

УДК 624-40

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ДВУХКАНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ ОБЪЕКТАМИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© Э. Я. Рапопорт, Н. А. Ильина

*Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: edgar.rapoport@mail.ru, ilina.natalyaa@yandex.ru*

Предлагается конструктивный метод решения задачи двухканального оптимального по быстродействию граничного управления двумя физически неоднородными объектами с распределёнными параметрами, описываемыми линейными уравнениями теплопроводности в условиях идеального теплового контакта взаимодействующих сред при типичной для инженерных приложений оценке целевых множеств управляемых температурных полей в равномерной метрике. Разработанная технология использует специальный метод описания исследуемых температурных полей в форме, содержащей равномерно сходящиеся ряды. Развиваемый подход базируется на процедуре параметризации искомого управляющих воздействий и последующей редукции к задаче полубесконечной оптимизации, которая решается по схеме альтернативного метода в условиях дополнительного ограничения на одинаковую продолжительность процесса управления для обоих управляющих воздействий.

Ключевые слова: взаимосвязанные системы с распределёнными параметрами, оптимальное по быстродействию многоканальное управление, идеальный тепловой контакт, альтернативный метод, оценка целевых множеств в равномерной метрике.

DOI: 10.15372/AUT20220409

Введение. Целый ряд представляющих теоретический интерес и актуальных для приложений задач оптимального управления (ЗОУ) системами с распределёнными параметрами (СРП) формулируется в условиях одновременного воздействия на объект по различным входным каналам в целях существенного повышения эффективности оптимизируемых процессов по базовым технико-экономическим показателям (задачи многоканального управления). Это относится, в частности, к ситуациям с использованием векторных управляющих воздействий, например, в виде совокупности различных внутренних или/и граничных управлений с фиксированным характером их пространственного распределения [1–3]. Самостоятельный класс ЗОУ СРП такого типа возникает для взаимосвязанных СРП с различными управляющими воздействиями для каждого объекта, специфической особенностью которого являются условия сопряжения физически неоднородных сред на их контактирующих поверхностях [4–8].

Подобные СРП являются во многих приложениях элементами различных многослойных структур и конструкций, нашедших широкое практическое применение, например в области технологической теплофизики [1, 9–13]. Общая технология решения задач многоканального управления линейными моделями взаимосвязанных СРП предложена в [14]. В данной работе рассматривается представляющая самостоятельный интерес типичная для приложений задача оптимального по базовому критерию быстродействия двухканального граничного управления температурными полями физически неоднородной СРП, образуемой при идеальном тепловом контакте двух соприкасающихся своими поверхностями тел с различными физическими свойствами и являющейся базовым элементом взаимосвязанных распределённых систем различного уровня сложности в инженерных приложениях [5, 6, 8, 12, 13, 15].

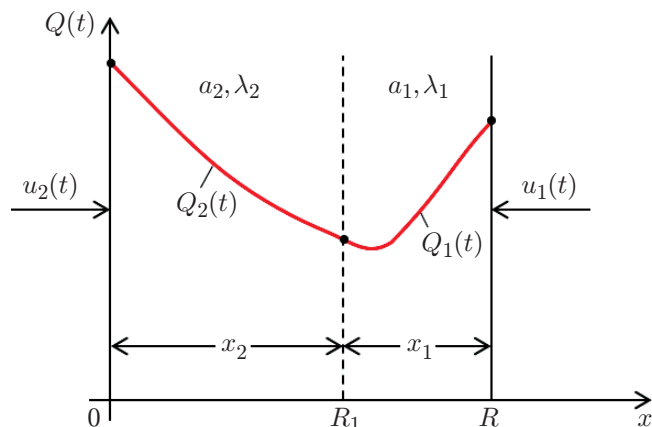


Рис. 1. Температурное поле физически неоднородной системы с идеальным контактом взаимодействующих сред

Постановка задачи. В качестве объекта управления рассматривается процесс нагрева двух физически неоднородных взаимосвязанных через граничные условия пластин (рис. 1), который в первом приближении описывается следующими линейными одномерными уравнениями теплопроводности [8, 13, 15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1(x_1, t)}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 Q_1(x_1, t)}{\partial x_1^2}, \quad x_1 \in [R_1, R]; \\ \frac{\partial Q_2(x_2, t)}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 Q_2(x_2, t)}{\partial x_2^2}, \quad x_2 \in [0, R_1], \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными

$$Q_1(x_1, 0) = Q_{10}(x_1); \quad Q_2(x_2, 0) = Q_{20}(x_2), \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\lambda_1 \frac{\partial Q_1(R, t)}{\partial x_1} + \alpha Q_1(R, t) = u_{s1}(t); \quad \lambda_2 \frac{\partial Q_2(0, t)}{\partial x_2} = u_{s2}(t), \quad (3)$$

и условиями сопряжения на границе $x_1 = x_2 = R_1$, соответствующими граничным условиям 4 рода [13]:

$$Q_1(R_1, t) = Q_2(R_1, t); \quad \lambda_1 \frac{\partial Q_1(R_1, t)}{\partial x_1} = \lambda_2 \frac{\partial Q_2(R_1, t)}{\partial x_2}. \quad (4)$$

Здесь a_1, a_2 — коэффициенты температуропроводности нагреваемых материалов; λ_1, λ_2 — коэффициенты теплопроводности; α — заданная теплофизическая постоянная. В соответствии с (3) в качестве управляющих воздействий рассматриваются граничные сосредоточенные управляющие воздействия $u_{s1}(t), u_{s2}(t)$.

Сосредоточенные управляющие воздействия стеснены ограничениями

$$u_{1 \min} \leq u_{s1}(t) \leq u_{1 \max}; \quad u_{2 \min} \leq u_{s2}(t) \leq u_{2 \max} \quad (5)$$

с заданными предельно допустимыми величинами их возможных значений.

В качестве критерия оптимальности выбирается общее время процесса нагрева в виде следующего интегрального функционала качества:

$$I = \int_0^{t_{\text{кон}}} dt = t_{\text{кон}} \rightarrow \min_{u_{s1}(t), u_{s2}(t)}, \quad (6)$$

где $t_{\text{кон}}$ — общая длительность процесса нагрева для обоих управляющих воздействий $u_{s1}(t), u_{s2}(t)$.

Требование к конечному температурному состоянию в момент окончания ($t_{\text{кон}}$) процесса управления, как правило, связано с соблюдением допуска на ошибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ равномерного приближения конечных температурных распределений $Q_1(x_1, t_{\text{кон}}), Q_2(x_2, t_{\text{кон}})$ по толщине каждой из пластин к заданным температурным состояниям $Q_1^*(x_1) > Q_{10}(x_1), Q_2^*(x_2) > Q_{20}(x_2)$ согласно соотношениям [16–19] соответственно

$$\max_{x_1 \in [R_1, R]} |Q_1(x_1, t_{\text{кон}}) - Q_1^*(x_1)| \leq \varepsilon_1; \quad \max_{x_2 \in [0, R_1]} |Q_2(x_2, t_{\text{кон}}) - Q_2^*(x_2)| \leq \varepsilon_2. \quad (7)$$

Задача оптимального управления температурными полями взаимосвязанных пластин сводится к определению таких управляющих воздействий $u_{s1}^*(t), u_{s2}^*(t)$, которые подчиняются заданным ограничениям (5) и переводят объект управления (1)–(4) в требуемое конечное состояние (7) за минимально возможное время согласно критерию оптимальности (6).

Алгоритмы оптимального по быстродействию программного управления.

Как показано в [14], применительно к базовому критерию быстродействия оптимальные программные управления $u_{s1}^*(t)$ и $u_{s2}^*(t)$ объектом (1)–(4) следует искать в классе релейных функций, попеременно принимающих на промежутке $t \in [0, t_{\text{кон}}]$ только свои предельно допустимые значения в (5). Тем самым производится параметризация этих управляющих воздействий, определяемых априори с точностью до чисел N_1, N_2 и длительностей $\Delta_{1i}^{(N_1)}$, $i = \overline{1, N_1}$, $\Delta_{2i}^{(N_2)}$, $i = \overline{1, N_2}$, интервалов постоянства $u_{s1}^*(t), u_{s2}^*(t)$ соответственно, где исходя из физических соображений принимается, что в пределах первого интервала процесса нагрева $u_{s1}^*(t) = u_{1\text{max}}, u_{s2}^*(t) = u_{2\text{max}}$:

$$u_{s1}^*(\bar{\Delta}_1^{(N_1)}, t) = \frac{u_{1\text{max}} + u_{1\text{min}}}{2} + (-1)^{j+1} \frac{u_{1\text{max}} - u_{1\text{min}}}{2},$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \Delta_{1i}^{(N_1)} < t < \sum_{i=0}^j \Delta_{1i}^{(N_1)}, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad \Delta_{10}^{(N_1)} = 0;$$

(8)

$$u_{s2}^*(\bar{\Delta}_2^{(N_2)}, t) = \frac{u_{2\text{max}} + u_{2\text{min}}}{2} + (-1)^{j+1} \frac{u_{2\text{max}} - u_{2\text{min}}}{2};$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \Delta_{2i}^{(N_2)} < t < \sum_{i=0}^j \Delta_{2i}^{(N_2)}, \quad j = \overline{1, N_2}, \quad \Delta_{20}^{(N_2)} = 0.$$

Интегрирование уравнений (1)–(4) с параметризованными управлениями $u_{s1}^*(\bar{\Delta}_1^{(N_1)}, t)$, $\bar{\Delta}_1^{(N_1)} = (\Delta_{1i}^{(N_1)})$; $u_{s2}^*(\bar{\Delta}_2^{(N_2)}, t)$, $\bar{\Delta}_2^{(N_2)} = (\Delta_{2i}^{(N_2)})$ позволяет определить конечное состояние

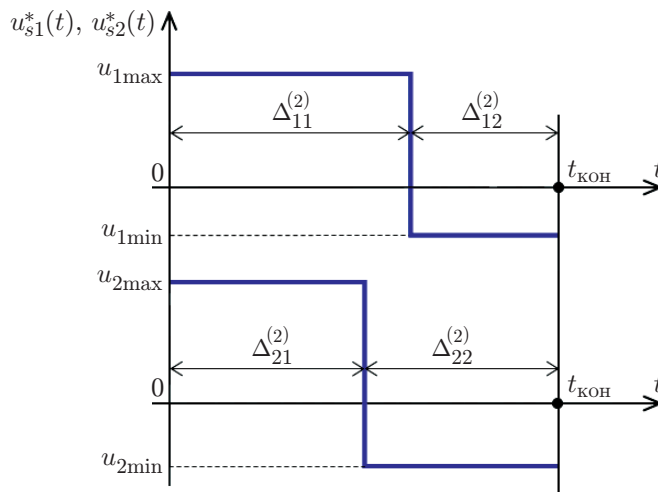


Рис. 2. Оптимальное по быстродействию двухканальное двухинтервальное граничное управление

объекта $Q_m(x_m, t_{\text{кон}}^*)$, $m = 1, 2$, в форме явных зависимостей $Q_m(x_m, \bar{\Delta}_1^{(N_1)}, \bar{\Delta}_2^{(N_2)})$ от своих аргументов, и дальнейшая проблема сводится к определению векторов $\bar{\Delta}_1^{(N_1)}$, $\bar{\Delta}_2^{(N_2)}$, обеспечивающих выполнение требований (7) за минимально возможное время $t_{\text{кон}}^*$. Эта задача решается далее по схеме альтернативного метода [14, 16–18]. Вид управляющих воздействий для рассматриваемого всюду далее типичного случая двухинтервального режима нагрева подобно [16–18] при $N_1 = N_2 = 2$ иллюстрируется на рис. 2.

В задаче двухканального управления возникает дополнительное ограничение на одинаковую общую длительность оптимального процесса $t_{\text{кон}}^*$ для обоих управляющих воздействий, требующее выполнения равенства

$$\sum_{i=1}^{N_1} \Delta_{1i}^{(N_1)} = \sum_{i=1}^{N_2} \Delta_{2i}^{(N_2)} = t_{\text{кон}}^*. \quad (9)$$

В силу этого ограничения число неизвестных компонент векторов $\bar{\Delta}_1^{(N_1)}$, $\bar{\Delta}_2^{(N_2)}$ оказывается равным $N_1 + N_2 - 1$. При этом одно из управлений, называемое далее «активным», может рассматриваться в условиях свободного варьирования всех характеризующих его параметров, от выбора которых зависит величина $t_{\text{кон}}^*$, а для другого, стесняемого условием (9) для выбранного таким способом значения $t_{\text{кон}}^*$, число таких параметров уменьшается на единицу.

Последующий выбор одного из двух возможных вариантов активного ограничения определяется их сравнением по достигаемой величине $t_{\text{кон}}^*$ в результате решения соответствующих задач оптимального управления.

Применительно к примеру двухинтервального процесса нагрева (см. рис. 2) следует в соответствии с вышесказанным рассмотреть две задачи оптимального быстродействия с тремя неизвестными: $\Delta_{11}^{(2)}$, $\Delta_{12}^{(2)}$, $\Delta_{21}^{(2)}$, если активным является управление u_{s1} , или $\Delta_{21}^{(2)}$, $\Delta_{22}^{(2)}$, $\Delta_{11}^{(2)}$ при активном воздействии u_{s2} .

Специальный метод решения начально-краевой задачи, моделирующей объект оптимального управления. Известные методы получения решений начально-краевой задачи (1)–(4) [12, 13, 15, 20] приводят к представлению $Q_m(x_m, \bar{\Delta}_1^{(N_1)}, \bar{\Delta}_2^{(N_2)})$,

$m = 1, 2$, в весьма сложной форме, содержащей ряды, неравномерно сходящиеся на граничных поверхностях контактирующих сред, которая не позволяет, в частности, непосредственно проверить выполнение условий сопряжения (4). Эти решения фиксируют только однородные условия на границах $x_1 = R$, $x_2 = 0$ и на контактной поверхности $x_1 = x_2 = R_1$ в силу известных свойств собственных функций задачи (1)–(4) [13, 15]. При неоднородном характере граничных условий (3), (4) оказывается необходимым преобразование данных решений к виду, содержащему ряды с улучшенной сходимостью [13]. Возможный способ подобного описания температурных полей в задаче (1)–(4) в достаточно простом виде, содержащем известные решения уравнений теплопроводности с однородными граничными условиями, предложен в [8].

Используя известные выражения для стандартизирующей функции начально-краевой задачи (1)–(4), приведём уравнения модели объекта к виду с однородными граничными условиями в (3) и дополнительными функциями внутреннего тепловыделения, компенсирующими эффект влияния на температурные поля $Q_1(x_1, t)$, $Q_2(x_2, t)$ управляющих воздействий $u_{s1}(t), u_{s2}(t) \neq 0$ с начальными условиями (2) и условиями сопряжения (4) [15]:

$$\frac{\partial Q_1(x_1, t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 Q_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} + \frac{a_1}{\lambda_1} \delta(x_1 - R) u_{s1}(t), \quad x_1 \in [R_1, R], \quad (10)$$

$$\frac{\partial Q_2(x_2, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 Q_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} + \frac{a_2}{\lambda_2} \delta(x_2 - 0) u_{s2}(t), \quad x_2 \in [0, R_1], \quad (11)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial Q_1(R, t)}{\partial x_1} + \alpha Q_1(R, t) = 0, \quad (12)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial Q_2(0, t)}{\partial x_2} = 0. \quad (13)$$

Здесь $\delta(x_1 - R)$ и $\delta(x_2 - 0)$ — пространственные δ -функции, сосредоточенные в точках $x_1 = R$ и $x_2 = 0$ соответственно. Найдём сначала решения задачи (2), (10)–(13) с заменой условий сопряжения (4) независимыми друг от друга граничными условиями для $Q_1(x_1, t)$ и $Q_2(x_2, t)$ на контактной границе $x_1 = x_2 = R_1$:

$$\lambda_1 \frac{\partial Q_1(R_1, t)}{\partial x_1} = q_1(t), \quad (14)$$

$$Q_2(R_1, t) = Q_2^{(1)}(t), \quad (15)$$

где $q_1(t)$, $Q_2^{(1)}(t)$ — произвольные непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции времени, которые считаются известными.

Появляющаяся при этом возможность независимого раздельного решения задач для $Q_1(x_1, t)$ и $Q_2(x_2, t)$ в условиях (14) и (15) кардинально упрощает решение исходной задачи (1)–(4), если на втором этапе можно так подобрать $q_1(t)$ и $Q_2^{(1)}(t)$, чтобы удовлетворялись условия сопряжения (4).

Как показано в [8], можно получить решения задач (10)–(15) с начальным условием (2) в достаточно простой форме, содержащей известные решения уравнений теплопроводности с однородными граничными условиями. В частности, $Q_1(x_1, t)$ представляется в виде

$$Q_1(x_1, t) = \hat{Q}_1(x_1, t) + Q_1^{(1)}(t) Q_1^{(2)}(x_1), \quad (16)$$

где $\hat{Q}_1(x_1, t)$ — решение уравнения (10) с начальным условием

$$\hat{Q}_1(x_1, 0) = Q_{10}(x_1) - Q_1^{(1)}(0)Q_1^{(2)}(x_1) \quad (17)$$

и однородными граничными условиями в (12), (14)

$$\lambda_1 \frac{\partial \hat{Q}_1(R, t)}{\partial x_1} + \alpha \hat{Q}_1(R, t) = 0, \quad (18)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \hat{Q}_1(R_1, t)}{\partial x_1} = 0, \quad (19)$$

а $Q_1^{(1)}(t)$ и $Q_1^{(2)}(x_1)$ в (16) находятся следующим образом [8]:

$$Q_1^{(1)}(t) = q_1(t); \quad Q_1^{(2)}(x_1) = \frac{1}{\lambda_1} \left[(x_1 - R_1) - \frac{\nu}{R - R_1} (x_1 - R_1)^2 \right],$$

$$\nu = \frac{\eta}{\eta + \lambda_1}, \quad \eta = \lambda_1 \left[1 + \frac{\alpha(R - R_1)}{\lambda_1} \right]. \quad (20)$$

Именно за счёт второго слагаемого в (16) удовлетворяются неоднородные граничные условия в (14) вместе с (12).

Заметим, что решение задачи (10), (17)–(19) представляется в форме равномерно сходящегося ряда [13] и значения $Q_1(R_1, t)$, $\partial Q_1(R_1, t)/\partial x_1$ в (4) можно непосредственно вычислить в точке сопряжения $x_1 = R_1$.

Аналогичным образом определяется решение задачи (11), (13), (14) для $Q_2(x_2, t)$ [8]:

$$Q_2(x_2, t) = \hat{Q}_2(x_2, t) + Q_2^{(1)}(t), \quad (21)$$

где $\hat{Q}_2(x_2, t)$ — решение уравнения (11) с начальным

$$\hat{Q}_2(x_2, 0) = Q_{20}(x_2) - Q_2^{(1)}(0) \quad (22)$$

и однородными граничными условиями в (13), (14)

$$\lambda_2 \frac{\partial \hat{Q}_2(0, t)}{\partial x_2} = 0, \quad (23)$$

$$\hat{Q}_2(R_1, t) = 0. \quad (24)$$

Здесь, подобно $\hat{Q}_1(x_1, t)$, находится $\hat{Q}_2(x_2, t)$ в виде равномерно сходящегося ряда в условиях (23), (24). Явная форма выражений для $\hat{Q}_1(x_1, t)$ и $\hat{Q}_2(x_2, t)$ определяется стандартным способом по известной схеме метода конечных интегральных преобразований в форме разложения в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $\varphi_1(\mu_{1n}, x_1)$ и $\varphi_2(\mu_{2n}, x_2)$ краевой задачи соответственно для $\hat{Q}_1(x_1, t)$ и $\hat{Q}_2(x_2, t)$ (μ_{1n}^2, μ_{2n}^2 — собственные числа [15]):

$$\hat{Q}_1(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(\mu_{1n}, x_1) \left(\frac{1}{a_1} \int_0^t \int_{R_1}^R f_{1n}(\xi, \tau, u_1(\xi, \tau)) \varphi_1(\mu_{1n}, \xi) \times \right.$$

$$\times \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a_1}{(R-R_1)^2}(t-\tau)\right) d\xi d\tau + \int_{R_1}^R \hat{Q}_1(\xi, 0) \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a_1}{(R-R_1)^2} t\right) d\xi, \quad (25)$$

$$\hat{Q}_2(x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_2(\mu_{2n}, x_2) \left(\frac{1}{a_2} \int_0^t \int_0^{R_1} f_{2n}(\xi, \tau, u_2(\xi, \tau)) \varphi_2(\mu_{2n}, \xi) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{a_2(2n-1)^2}{4R_1^2} \pi^2(t-\tau)\right) d\xi d\tau + \int_0^{R_1} \hat{Q}_2(\xi, 0) \exp\left(-\frac{a_2(2n-1)^2}{4R_1^2} \pi^2 t\right) d\xi \right). \quad (26)$$

Здесь

$$f_{1n}(\xi, \tau, u_1(\xi, \tau)) = \frac{a_1}{\lambda_1} \delta(\xi - R) u_{s1}(\tau); \quad f_{2n}(\xi, \tau, u_2(\xi, \tau)) = \frac{a_2}{\lambda_2} \delta(\xi - 0) u_{s2}(\tau), \quad (27)$$

$$\varphi_1(\mu_{1n}, x_1) = \sqrt{\frac{a_1}{R-R_1} \frac{2\eta_n}{\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n}} \cos\left(\eta_n \frac{x_1 - R_1}{R - R_1}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

$$\varphi_2(\mu_{2n}, x_1) = \sqrt{\frac{2a_2}{R_1}} \cos\left((2n-1) \frac{\pi x_2}{2R_1}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

и собственные числа μ_{1n}^2 , μ_{2n}^2 определяются соотношениями

$$\mu_{1n}^2 = \frac{a_1}{(R-R_1)^2} \eta_n^2; \quad \mu_{2n}^2 = \frac{a_2}{R_1^2} \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad (30)$$

где η_n — корни уравнения $\eta_n \operatorname{tg} \eta_n = \alpha(R-R_1)/\lambda_1$.

После подстановки двухинтервальных параметризованных управлений вида (8) при $N_1 = N_2 = 2$ в (25), (26) получим в результате вычисления интегралов при $t = t_{\text{кон}}$ параметризованное представление конечных температурных состояний $\hat{Q}_m(x_m, \bar{\Delta}_m^{(2)})$, $m = 1, 2$, в явной форме зависимости от своих аргументов:

$$\hat{Q}_1(x_1, \bar{\Delta}_1^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\eta_n \frac{x_1 - R_1}{R - R_1}\right) \left[\frac{\cos(\eta_n)}{\omega_n \lambda_1 E_{1n}^2} (u_{1\max}(\mathbf{e}^{-\omega_n \Delta_{12}^{(2)}} - \mathbf{e}^{-\omega_n(\Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)})}) + \right. \\ \left. + u_{1\min}(1 - \mathbf{e}^{-\omega_n \Delta_{12}^{(2)}})) \right] + \mathbf{e}^{-\omega_n(\Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)})} \int_{R_1}^R \hat{Q}_1(\xi, 0) d\xi, \\ \frac{1}{E_{1n}^2} = \frac{2a_1 \eta_n}{(R-R_1)(\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n)}; \quad \omega_n = \eta_n^2 \frac{a_1}{(R-R_1)^2}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_2(x_2, \bar{\Delta}_2^{(2)}) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_2}{\lambda_2 R_1 \mu_{2n}^2} \cos \left((2n-1) \frac{\pi x_2}{2R_1} \right) [u_{2\max} (e^{-\mu_{2n}^2 \Delta_{22}^{(2)}} - e^{-\mu_{2n}^2 (\Delta_{21}^{(2)} + \Delta_{22}^{(2)})}) + \\ & + u_{2\min} (1 - e^{-\mu_{2n}^2 \Delta_{22}^{(2)}})] + e^{-\mu_{2n}^2 (\Delta_{21}^{(2)} + \Delta_{22}^{(2)})} \int_0^{R_1} \hat{Q}_2(\xi, 0) d\xi. \end{aligned} \quad (32)$$

Приравнивая правые части граничных условий (4) и (14), (15), используя выражения (16), (21) и учитывая $Q_1^{(2)}(R_1) = \hat{Q}_1(R_1, t) = 0$, согласно (20), (24) приходим к выводу, что условия сопряжения (4) выполняются, если выбрать $q_1(t)$ и $Q_2^{(1)}(t)$ в (14), (15) следующим образом:

$$q_1(t) = \lambda_2 \frac{\partial \hat{Q}_2(R_1, t)}{\partial x_2}; \quad Q_2^{(1)}(t) = \hat{Q}_1(R_1, t). \quad (33)$$

В итоге получаем в явной форме зависимости (16), (21) для конечного температурного состояния при $t = t_{\text{кон}}$ с учётом известных выражений (31), (32) и соотношений (33):

$$Q_1(x_1, t_{\text{кон}}) = Q_1(x_1, \bar{\Delta}_1^{(2)}, \bar{\Delta}_2^{(2)}) = \hat{Q}_1(x_1, \bar{\Delta}_1^{(2)}) + \lambda_2 \frac{\partial \hat{Q}_2(R_1, \bar{\Delta}_2^{(2)})}{\partial x_2} Q_1^{(2)}(x_1), \quad (34)$$

$$Q_2(x_2, t_{\text{кон}}) = Q_2(x_2, \bar{\Delta}_1^{(2)}, \bar{\Delta}_2^{(2)}) = \hat{Q}_2(x_2, \bar{\Delta}_2^{(2)}) + \hat{Q}_1(R_1, \bar{\Delta}_1^{(1)}). \quad (35)$$

Примем далее в (2) для простоты без потери общности основных результатов

$$Q_{10}(x_1) = Q_{20}(x_2) = 0. \quad (36)$$

Тогда $\hat{Q}_1(x_1, 0)$ определяется согласно (17), где на основании соотношений (20), (24) можно принять в условиях (36), что

$$Q_1^{(1)}(0) = q_1(0) = \lambda_2 \frac{\partial \hat{Q}_2(R_1, 0)}{\partial x_2} = 0 \quad (37)$$

в начальный момент процесса управления с равномерным начальным распределением температур при управляющих воздействиях u_{s1} , u_{s2} , которые сосредоточены на границах $x_1 = R$, $x_2 = 0$, удалённых от точки сопряжения $x_1 = x_2 = R_1$. В итоге в соответствии с (17), (36), (37) будем иметь

$$\hat{Q}_1(x_1, 0) = Q_{10}(x_1) = 0. \quad (38)$$

Также $\hat{Q}_2(x_2, 0)$ определяется на основании (22), (36), где в силу соотношений (33), (38) $Q_2^{(1)}(0) = \hat{Q}_1(R_1, 0) = 0$:

$$\hat{Q}_2(x_2, 0) = Q_{20}(x_2) = 0. \quad (39)$$

Таким образом, в условиях (36) следует рассматривать выражения (25), (26) и (31), (32) с нулевыми начальными состояниями для \hat{Q}_1 и \hat{Q}_2 .

Редукция к задаче полубесконечной оптимизации и её решение альтернативным методом. При известной параметризованной форме (8) управляющих воздействий и конечных температурных состояний (34), (35) осуществляется в условиях (7), (9) точная редукция исходной задачи двухканального двухинтервального управления к специальной задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [16–19] относительно искомым значений $\bar{\Delta}_1^{(2)}$, $\bar{\Delta}_2^{(2)}$:

$$I(\bar{\Delta}_\Sigma) = t_{\text{кон}} = \Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)} = \Delta_{21}^{(2)} + \Delta_{22}^{(2)} \rightarrow \min_{\bar{\Delta}_\Sigma}, \quad (40)$$

$$\max_{x_1 \in [R_1, R]} |Q_1(x_1, \bar{\Delta}_1^{(2)}, \bar{\Delta}_2^{(2)}) - Q_1^*(x_1)| \leq \varepsilon_1, \quad (41)$$

$$\max_{x_2 \in [0, R_1]} |Q_2(x_2, \bar{\Delta}_1^{(2)}, \bar{\Delta}_2^{(2)}) - Q_2^*(x_2)| \leq \varepsilon_2, \quad (42)$$

согласно которой необходимо минимизировать одинаковую для обоих управлений сумму длительностей двух интервалов их постоянства, равную продолжительности оптимального процесса управления, при ограничениях (41), (42), диктуемых требованиями (7) для всех $x_1 \in [R_1, R]$, $x_2 \in [0, R_1]$.

Здесь $\bar{\Delta}_\Sigma = \bar{\Delta}_{\Sigma 1} = (\Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{21}^{(2)})$ или $\bar{\Delta}_\Sigma = \bar{\Delta}_{\Sigma 2} = (\Delta_{21}^{(2)}, \Delta_{22}^{(2)}, \Delta_{11}^{(2)})$ в зависимости от выбора в качестве активного управления $u_{s1}(t)$ или $u_{s2}(t)$ соответственно. Задача (40)–(42) имеет решение только в том случае, если $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{11 \min}^{(2)}$, $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_{21 \min}^{(2)}$ при $\bar{\Delta}_\Sigma = \bar{\Delta}_{\Sigma 1}$ или $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{12 \min}^{(2)}$, $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_{22 \min}^{(2)}$ при $\bar{\Delta}_\Sigma = \bar{\Delta}_{\Sigma 2}$, где $\varepsilon_{ms \min}^{(2)}$; $m, s = 1, 2$ — минимально достижимые ошибки равномерного приближения $Q_m(x_m, \bar{\Delta}_1^{(2)}, \bar{\Delta}_2^{(2)})$ к $Q_m(x_m)$ в классе двухинтервальных управлений, определяемые при $\bar{\Delta}_\Sigma = \bar{\Delta}_{\Sigma s}$ согласно соотношениям [14]

$$\varepsilon_{ms \min}^{(2)} = \min_{\bar{\Delta}_{\Sigma s}} |Q_m(x_m, \bar{\Delta}_1^{(2)}, \bar{\Delta}_2^{(2)}) - Q_m^*(x_m)|, \quad m, s = 1, 2. \quad (43)$$

Решение ЗПО (40)–(42) может быть получено альтернативным методом [14, 16–19] в условиях малостеснительных допущений, которые всюду далее считаются выполненными.

Метод базируется на специальных альтернативных свойствах искомого вектора $\bar{\Delta}_{\Sigma s}^*$, являющихся аналогом условий экстремума в теории чебышевских приближений и дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения оптимального результирующего состояния $Q_m(x_m, \bar{\Delta}_1^{(2)}, \bar{\Delta}_2^{(2)}) - Q_m^*(x_m) = Q_m(x_m, \bar{\Delta}_\Sigma^*) - Q_m^*(x_m)$, $m = 1, 2$, управляемой величины, которая диктуется закономерностями предметной области рассматриваемой задачи.

Метод гарантирует в условиях (9) возможность выполнения только ограничения (41) или (42) для допустимых значений $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{11 \min}^{(2)}$ или $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_{22 \min}^{(2)}$ за счёт выбора в качестве вектора свободно варьируемых параметров активного управления $\bar{\Delta}_{\Sigma 1}$ или $\bar{\Delta}_{\Sigma 2}$ [14].

При этом возможности выбора параметров другого управления стеснены условием (9) и достигаемая точность ε_2^* или ε_1^* равномерного приближения соответственно $Q_2(x_2, \bar{\Delta}_{\Sigma 1}^*)$ к $Q_2^*(x_2)$ или $Q_1(x_1, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*)$ к $Q_1^*(x_1)$ вместо заданных в (41), (42) величин ε_2 или ε_1 остаётся априори неизвестной. Согласно альтернативным свойствам заданные достижимые значения ε_1 при $\bar{\Delta}_\Sigma = \bar{\Delta}_{\Sigma 1}$ или ε_2 при $\bar{\Delta}_\Sigma = \bar{\Delta}_{\Sigma 2}$ (т. е. строгие равенства в (41), (42)) достигаются в конце оптимального процесса в некоторых точках $x_{1j}^0 \in [R_1, R]$, $j = \bar{1}, \psi_1$;

$x_{2j}^0 \in [0, R_1]$, $j = \overline{1, \psi_2}$, отрезков $[R_1, R] \ni x_1$, $[0, R_1] \ni x_2$. Суммарное число $\psi_\Sigma = \psi_1 + \psi_2$ таких точек оказывается равным числу всех искомым параметров, включая $\bar{\Delta}_{\Sigma 1}^*$, ε_2^* или $\bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*$, ε_1^* и заведомо нефиксируемые величины минимаксов $\varepsilon_{11 \min}^{(2)}$ или $\varepsilon_{22 \min}^{(2)}$ соответственно, если с ними должны совпадать по исходным требованиям значения ε_1 или ε_2 в (41), (42).

Указанные равенства порождают замкнутую относительно всех неизвестных систему соотношений для результирующих значений функции состояния объекта управления при заданных достижимых величинах ε_1 и ε_2 в (41), (42):

$$\begin{aligned} |Q_1(x_{1j}^0, \bar{\Delta}_{\Sigma 1}^*) - Q^*(x_{1j}^0)| &= \varepsilon_1, \quad j = \overline{1, \psi_1}; \\ |Q_2(x_{2j}^0, \bar{\Delta}_{\Sigma 1}^*) - Q^*(x_{2j}^0)| &= \varepsilon_2^*, \quad j = \overline{1, \psi_2}, \end{aligned} \quad (44)$$

если $\bar{\Delta}_\Sigma = \bar{\Delta}_{\Sigma 1}$, или

$$\begin{aligned} |Q_1(x_{1j}^0, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*) - Q^*(x_{1j}^0)| &= \varepsilon_1^*, \quad j = \overline{1, \psi_1}; \\ |Q_2(x_{2j}^0, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*) - Q^*(x_{2j}^0)| &= \varepsilon_2, \quad j = \overline{1, \psi_2}, \end{aligned} \quad (45)$$

если $\bar{\Delta}_\Sigma = \bar{\Delta}_{\Sigma 2}$.

При этом в силу свойств свободно варьируемых управлений [14, 16–19] здесь $\psi_1 = \psi_2 = 2$ при $\varepsilon_1 > \varepsilon_{11 \min}^{(2)}$, $\psi_1 = 3$, $\psi_2 = 2$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11 \min}^{(2)}$ в (44) или $\psi_1 = \psi_2 = 2$ при $\varepsilon_2 > \varepsilon_{22 \min}^{(2)}$, $\psi_1 = 2$, $\psi_2 = 3$ при $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22 \min}^{(2)}$ в (45) и, следовательно,

$$\psi_\Sigma = \psi_1 + \psi_2 = \begin{cases} 4, & \text{если } \varepsilon_m > \varepsilon_{ms \min}^{(2)}; \\ 5, & \text{если } \varepsilon_m = \varepsilon_{ms \min}^{(2)}, \end{cases} \quad m, s = 1 \text{ или } m, s = 2. \quad (46)$$

При наличии диктуемой закономерностями предметной области дополнительной информации о характере зависимостей $Q_m(x_m, \bar{\Delta}_\Sigma^*) - Q_m^*(x_m)$, $m = 1, 2$, от пространственных аргументов, которые позволяют идентифицировать значения x_{mj}^0 и знаки предельно допустимых отклонений $Q_m(x_{mj}^0, \bar{\Delta}_\Sigma^*) - Q_m^*(x_{mj}^0)$ в этих точках, обеспечивается редукция равенств (44), (45), составляемых для абсолютных величин указанных отклонений, к замкнутым системам уравнений следующего вида относительно самих разностей:

$$Q_m(x_{mj}^0, \bar{\Delta}_\Sigma^*) - Q_m^*(x_{mj}^0) = \pm \varepsilon, \quad m = 1, 2, \quad (47)$$

где каждой точке x_{mj}^0 в (44), (45) однозначным образом отвечает свой знак ε и под которым понимаются соответствующие значения ε_1 и ε_2^* в (44) или ε_1^* и ε_2 в (45).

Равенства (47) характеризуют максимальные отклонения $Q_m(x_{mj}^0, \bar{\Delta}_\Sigma^*) - Q_m^*(x_{mj}^0)$ на всём отрезке изменения x_m , и, следовательно, внутренние точки \tilde{x}_{mj}^0 этих отрезков, принадлежащие множеству значений x_{mj}^0 в (44), (45), являются точками максимума или минимума (в зависимости от знака правой части в (47)) рассматриваемой разности, в которых выполняются необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial}{\partial x_m} [Q_m(\tilde{x}_{mj}^0, \bar{\Delta}_\Sigma^*) - Q_m^*(\tilde{x}_{mj}^0)] = 0, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, \psi_3}, \quad \psi_3 \leq \psi_\Sigma. \quad (48)$$

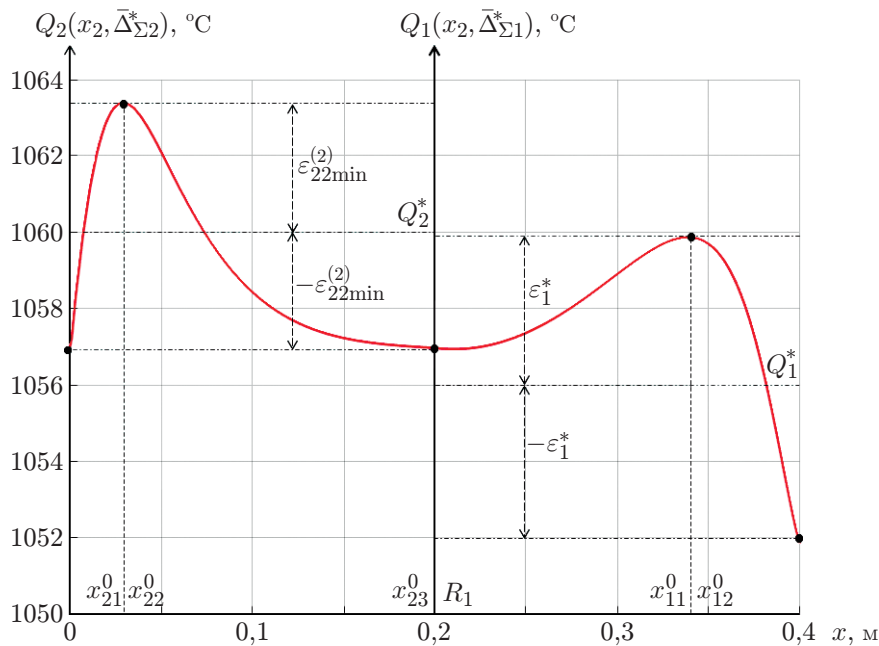


Рис. 3. Температурное распределение в конце процесса оптимального управления

Совместным решением системы трансцендентных уравнений (47), (48) относительно всех искомых неизвестных, включая \tilde{x}_{mj}^0 , известными численными методами завершается предлагаемая процедура определения параметрических характеристик искомых граничных управляющих воздействий для выбранного варианта активного управления. Оптимальным считается такой из этих вариантов, при котором достигается минимальная длительность оптимального процесса.

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе управления объектом (1)–(4) и альтернантные свойства $\bar{\Delta}_{\Sigma}^*$, характеризуемые соотношением (46), определяют аналогично [16–19] форму описываемых выражениями (34), (35) кривых $Q_1(x_1, \bar{\Delta}_{\Sigma}^*)$, $Q_2(x_2, \bar{\Delta}_{\Sigma}^*)$ результирующего распределения температур по пространственной координате для любого из вариантов (44), (45), что позволяет заведомо идентифицировать в (44)–(46) координаты всех точек x_{1j}^0 , x_{2j}^0 и знаки ε в (47). В частности, применительно к варианту (45) для типового случая $Q_1^*(x_1) = Q_1^* = \text{const}$, $Q_2^*(x_2) = Q_2^* = \text{const}$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_{11\text{min}}^{(2)}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22\text{min}}^{(2)}$ подобный анализ приводит к однозначно устанавливаемой форме зависимостей $Q_1(x_1, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*)$ и $Q_2(x_2, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*)$ от пространственных аргументов x_1 , x_2 , показанной на рис. 3.

Непосредственно по виду кривых на рис. 3 конструируется система уравнений в пяти точках: $x_{11}^0 = \tilde{x}_{11}^0 \in (R_1, R)$, $x_{12}^0 = R$, $x_{21}^0 = 0$, $x_{22}^0 = \tilde{x}_{22}^0 \in (0, R_1)$, $x_{23}^0 = R_1$ относительно семи неизвестных $\bar{\Delta}_{\Sigma 2}^* = (\Delta_{11*}^{(2)}, \Delta_{21*}^{(2)}, \Delta_{22*}^{(2)})$, $\varepsilon_{22\text{min}}^{(2)}$, ε_1^* , \tilde{x}_{11}^0 , \tilde{x}_{22}^0 . Система семи уравнений (47), (48) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 Q_1(x_{11}^0, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*) - Q_1^* &= \varepsilon_1^*; & Q_1(R, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*) - Q_1^* &= -\varepsilon_1^*; \\
 Q_2(0, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*) - Q_2^* &= -\varepsilon_{22\text{min}}^{(2)}; & Q_2(x_{22}^0, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*) - Q_2^* &= \varepsilon_{22\text{min}}^{(2)}; \\
 Q_2(R_1, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*) - Q_2^* &= -\varepsilon_{22\text{min}}^{(2)}; & \frac{\partial(x_{11}^0, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*)}{\partial x_1} &= \frac{\partial(x_{22}^0, \bar{\Delta}_{\Sigma 2}^*)}{\partial x_2} = 0.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Аналогичным образом опознаётся в соответствии с (46) форма кривых $Q_1(x_1, \bar{\Delta}_{\Sigma 1}^*)$ и $Q_2(x_2, \bar{\Delta}_{\Sigma 1}^*)$ и приводится система уравнений (47), (48) к виду (49) для варианта (44).

Кривые результирующего распределения температур, представленные на рис. 3, получены по результатам численного решения системы уравнений (49): $\Delta_{11*}^{(2)} = 155$ с, $\Delta_{21*}^{(2)} = 136$ с, $\Delta_{22*}^{(2)} = 18$ с, $\varepsilon_{22\min}^{(2)} = 3,2$ °С, $\varepsilon_1^* = 4$ °С для заданных значений $\varepsilon_1 = 3$ °С, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22\min}^{(2)}$, $u_{1\max} = u_{2\max} = 30$ кВт/м², $u_{1\min} = -0,3u_{1\max}$, $u_{2\min} = -0,7u_{2\max}$, $a_1 = 15,4 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $a_2 = 14,6 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda_1 = 34$ Вт/(м·°С); $\lambda_2 = 32$ Вт/(м·°С), $\alpha = 4$ Вт/(м²·°С), $Q_1^* = 1056$ °С, $Q_2^* = 1060$ °С, $R_1 = 0,2$ м, $R = 0,4$ м, при которых это решение оказывается оптимальным по быстродействию. Задача синтеза оптимальной по быстродействию системы двухканального управления объектом (1)–(4) с обратными связями по неполному измерению состояния может быть решена при найденном решении задачи программного управления методом, предложенным в [21].

Заключение. Предлагаемый конструктивный метод решения задачи двухканального оптимального по быстродействию граничного управления двумя физически неоднородными СРП, описываемыми линейными уравнениями теплопроводности параболического типа в условиях идеального теплового контакта взаимодействующих сред, разработан применительно к наиболее употребительным в приложениях оценкам целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике.

Значительная специфика рассматриваемой задачи управления взаимосвязанных СРП проявляется при учёте условий сопряжения взаимодействующих физически неоднородных сред на контактных поверхностях.

Задача решается по модифицированной схеме разработанного ранее альтернативного метода, отличающейся от варианта одноканального управления специфическим требованием одинаковой длительности процесса управления для каждого из управляющих воздействий и усложнённым характером пространственного распределения результирующих температурных состояний.

Финансирование. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-29-00180, <https://rscf.ru/project/22-29-00180/>, ФГБУ ВО «Самарский государственный технический университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковский В. А.** Динамика металлургических объектов с распределёнными параметрами. М.: Металлургия, 1971. 384 с.
2. **Рей У.** Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983. 368 с.
3. **Рапопорт Э. Я.** Анализ и синтез систем автоматического управления с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2005. 292 с.
4. **Бутковский А. Г.** Структурная теория распределённых систем. М.: Наука, 1977. 320 с.
5. **Бегимов И., Бутковский А. Г., Рожанский В. Л.** Структурное представление физически неоднородных систем // Автоматика и телемеханика, 1982. № 9. С. 25–35.
6. **Бегимов И., Бутковский А. Г., Рожанский В. Л.** Структурное представление двумерных неоднородных систем с распределёнными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1984. № 5. С. 5–16.
7. **Демиденко Н. Д.** Управляемые распределённые системы. Новосибирск: Наука, 1999. 393 с.
8. **Рапопорт Э. Я.** Программная управляемость взаимосвязанных неоднородных систем с распределёнными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 4. С. 11–24.

9. **Гусев Е. Л.** Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Изд-во «Наука», 1993. 262 с.
10. **Бакулин В. Г., Гусев Е. Л., Марков В. Г.** Методы оптимального проектирования и расчёта композиционных конструкций. Т. 1. М.: Физматлит, 2008. 256 с.
11. **Самарский А. А., Вабищевич П. Н.** Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
12. **Шашков А. Г.** Системно-структурный анализ процесса теплообмена и его применение. М.: Энергоатомиздат, 1983. 280 с.
13. **Карташов Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
14. **Рапопорт Э. Я.** Метод параметрической оптимизации в задачах многоканального управления системами с распределёнными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. № 4. С. 47–61.
15. **Рапопорт Э. Я.** Структурное моделирование объектов и систем управления с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2003. 299 с.
16. **Рапопорт Э. Я.** Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.
17. **Рапопорт Э. Я.** Оптимальное управление системами с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2009. 677 с.
18. **Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.** Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 2021. 286 с.
19. **Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.** Оптимальное по расходу энергии управление в системах с распределёнными параметрами // Автометрия. 2021. **57**, № 4. С. 17–28. DOI: 10.15372/AUT20210403.
20. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
21. **Ильина Н. А.** Синтез оптимальной по быстродействию системы двухканального управления процессом индукционного нагрева неограниченной пластины // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. 2021. **70**, № 2. С. 47–60.

Поступила в редакцию 18.03.2022

После доработки 24.05.2022

Принята к публикации 31.05.2022
