тележке с учётом нелинейного характера его описания.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gugaev K. V., Kruchinin P. A., Formalskii A. M.** A model of maintaining balance by a person on the seesaw // *Journ. Appl. Math. and Mechanics*. 2016. **80**, N 4. P. 316–323.
2. **Lin J., Guo S.-Y., Chang J.** Fuzzy coordinator compensation for balancing control of cart-seesaw system // *Journ. Sound and Vibration*. 2011. **330**, N 26. P. 6296–6310.
3. **Cheng F., Zhong G., Li Y., Xu Z.** Fuzzy control of a double-inverted pendulum // *Fuzzy Sets and Syst.* 1996. **79**, N 3. P. 315–321.
4. **Motallebzadeh F., Ozgoli S., Momeni H. R.** Multilevel adaptive control of interconnected nonlinear systems: Application to double coupled inverted pendulums // *IFAC Proceedings Volumes*. 2010. **43**, N 8. P. 418–423.
5. **Niemann H., Poulsen J. K.** Design and analysis of controllers for a double inverted pendulum // *ISA Transactions*. 2005. **44**, N 1. P. 145–163.
6. **Formalsky A. M.** Control of the Nonlinear Objects' Movement. M.: FIZMATLIT, 2012. 232 p.
7. **Krishhenko A. P., Tkachev S. B., Fetisov D. A.** Control of the biped 5-link robot flat movement on stairs // *Vestnik MSTU im. N. Je. Baumana. Ser. «Natural Sciences»*. 2006. N 1. P. 38–64.
8. **Kolesnikova G. P., Formalskii A. M.** About one way of the human gait simulation // *Engineering Journal: Science and Innovations*. 2014. N 1. P. 1–8.
9. **Westervelt E. R., Grizzle J. W., Koditschek D. E.** Hybrid zero dynamics of planar biped walkers // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2003. **48**, N 1. P. 42–56.
10. **Plestan F., Grizzle J. W., Westervelt E. R., Abba G.** Stable walking of a 7-DOF biped robot // *IEEE Trans. Robotics and Automation*. 2003. **19**, N 4. P. 653–668.
11. **Ferrante R.** A Robust Control Approach for Rocket Landing. Edinburgh: University of Edinburgh, 2017. 78 p.
12. **Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland.** Orbiting Solar Observatory Satellite OSO I // U.S. Government printing Office, Washington, D.C. 20402. 1965. 306 p.
13. **Cowan J., Erickson C., Zlatanovic A.** Computer Based State Feedback Control of a Double Inverted Pendulum // *Electrical Engineering Degree Project: ENGR 5969*. 2004.
14. **Wang J.-J., Liu G.-Yu.** Hierarchical sliding-mode control of spatial inverted pendulum with heterogeneous comprehensive learning particle swarm optimization // *Inform. Sci.* 2019. **495**. P. 14–36.
15. **Вотрина О. А., Мелешкин К. Н., Французова Г. А.** К проблеме синтеза регулятора на основе скользящих режимов для модельного объекта в виде двойного перевёрнутого маятника на тележке // *Автометрия*. 2021. **57**, № 4. С. 29–36. DOI: 10.15372/AUT20210404.



16. **Востриков А. С.** Синтез систем регулирования методом локализации. Новосибирск: НГТУ, 2007. 251 с.
17. **Востриков А. С., Французова Г. А.** Теория автоматического регулирования. М.: Юрайт, 2017. 279 с.
18. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 656 с.
19. **Уткин В. И.** Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974. 272 с.
20. **Уткин В. И.** Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.

*Поступила в редакцию 11.05.2022*

*После доработки 08.06.2022*

*Принята к публикации 30.06.2022*

---