УПРАВЛЯЮЩИЕ И ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 624-40

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ

© Э. Я. Рапопорт, Ю. Э. Плешивцева

Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: edgar.rapoport@mail.ru, yulia_pl@mail.ru

Рассмотрена задача оптимального по типовым критериям качества управления подвижными объектами с распределёнными параметрами применительно к актуальной проблеме оптимизации температурных режимов работы технологических установок непрерывного действия для предварительного нагрева полуфабрикатов перед последующей обработкой давлением. Определены оптимальные по расходу энергии распределения мощности тепловыделения по длине нагревателя в стационарных режимах его работы, выступающие в роли искомых проектных решений объекта. Предложены алгоритмы программного и позиционного управления переходными режимами работы нагревательной установки, оптимальные по типовому квадратичному критерию качества в условиях заданной точности равномерного приближения конечного пространственного температурного распределения к требуемому. Показано, что процедура синтеза оптимального регулятора сводится к построению системы управления с линейными обратными связями по неполному измерению состояния при нестационарных коэффициентах передачи, определяемых предварительным расчётом программного управления.

Ключевые слова: системы с распределёнными параметрами, подвижные объекты технологической теплофизики, оптимизация стационарных состояний, оптимальное управление переходными режимами, программное управление, альтернансный метод, синтез оптимального управления.

DOI: 10.15372/AUT20220401

Введение. Широкий круг задач оптимизации процессов конвективного массопереноса в сплошных средах, дискретно перемещающихся или движущихся с постоянной скоростью, представляет самостоятельный интерес в самых различных предметных областях и относится к числу приоритетных в теории и технике управления объектами с распределёнными параметрами (ОРП) [1–4].

Большинство работ в этом направлении, начиная с базовой задачи нагрева «тонких» изделий в проходной печи [5], выполнено применительно к ОРП, описываемым гиперболическими уравнениями в частных производных первого порядка в пренебрежении процессом диффузии в направлении перемещения объекта [1–7]. Проблемы управления совмещёнными процессами диффузии и массопереноса, моделируемыми уравнениями второго порядка параболического типа [1, 3, 4, 7], исследованы в меньшей степени и применительно к процессам теплопередачи в подвижных средах рассматривались преимущественно для случаев дискретного («шагового») перемещения объекта [1, 7].

В представленной работе предлагается метод решения программного и позиционного оптимального управления движущимися с постоянной скоростью объектами технологической теплофизики, включая задачи оптимизации их стационарных состояний и приближения к этим состояниям в переходных режимах работы ОРП с заданной точностью, оцениваемой в равномерной метрике в соответствии с типичными для приложений требованиями [8, 9]. Предлагаемые алгоритмы динамической оптимизации и способы синтеза оптимальных систем управления подвижными ОРП опираются на разработанную технологию применения альтернансного метода поиска предварительно параметризуемых программных управляющих воздействий [8–10].

Математические модели объекта управления. Пусть температурное поле $Q(x,t)$ в процессе нагрева металлических полуфабрикатов перед последующими операциями пластического формоизменения, перемещающихся с постоянной скоростью V в нагревательной установке непрерывного действия, описывается по направлению движения в зависимости от пространственной координаты $x \in [0,1]$ и времени $t \in [0,t^*]$ линейным неоднородным уравнением теплопроводности в относительных единицах [7, 11]

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} - V\,\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + f(x)u(t) \tag{1}$$

с начальными

$$Q(x,0) = Q_0(x) \geqslant 0, \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

и граничными условиями

$$Q(0,t) = Q^0(t) = Q^0 = \mathrm{const} \geqslant 0; \qquad \frac{\partial Q(1,t)}{\partial x} + \alpha Q(1,t) = 0, \tag{3}$$

учитывающими тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на границе $x = 1$ по закону конвективной теплопередачи с заданным значением α критерия Био.

Здесь $u(t)$ — сосредоточенное управляющее воздействие по мощности внутреннего тепловыделения, стесняемое заданными ограничениями

$$u_{\min} \leqslant u(t) \leqslant u_{\max} \forall t \in [0,t^*]; \tag{4}$$

$f(x)$ — известная функция пространственного распределения источников тепла, Q^0 — заданная температура на входе $x = 0$ в нагреватель.

Применение к уравнениям объекта (1)–(3) конечного интегрального преобразования (КИП) по пространственному аргументу с ядром, равным собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$, $n = 1, 2, \ldots$, начально-краевой задачи (1)–(3), где μ_n^2 — собственные числа, приводит к представлению ОРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно временны́х мод $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x,t)$ в сходящийся в среднем ряд по $\varphi_n(\mu_n, x)$ [12]:

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n,t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n,t) + K_n u(t) + K_{1n} Q^0, \quad \bar{Q}_n(\mu_n,0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n,t)\varphi_n(\mu_n,x), \tag{6}$$

где K_n и $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ — моды конечного интегрального преобразования функции $f(x)$ и $Q(x,0)$ в (1), (2) соответственно; K_{1n} — заданные коэффициенты [12].

Известная технология метода КИП [12] определяет здесь применительно к граничным условиям (3) следующие выражения для собственных функций:

$$\varphi_n(\mu_n,t) = \mathbf{e}^{Vx/2}\frac{\sin(\beta_n x)}{E_n}; \quad \beta_n = \sqrt{\mu_n^2 - \frac{V^2}{4}}\,; \quad E_n^2 = \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{2\alpha + V}{2(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha V)}\Big], \tag{7}$$

где β_n — бесконечно возрастающая последовательность положительных корней трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_n}{\beta_n} = -\frac{2}{2\alpha + V}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

При этом разложение в ряд (6) представляется в форме

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha V)}{\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha V + \alpha + V/2} \mathbf{e}^{Vx/2} \sin(\beta_n x) \bar{Q}_n(\mu_n, t) \tag{9}$$

и в ряд (5) — в форме

$$K_n = \int_0^1 f(x) \mathbf{e}^{-Vx/2} \sin(\beta_n x)\, dx; \qquad K_{1n} = \beta_n. \tag{10}$$

Согласно полученным в [13] результатам решение бесконечной системы уравнений (5) может быть с любой требуемой точностью аппроксимировано решением укороченной системы, образуемой достаточно большим числом $N < \infty$ первых уравнений в (5) при $\bar{Q}_n(\mu_n, t) = 0, \quad \forall n > N$.

Всюду далее на этом основании учитываются N_1 мод $\bar{Q}_n$, $n = \overline{1, N_1}$, в (5), где $N_1 = \infty$ или $N_1 = N < \infty$ в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых алгоритмов управления.

В стационарном состоянии нагревательной установки непрерывного действия при $\partial Q(x,t)/\partial t = 0$ для всех $x \in [0,1]$ температурное поле описывается вместо (1)–(3) обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно неизменного во времени пространственного распределения температуры $Q(x)$:

$$\frac{d^2 Q(x)}{dx^2} - V \frac{\partial Q(x)}{\partial x} + u_1(x) = 0, \qquad x \in [0,1], \tag{11}$$

с граничными условиями

$$Q(0) = Q^0, \tag{12}$$

$$\frac{dQ(1)}{dx} + \alpha Q(1) = 0 \tag{13}$$

и внутренним управляющим воздействием $u_1(x)$, подчинённым, подобно (4), ограничению

$$0 \leqslant u_1(x) \leqslant u_{1\max} \forall x \in [0,1]. \tag{14}$$

При любом кусочно-непрерывном управлении $u_1(x)$, удовлетворяющем условиям (12), (13), температурное поле $Q(x)$ описывается следующим решением уравнения (11) в зависимости от граничных значений $Q(0)$ и $(dQ(0)/dx)|_{x=0}$ [14]:

$$Q(x) = -\int_0^x u_1(\xi) G(x - \xi)\, d\xi + Q^0 \Big[\frac{dG(x)}{dx} - VG(x)\Big] + G(x) \frac{dQ(0)}{dx}, \tag{15}$$

где $G(x)$ — функция Грина (импульсная переходная функция) такой краевой задачи:

$$G(x) = \frac{1}{V}\,(\mathbf{e}^{Vx} - 1). \tag{16}$$

Подстановка выражения (15) в граничное условие (13) приводит к линейному уравнению относительно $dQ(0)/dx$, решение которого однозначным образом определяет в форме (15) статическое состояние $Q(x)$ объекта (11), (12) при заданном пространственном управлении $u_1(x)$.

Оптимизация стационарных состояний. Пусть качество стационарного режима работы нагревательной установки непрерывного действия оценивается интегральным функционалом

$$I(u_1) = \int\limits_0^1 u_1(x)\,dx \to \min_{u_1(x)}, \tag{17}$$

характеризующим расход энергии на процесс управления.

Рассмотрим теперь следующую задачу программного оптимального управления.

Требуется найти для объекта (11)–(13) пространственное управляющее воздействие $u_1^*(x)$ и отвечающее ему стационарное распределение $Q(x)$ управляемой величины, которые обеспечивают достижение заданной температуры Q^{**} на выходе нагревателя $x = 1$:

$$Q(1) = Q^{**} \tag{18}$$

при минимально возможном значении критерия оптимальности (17) в условиях ограничения (14).

Нормальная форма записи уравнений объекта (11)–(13) приводит к его описанию следующей системой двух уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered}\frac{dQ(x)}{dx} = Q_1(x), \qquad Q(0) = Q^0;\\[2ex] \frac{dQ_1(x)}{dx} = VQ_1(x) - u_1(x); \qquad Q_1(1) = -\alpha Q(1) = -\alpha Q^{**},\end{gathered} \tag{19}$$

с фиксированными концами траектории на плоскости координат Q, Q_1 при учёте требования (18).

Используем для решения задачи оптимизации (14), (17), (19) стандартную процедуру принципа максимума с функцией Понтрягина

$$H(Q, Q_1, u_1(x), \psi(x)) = -u_1(x) + \psi_1(x)Q_1 + \psi_2(x)(VQ_1 - u_1(x)), \tag{20}$$

где $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x))$ — вектор сопряжённых переменных, описываемых системой уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dx} = 0, \qquad \psi_1(x) = \psi_1 = \mathrm{const}, \tag{21}$$

$$\frac{d\psi_2}{dx} = -\psi_1 - V\psi_2(x). \tag{22}$$

Базовое условие достижения максимума функции Понтрягина на оптимальном управлении определяет $u_1^*(x)$ в классе кусочно-постоянных функций пространственной переменной, принимающих только свои предельно допустимые значения в (14):

$$u_1^*(x) = \frac{u_{1\max}}{2}\,[1 + \operatorname{sign}(-1 - \psi_2(x))]. \tag{23}$$

Здесь $\psi_2(x)$ является решением уравнения (22) при $\psi_1 = \mathrm{const}$ согласно (21):

$$\psi_2(x) = -\frac{\psi_1}{V} + \Big(\psi_2(0) + \frac{\psi_1}{V}\Big)\mathbf{e}^{-Vx}. \tag{24}$$

Отсюда следует, что функция под знаком sign в (23) меняет знак не более 1 раза на промежутке $[0,1] \ni x$ и зависимость (23) представляется в явной форме распределения мощности тепловыделения по длине нагревателя:

$$u_1^*(x) = \begin{cases} u_{1\max}, & x \in [0, x^*]; \\ 0, & x \in (x^*, 1], \end{cases} \tag{25}$$

где по очевидным физическим соображениям $0 < x^* \leqslant 1$.

В соответствии с (25) теплосодержание, приобретаемое нагреваемым изделием на участке $[0, x^*] \ni x$ с управлением $u_1^*(x) = u_{1\max}$, должно увеличиваться вместе с расходом энергии в (17) при уменьшении значения x^* для компенсации в условиях (18) тепловых потерь в пределах зоны без источников тепловыделения с возрастающей в таком случае протяжённостью $1 - x^*$ по длине нагревателя.

Отсюда следует, что оптимальному значению критерия качества (17) отвечает максимальная величина $x^* = 1$ в (25) с постоянным значением $u_1^*(x) = u_{1\max}$ по всей длине нагревательной установки

$$u_1^*(x) = u_{1\max} \forall x \in [0,1], \tag{26}$$

обеспечивая тем самым наиболее простой вариант её конструктивного исполнения, в роли которого выступает искомое проектное решение объекта.

Температурное распределение $Q(x)$ при таком управлении определяется выражениями (15), (16):

$$Q(x) = \frac{u_{1\max}}{V}\Big[x - \frac{1}{V}\,(\mathbf{e}^{Vx} - 1)\Big] + Q^0 + \frac{1}{V}\,(\mathbf{e}^{Vx} - 1)\,\frac{dQ(0)}{dx}. \tag{27}$$

Граничное условие (13) при описании $Q(x)$ формулой (27) приводит к следующему равенству для вычисления $dQ(0)/dx$ в (27) с учётом требования (18):

$$\frac{dQ(0)}{dx} = \mathbf{e}^{-V}\Big[-\alpha Q^{**} + \frac{u_{1\max}}{V}\,(\mathbf{e}^{V} - 1)\Big]. \tag{28}$$

Теперь условие (18), рассматриваемое в качестве уравнения теплового баланса в стационарном состоянии объекта, приводит согласно (27), (28) к уравнению для вычисления требуемой величины:

$$u_{1\max} = V^2\,\frac{Q^{**}(1 + \alpha(1 - \mathbf{e}^{-V})/V) - Q^0}{V + \mathbf{e}^{-V} - 1}. \tag{29}$$

Зависимости (26)–(29) полностью определяют управление $u_1^*(x)$ и температурное поле $Q(x)$ в рассматриваемой задаче оптимизации по критерию (17) стационарного состояния объекта (11)–(13).

Программное управление переходными процессами. В работе нагревательных установок непрерывного действия значительное место занимают процессы перехода от предыдущего стационарного состояния $(Q_1^0, Q_1^{**}, V_1, Q^{(1)}(x))$ к последующему $(Q_2^0, Q_2^{**}, V_2, Q^{(2)}(x))$ в связи с изменением (в любой комбинации) заданных технологическими инструкциями значений температуры Q^0 на входе в нагреватель, требуемой температуры Q^{**} на его выходе, или/и необходимой скорости движения V [7].

Температурное поле $Q(x,t)$ нагреваемого тела моделируется в переходном процессе уравнениями (1)–(3) при $V = V_2$, $Q^0 = Q_2^0$, где начальное состояние $Q(x,0)$ совпадает с $Q^{(1)}(x)$, и следует принять $f(x) = 1$ в предположении на основании (26), что равномерное распределение мощности нагрева по пространственной координате сохраняется в любом режиме работы объекта.

При этом представление объекта управления в пространстве модальных переменных $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$, $n = \overline{1, N_1}$, управляемой величины $Q(x,t)$ принимает подобный (5), (6) вид при

$$K_n = \int\limits_0^1 \mathbf{e}^{-V_2 x/2} \sin(\beta_n x)\, dx = \frac{1}{\mu_n^2}\Big[\beta_n - \mathbf{e}^{-V_2/2}\Big(\frac{V_2}{2}\sin\beta_n + \beta_n \cos\beta_n\Big)\Big]. \tag{30}$$

Постановка задачи оптимального управления. Пусть качество переходного процесса при заранее фиксируемой его продолжительности t^* оценивается типичным квадратичным критерием оптимальности [9, 15]

$$I_1(u) = \int\limits_0^{t^*}\int\limits_0^1 \rho_Q Q^2(x,t) r(x)\, dx\, dt + \int\limits_0^{t^*} u^2(t)\, dt \to \min_{u(t)}, \tag{31}$$

где ρ_Q — заданный положительный весовой коэффициент, $r(x)$ — весовая функция конечного интегрального преобразования $Q(x,t)$ [12].

Пусть далее необходимо обеспечить за фиксируемое заранее время t^* заданную точность ε равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины $Q(x,t^*)$ к $Q^{(2)}(x)$ согласно соотношению

$$\max_{x\in[0,1]} |Q(x,t^*) - Q^{(2)}(x)| \leqslant \varepsilon, \tag{32}$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний объекта управления [7–10].

Переход к описанию рассматриваемого объекта в терминах модальных переменных приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций [12] к представлению критерия оптимальности (31) и требования (32) в следующей форме:

$$I_1(u) = \int\limits_0^{t^*} \Big[\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + u^2(t)\Big] dt \to \min_u, \tag{33}$$

$$\max_{x\in[0,1]} \Big| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, t^*)\varphi_n(\mu_n, x) - Q^{(2)}(x)\Big| \leqslant \varepsilon. \tag{34}$$

Будем считать далее, что управляющее воздействие $u(t)$ не стеснено ограничением (4) с целью определения минимально достижимых значений функционала (33) в открытой области изменения $u(t)$ и последующего выбора по полученным результатам предельных значений $u(t)$ в (4), необходимых для реализации максимального эффекта по величине $I_1(u)$.

Рассмотрим теперь следующую задачу динамической оптимизации переходного режима работы нагревательной установки непрерывного действия в технологическом комплексе «нагрев — обработка давлением».

Требуется найти программное оптимальное управление $u^*(t)$, обеспечивающее перевод бесконечномерного объекта (5), (6), (30) в требуемое конечное состояние (34) при минимально возможном значении критерия оптимальности (33).

Структура оптимального управления и краевая задач принципа максимума. Стандартная процедура принципа максимума, распространяемого на рассматриваемую бесконечномерную задачу оптимизации [8], приводит к определению $u^*(t)$ в форме явной функции от соответствующих оптимальному процессу величин $\psi^*(t) = (\psi_n^*(t))$, $n = \overline{1, N_1}$, сопряжённых переменных $\psi_n(t)$ [9]:

$$u^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_1} K_n \psi_n^*(t), \tag{35}$$

где вектор $\psi(t) = (\psi_n(t))$, $n = \overline{1, N_1}$, описывается системой уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = 2\rho_Q \bar{Q}_i(\mu_i, t) + \mu_i^2 \psi_i(t), \qquad i = \overline{1, N_1}. \tag{36}$$

Уравнения (5) с подстановкой управляющего воздействия в форме (35) образуют совместно с (36) линейную программно-управляемую систему (П-систему краевой задачи принципа максимума [16]), замыкаемую относительно неизвестных $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$, $n = \overline{1, N_1}$, и $\psi(t)$ требованиями (34) к конечному состоянию объекта [9]:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = 2\rho_Q \bar{Q}_i(\mu_i, t) + \mu_i^2 \psi_i(t), \qquad i = \overline{1, N_1}\,;$$

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \frac{1}{2} K_n \sum_{i=1}^{N_1} K_i \psi_i(t), \qquad n = \overline{1, N_1}\,; \tag{37}$$

$$\bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n).$$

Решение этой системы может быть получено в векторно-матричной форме [9]:

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{At} \begin{bmatrix} \psi(0) \\ \bar{Q}(0) \end{bmatrix}; \qquad \psi(t) = (\psi_n(t)), \quad \bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t)), \quad n = \overline{1, N_1}\,. \tag{38}$$

Здесь A — матрица коэффициентов системы (37). Матричная экспонента $\mathbf{e}^{At}$ представляется в блочной форме

$$\mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}, \tag{39}$$

где блоки $A_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, — известные в соответствии со структурой системы уравнений (37) матрицы размерности $N_1 \times N_1$ [9].

Параметризация управляющих воздействий. Согласно (38) $\psi(t)$, а следовательно, и программное управление $u(t)$ в (35) определяются для каждой известной величины $\bar{Q}(0)$ с точностью до вектора $\psi(0)$ начальных значений сопряжённых переменных, который выступает в роли «естественного» параметрического представления $u^*(t)$ [16, 17]. Подобный способ параметризации оказывается неконструктивным для систем с распределёнными параметрами в силу бесконечной размерности $\psi(t)$ при $N_1 = \infty$.

В работе [18] применительно к целевым множествам вида (34) предложен способ последовательной конечномерной параметризации управляющих воздействий (ψ-параметризация) на множестве M-мерных векторов $\psi^{(M)}$ значений $\tilde{\psi}_i = \psi_i(t^*)$, $i = \overline{1, M}$, первых $M < N_1$ сопряжённых функций в (36) при равных нулю всех остальных значений $\psi_i(t^*)$:

$$\psi^{(M)} = (\psi_i(t^*)) = (\tilde{\psi}_i), \quad i = \overline{1, M}\,; \qquad \psi_i(t^*) = 0, \quad i > M. \tag{40}$$

Как показано в [18], с возрастанием M обеспечивается попадание под действием параметризуемых на множестве параметров (40) управляющих воздействий (35) в сужающееся к началу координат в пространстве $\bar{Q}(t)$ целевое множество требуемых состояний объекта, гарантируя выполнение условия (34) для достижимых значений ε при некотором конечном значении $M \geqslant 1$.

Явная форма ψ-параметризованного управления (35) может быть получена в результате прогонки начальных условий в (38) к конечному моменту $t = t^*$ в форме линейной зависимости от определяемого согласно (40) значения $\psi^*(t^*)$ и начального состояния объекта управления $\bar{Q}(0)$ [9]:

$$u^*(t) = \frac{1}{2}\, K\psi^*(t), \tag{41}$$

где $K = (K_n)$, $n = \overline{1, N_1}$, — матрица-строка; $\psi^*(t)$ — матрица-столбец:

$$\psi^*(t) = [\hat{A}_{11}(t^* - t) + \hat{A}_{12}(t^* - t)B(t^*)]\psi^*(t^*) + \hat{A}_{12}(t^* - t)B_1(t^*)\bar{Q}(0). \tag{42}$$

Здесь $\hat{A}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, — подобные (39) блоки обратной матрицы $\mathbf{e}^{-A(t^*-t)}$;

$$B(t^*) = A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*); \qquad B_1(t^*) = A_{22}(t^*) - A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*)A_{12}(t^*). \tag{43}$$

Редукция к задаче полубесконечной оптимизации. Интегрирование системы уравнений (37) с ψ-параметризованным управлением (41), (42) позволяет получить зависимости $Q(x, \psi^{(M)})$ управляемой величины в конце процесса управления и критерия оптимальности $I_1(\psi^{(M)})$ в (6) и (33) в форме явной функции только своих аргументов.

В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [7–10, 18]

$$I_1(\psi^{(M)}) \to \min_{\psi^{(M)}}; \qquad \max_{x\in[0,1]} |Q(x, \psi^{(M)}) - Q^{(2)}(x)| \leqslant \varepsilon \tag{44}$$

на минимум функции $I_1(\psi^{(M)})$ конечного числа переменных $\tilde{\psi}_i$, $i = \overline{1, M}$, в (40) с бесконечным числом ограничений, порождаемых требованием выполнения условия (34) для всех $x \in [0, 1]$ и заменяемых одним ограничением на функцию максимума в (44).

Как показано в [18], для заданной величины ε в (34) размерность M вектора $\psi^{(M)}$ однозначно определяется соотношением

$$M = v \forall \varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(v)} \leqslant \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(v-1)}, \tag{45}$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(v)} = \min_{\psi^{(v)}} \Big[\max_{x \in [0,1]} |Q(x, \psi^{(v)}) - Q^{(2)}(x)| \Big]. \tag{46}$$

Значения $\varepsilon_{\min}^{(v)}$ образуют, как правило, убывающую цепочку неравенств с возрастанием v [7–10, 18], и задача (44) оказывается разрешимой, если $\varepsilon \geqslant \varepsilon_{\inf}$. Здесь нижняя грань $\varepsilon_{\inf}$ достижимых значений ε оказывается равной минимаксу $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$, где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно требуемых конечных состояний $Q(x, t^*)$ объекта управления [10].

Решение ЗПО (44) относительно вектора параметров $\psi^{(M)}$, а также априори неизвестной величины минимакса $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ в (45) в случае, когда $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$ может быть получено в условиях малостеснительных допущений альтернансным методом [8, 10, 19]. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомого значения $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, M}$, вектора $\psi^{(M)}$ в (40) и дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения результирующего состояния $Q(x, \psi_*^{(M)})$ объекта управления, диктуемой закономерностями предметной области.

Согласно альтернансным свойствам равные допустимой величине ε одинаковые значения максимальных отклонений $\max\limits_{x \in [0,1]} |Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{(2)}(x)|$ достигаются в некоторых точках x_j^0, $j = \overline{1, R}$, на отрезке $[0, 1] \ni x$. Общее число R этих точек, где

$$R = \begin{cases} M, & \text{если} \quad \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}; \\ M + 1, & \text{если} \quad \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}, \end{cases} \tag{47}$$

оказывается равным числу искомых неизвестных в задаче (44), порождая тем самым замкнутую относительно этих неизвестных систему соотношений

$$|Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{(2)}(x_j^0)| = \varepsilon, \qquad j = \overline{1, R}. \tag{48}$$

При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой $Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{(2)}(x)$ на отрезке $[0, 1] \ni x$, позволяющей идентифицировать координаты x_j^0 и знаки $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{(2)}(x_j^0)$, равенства (48), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(x, \psi_*^{(M)}) - Q^{(2)}(x)$ во внутренних точках $x_{ig} \in \operatorname{int}[0, 1]$, $g = \overline{1, R_1}$, где $R_1 \leqslant R$ и $x_{jg}^0 \in \{x_j^0\}$, переводятся в систему уравнений

$$\begin{gathered} Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{(2)}(x_j^0) = \pm\varepsilon, \qquad j = \overline{1, R}; \\ \frac{\partial}{\partial x} [Q(x_{jg}^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{(2)}(x_{jg}^0)] = 0, \qquad g = \overline{1, R_1}, \end{gathered} \tag{49}$$

с однозначно определяемым знаком ε в каждой точке x_j^0. Эта система разрешается относительно $\tilde{\psi}_i^*$, $i = \overline{1, M}$, значений x_{jg}^0, $g = \overline{1, R_1}$, а также $\varepsilon_{\min}^{(M)}$, если $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$ в (44).

Найденные значения $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, M}$, полностью определяют согласно (40), (42) искомое программное управление в форме (41) для заданного значения ε, если $\varepsilon \geqslant \varepsilon_{\text{inf}}$.

Синтез оптимальной системы управления переходными процессами. Применение известных процедур аналитического конструирования оптимальных регуляторов в рассматриваемой линейно-квадратичной задаче оптимизации существенно затрудняется отсутствием классических условий трансверсальности на негладкой границе целевого множества (34) [7, 9].

В исследуемой задаче управления переходными режимами работы нагревательной установки может быть использован метод аналитического синтеза управляющих воздействий с обратной связью $u^*(\bar{Q}, t)$, осуществляемый с помощью рассматриваемых в роли условий трансверсальности на правом конце оптимальной траектории $Q^*(x, t^*)$ известных конечных состояний управляемых и сопряжённых переменных, которые определяются предварительным расчётом программного управления [9, 20].

Перенос (прогонка) начальных значений $\psi(0)$, $\bar{Q}(0)$ в (38) в конечный момент времени t^* приводит к решению системы уравнений (37) в следующем виде (вместо (38) с учётом блочной формы (39) матричной экспоненты) [9]:

$$\psi^*(t^*) = A_{11}(t^* - t)\psi^*(t) + A_{12}(t^* - t)\bar{Q}^*(t), \tag{50}$$

$$\bar{Q}^*(t^*) = A_{21}(t^* - t)\psi^*(t) + A_{22}(t^* - t)\bar{Q}^*(t). \tag{51}$$

Здесь $\psi^*(t)$, $\bar{Q}^*(t)$ соответствуют оптимальному процессу и конечные значения $\psi^*(t^*)$ фиксируются расчётом программного управления при определении $\psi_*^{(M)}$ в (40), а $\bar{Q}^*(t^*)$ вычисляются в зависимости от начального состояния объекта $\bar{Q}(0)$ согласно соотношению [9]

$$\bar{Q}^*(t^*) = B(t^*)\psi^*(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0). \tag{52}$$

Матрицы $B(t^*)$ и $B_1(t^*)$ в (52) вычисляются по выражениям (43).

После умножения слева равенств (50), (51) соответственно на известные $N_1 \times N_1$ матрицы

$$\operatorname{diag}[\bar{Q}_j^*(t^*)], \qquad \bar{Q}^*(t^*) = (\bar{Q}_j^*(t^*)), \qquad j = \overline{1, N_1},$$

$$\operatorname{diag}[\psi_j^*(t^*)], \qquad \psi^*(t^*) = (\psi_j^*(t^*)), \qquad j = \overline{1, N_1},$$

левые части соотношений (50), (51) становятся одинаковыми. Последующее определение разности преобразованных подобным способом уравнений (50), (51) приводит с учётом выражений (40), (52) к следующему результату, однозначным образом определяющему зависимость сопряжённых переменных $\psi^*(t, \psi^*(t^*), \bar{Q}(0), \bar{Q}(t))$ в оптимальном процессе от своих аргументов по предварительно вычисленным решениям задачи программного управления [9]:

$$\psi^*(t, \psi^*(t^*), \bar{Q}(0), \bar{Q}(t)) = T_1(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*))T_2(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*))\bar{Q}(t). \tag{53}$$

Здесь

$$T_1 = [W_1 A_{11}(t^* - t) - W_2 A_{21}(t^* - t)]^{-1}; \qquad T_2 = [W_2 A_{22}(t^* - t) - W_1 A_{12}(t^* - t)];$$
$$W_1 = \operatorname{diag}[\bar{Q}_j^*(t^*)]; \qquad W_2 = \operatorname{diag}[\psi_j^*(t^*)]. \tag{54}$$

Подстановка (53) в выражение (41) для программного управления приводит к линейному закону синтеза оптимального регулятора $u^*(\bar{Q},t)$ с нестационарными коэффициентами обратных связей в системе управления с измерением состояния $\bar{Q}(t)$:

$$u^*(\bar{Q},t) = \frac{1}{2}\, KT_1T_2\bar{Q}(t), \tag{55}$$

где матрицы T_1, T_2 представляются согласно (40), (52), (54) известными функциями времени с фиксируемыми на протяжении процесса управления значениями $\bar{Q}(0)$, которые находятся по результатам наблюдения $\bar{Q}(t)$ в момент $t=0$.

Переход в (55) от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q(x_u,t) = (Q(x_{ui},t))$ в r точках $x_{ui} \in [0,1]$, $i=\overline{1,r}$, определяется в соответствии с (6) векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q(x_u,t) = \Phi_u\bar{Q}(t), \qquad \Phi_u = [\varphi_n(\mu_n,x_{ui})], \qquad n=\overline{1,N_1}, \qquad i=\overline{1,r}. \tag{56}$$

В условиях $r<N_1$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}(t)$ по значениям $Q(x_u,t)$ требуется построение наблюдателя состояния полного или пониженного порядка [21]. Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (5) можно ограничиться учётом только M первых составляющих $\bar{Q}(t)$ с минимальным их числом M, требуемым для решения системы уравнений (49) относительно вектора $\psi_*^{(M)}$, то $\bar{Q}(t)$ непосредственно определяется решением системы уравнений (56) при $r=M$, $N_1=N=M$:

$$\bar{Q}(t) = \Phi_u^{-1}Q(x_u,t). \tag{57}$$

Подстановка (57) в (55) приводит к линейному алгоритму синтеза с обратными связями по измеряемому выходу объекта

$$u^*(Q(x_u,t),t) = \frac{1}{2}\, KT_1T_2\Phi_u^{-1}Q(x_u,t). \tag{58}$$

Момент $t_{\text{кон}}$ окончания оптимального процесса управления переходным режимом фиксируется достижением в (55) равенства

$$\bar{Q}(t_{\text{кон}}) = \bar{Q}^*(t^*), \tag{59}$$

где $\bar{Q}^*(t^*)$ заведомо определяется согласно (52) в процессе предварительного расчёта программного управления.

Если в роли M точек x_{ui}, $i=\overline{1,M}$, в (57) и (58) используются M координат x_k^0, $k\in\{\,\overline{1,M}\,\}$, из множества R значений x_j^0 в системе уравнений (49), то аналогично (59) достигаемые в (58) равенства

$$Q(x_{ui},t) - Q^{(2)}(x_{ui}) = \pm\varepsilon, \qquad i=\overline{1,M}, \tag{60}$$

с требуемыми согласно (49) знаками сигнализируют о попадании в заданное целевое множество $Q(x,t^*)$ в (32) и автоматически фиксируют момент окончания переходного режима.

Синтез системы стабилизации стационарного состояния. Получаемое в оптимальном процессе управления переходным режимом пространственное распределение управляемой величины

$$Q^*(x,t^*) = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^*(\mu_n,t^*)\varphi_n(\mu_n,x), \tag{61}$$

где $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t^*)$ определяется соотношением (52), отвечает требованию (32). Теперь дальнейшая задача сводится к построению системы автоматической стабилизации последующего стационарного состояния $Q^{(2)}(x)$, которая обеспечивает необходимую точность поддержания температуры Q_2^{**} на выходе нагревателя, непрерывного действия в условиях воздействия достаточно малых внешних возмущений по величинам Q_2^0, Q_2^{**} и V_2.

Объект управления на этой стадии процесса стабилизации описывается при $V = V_2$ и $f(x) = 1$ системой уравнений (1)–(3) с начальным состоянием

$$Q_0(x) = Q^*(x, t^*) \tag{62}$$

в (2) и граничным условием $Q(0, t) = Q_2^0$ в (3). Эквивалентное представление ОРП (1)–(3) в терминах модальных переменных опять сводится к виду (5), (6), если в роли $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ рассматривать моды $Q_0(x)$ в (62) и принять $V = V_2$ в (7)–(9).

В условиях полной управляемости объекта по его стационарному состоянию, устанавливаемой описанным в [22] способом, алгоритм управления с линейной обратной связью по наблюдаемым модальным переменным

$$u(\bar{Q}) = \sum_{n=1}^{N_1} K_{pn}(\bar{Q}_n^{(2)} - \bar{Q}_n(\mu_n, t)) \tag{63}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость относительно $\lim\limits_{t\to\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) = \bar{Q}_n^{(2)}$, $n = \overline{1, N_1}$, где $\bar{Q}_n^{(2)}$ — моды $Q^{(2)}(x)$, и требуемые качественные показатели процесса стабилизации при надлежащем выборе постоянных коэффициентов K_{pn} в (63) [21, 23].

В частности, при выборе K_{pn} в форме, пропорциональной значению собственной функции $\varphi_n(\mu_n, x)$ в точке $x = 1$:

$$K_{pn} = K_p \varphi_n(\mu_n, 1), \qquad n = \overline{1, N_1}, \tag{64}$$

будем иметь в соответствии с (6) при $N_1 = \infty$

$$u(Q(1, t)) = K_p(Q_2^{**} - Q(1, t)), \tag{65}$$

следовательно, в таком случае алгоритм управления (63) реализуется в типовой системе регулирования температуры на выходе нагревателя $x = 1$, если необходимый по исходным требованиям коэффициент K_p передачи пропорционального регулятора в (65) (в том числе исходя из условий заданной точности отработки возмущений в стационарном режиме работы) обеспечивает асимптотическую устойчивость равновесного состояния.

Рассматриваемый объект управления представляет собой распределённый x-блок [12, 24] с передаточной функцией $W_x(x, p)$ (p — оператор Лапласа) по каналу передачи от сосредоточенного управляющего воздействия $u(t)$ в (1), (5) к распределённому выходу $Q(x, t)$, которая определяется по известной функции Грина ОРП, заданной в форме её разложения в бесконечный ряд по собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$ [12].

На этом основании получаем после простых преобразований структурное представление объекта параллельным соединением бесконечного числа типовых апериодических звеньев первого порядка с коэффициентами передачи $K_n^*(x)$ и постоянными времени T_n^* [12]:

$$W_x(x, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n^*(x)}{T_n^* p + 1}. \tag{66}$$

Здесь

$$K_n^*(x) = \frac{\beta_n}{E_n^2 \mu_n^4} \Big[1 - \mathbf{e}^{-V_2/2} \Big(1 - \frac{V_2}{2\alpha + V_2}\Big) \cos \beta_n\Big] \mathbf{e}^{V_2 x/2} \sin(\beta_n x), \tag{67}$$

$$T_n^* = \frac{1}{\mu_n^2}, \tag{68}$$

где μ_n, β_n, E_n^2 находятся в соответствии с (7), (8).

В частности, для управляемой величины $Q(1,t)$ на выходе нагревателя $x = 1$ будем иметь в (67)

$$K_n^*(1) = \frac{1}{E_n^2 \mu_n^4} \beta_n \Big[1 - \mathbf{e}^{-V_2/2} \Big(1 - \frac{V_2}{2\alpha + V_2}\Big) \cos \beta_n\Big] \mathbf{e}^{V_2/2} \sin \beta_n, \tag{69}$$

где согласно (8)

$$\operatorname{sign} K_n^*(1) = \operatorname{sign}(\sin \beta_n) = (-1)^{n+1}. \tag{70}$$

Нетрудно показать, что в таком случае передаточная функция $W_p(p)$ разомкнутой системы пропорционального регулирования

$$W_p(p) = K_p W_x(1,p) \tag{71}$$

заведомо удовлетворяет в условиях (66) частотному критерию Найквиста, обеспечивая асимптотическую устойчивость замкнутой системы при любой величине $K_p > 0$.

Пример. Оптимальные распределения температуры по длине нагревателя в предыдущем $(Q_1^0, Q_1^{**}, V_1, Q^{(1)}(x), u_{1\max}^{(1)})$ и последующем $(Q_2^0, Q_2^{**}, V_2, Q^{(2)}(x), u_{1\max}^{(2)})$ стационарных режимах его работы, определяемые согласно (26)–(29), представлены на рис. 1 при $Q_1^0 = 0{,}1$; $Q_1^{**} = 0{,}6$; $V_1 = 4$; $Q_2^0 = 0$; $Q_2^{**} = 0{,}4$; $V_2 = 8$; $\alpha = 0{,}5$; $u_{1\max}^{(1)} = 3{,}04$; $u_{1\max}^{(2)} = 3{,}88$.

В задаче программного управления переходным режимом работы нагревательной установки, описываемым уравнениями (1)–(3), ограничимся в целях бо́льшей простоты

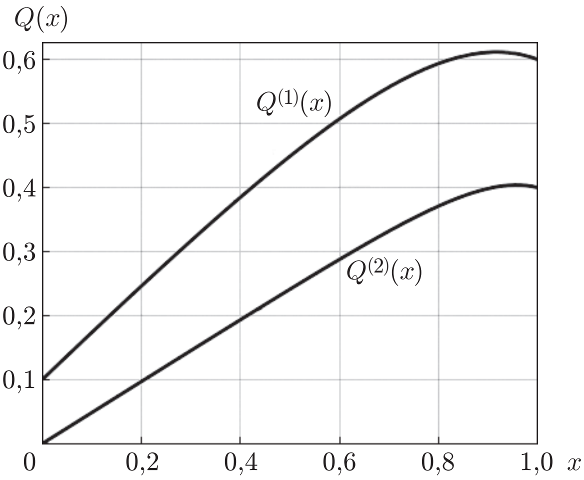

Рис. 1. Оптимальное распределение температуры по длине установки непрерывного действия в стационарном режиме её работы

и наглядности учётом только двух модальных переменных в сумме (6) при $N_1 = N = 2$ в (33)–(37) и типичным случаем $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (44), (46), для которого следует принять согласно (45) $M = 2$; $\psi_*^{(M)} = \psi_*^{(2)} = (\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*)$ для вектора $\psi^{(M)}$ в (40).

Поскольку $Q(x, \psi_*^{(M)})$ в (49) описывается рядом (6) в форме (9) с вектором модальных переменных $\bar{Q}^*(t^*)$ в (52), то система уравнений (49) приводится к линейному виду относительно $\psi_*^{(M)}$:

$$Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{(2)}(x_j^0) = \Phi\bar{Q}^*(t^*) - Q^{(2)}(x_j^0) = \pm\varepsilon, \qquad \Phi = [\varphi_n(\mu_n, x_j^0)],$$

$$n = \overline{1, N_1}\,, \qquad j = \overline{1, R}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\,[Q(x_{jg}^0, \psi_*^{(M)}) - Q^{(2)}(x_{jg}^0)] = \Phi_1\bar{Q}^*(t^*) - \frac{dQ^{(2)}(x_{jg}^0)}{dx} = 0, \tag{72}$$

$$\Phi_1 = \Big[\frac{d}{dx}\,\varphi_n(\mu_n, x_{jg}^0)\Big], \qquad n = \overline{1, N_1}, \quad g = \overline{1, R_1}.$$

В рассматриваемом случае $N_1 = N = M = 2$ эта система с учётом (52) и выражений (43) после элементарных вычислений представляется в следующей форме:

$$\Phi[F^{(1)}(t^*)\psi_*^{(2)} + F^{(2)}(t^*)\bar{Q}(0)] - Q^{(2)}(x_j^0) = \pm\varepsilon, \tag{73}$$

$$\Phi_1[F^{(1)}(t^*)\psi_*^{(2)} + F^{(2)}(t^*)\bar{Q}(0)] - \frac{dQ^{(2)}(x_{jg}^0)}{dx} = 0, \tag{74}$$

где

$$F^{(1)}(t^*) = \begin{bmatrix} F_{11}^{(1)}(t^*) & F_{12}^{(1)}(t^*) \\ F_{21}^{(1)}(t^*) & F_{22}^{(1)}(t^*) \end{bmatrix}; \qquad F^{(2)}(t^*) = \begin{bmatrix} F_{11}^{(2)}(t^*) & F_{12}^{(2)}(t^*) \\ F_{21}^{(2)}(t^*) & F_{22}^{(2)}(t^*) \end{bmatrix}, \tag{75}$$

все элементы размером 2×2 матриц $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ становятся известными функциями элементов $A_{ij}(t)$ в (39), которые вычисляются по описанной в [9] схеме.

При $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ и $R = M + 1 = 3$ согласно (47) получаем матрицу Φ размером 3×2 в (72). Подстановка этой матрицы в (73) приводит к системе трёх равенств

$$Q(x_j^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{(2)}(x_j^0) = (F_{11}^{(1)}(t^*)\varphi_1(\mu_1, x_j^0) + F_{21}^{(1)}(t^*)\varphi_2(\mu_2, x_j^0))\tilde{\psi}_1^* +$$

$$+ (F_{12}^{(1)}(t^*)\varphi_1(\mu_1, x_j^0) + F_{22}^{(1)}(t^*)\varphi_2(\mu_2, x_j^0))\tilde{\psi}_2^* +$$

$$+ (F_{11}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_1(0) + F_{12}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_2(0))\varphi_1(\mu_1, x_j^0) +$$

$$+ (F_{21}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_1(0) + F_{22}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_2(0))\varphi_2(\mu_2, x_j^0) - Q^{(2)}(x_j^0) = \pm\varepsilon_{\min}^{(2)}, \quad j = \overline{1, 3}\,, \tag{76}$$

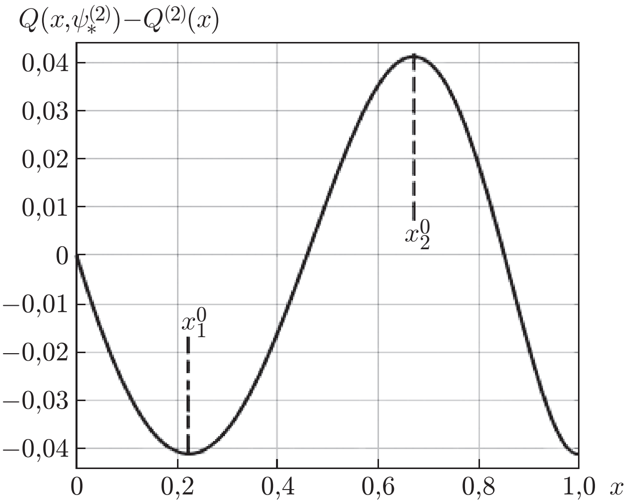

Рис. 2. Температурное распределение в конце процесса оптимального управления переходным режимом работы нагревательной установки ($\tilde{\psi}_1^* = -2{,}66$; $\tilde{\psi}_2^* = 78{,}40$; $t^* = 0{,}1$; $\varepsilon_{\min}^{(2)} = 0{,}04$; $x_1^0 = 0{,}22$; $x_2^0 = 0{,}67$)

которая замыкается относительно всех неизвестных $\tilde{\psi}_1^*$, $\tilde{\psi}_2^*$, $\varepsilon_{\min}^{(2)}$, x_{jg}^0, $g = \overline{1, R_1}$, условиями (74), записываемыми в аналогичной (76) форме. Здесь $\bar{Q}(0) = (\bar{Q}_1(0), \bar{Q}_2(0))$ — моды начального состояния $Q^{(1)}(x)$, определяемые температурными распределениями (27)–(29) оптимального стационарного режима работы нагревателя.

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном переходном процессе фиксируют подобно [7–10] форму кривой $Q(x, \psi_*^{(2)})$ результирующего распределения температуры по длине нагревателя в конце переходного режима его работы (рис. 2), что позволяет заведомо идентифицировать в (76) координаты точек x_1^0, $x_2^0 \in (0, 1)$, $x_3^0 = 1$ и знаки $Q(x_j^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{(2)}(x_j^0)$ в условиях $Q(0, \psi_*^{(2)}) = Q_2^0$. В результате равенства (76), дополняемые условиями (74) существования экстремума в двух точках x_1^0, x_2^0, редуцируются к замкнутой системе уравнений вида (49) (см. рис. 2):

$$Q(x_1^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{(2)}(x_1^0) = -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \qquad Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{(2)}(x_2^0) = \varepsilon_{\min}^{(2)},$$

$$Q(1, \psi_*^{(2)}) - Q^{(2)}(1) = -\varepsilon_{\min}^{(2)},$$

$$\frac{\partial Q(x_1^0, \psi_*^{(2)})}{\partial x} - \frac{dQ^{(2)}(x_1^0)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x_2^0, \psi_*^{(2)})}{\partial x} - \frac{dQ^{(2)}(x_2^0)}{\partial x} = 0,$$

разрешаемой относительно всех искомых величин стандартными численными методами. Получаемые результаты полностью определяют линейный алгоритм синтеза оптимального управления в форме (55), (58).

На рис. 2, 3 представлены некоторые расчётные результаты, полученные при синтезе оптимального управления в переходном режиме работы нагревательной установки непрерывного действия для значений $\alpha = 0{,}5$; $t^* = 0{,}1$; $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ при выборе двух измерителей управляемой величины в точках $x_{u1} = x_2^0$; $x_{u2} = 1$. На рис. 2 показано распределение температуры по длине нагревателя в конце переходного процесса. Рис. 3 иллюстрирует

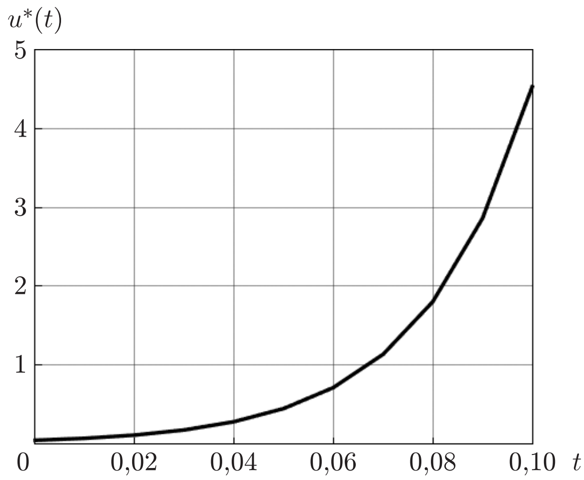

Рис. 3. Зависимость управляющего воздействия от изменяющихся во времени сигналов обратной связи в переходном режиме работы нагревательной установки

поведение в переходном процессе управляющего воздействия, изменяющегося во времени по алгоритму (58) с обратными связями по наблюдаемым переменным $Q(x_{u1}, t)$, $Q(x_{u2}, t)$. Как следует из рис. 3, $u^*(t^*) = \max\limits_{t\in[0,t^*]} u^*(t) = 4{,}52 > u^{(2)}_{1\max} = 3{,}88$, что приводит к необходимости выбора $u_{\max} \geqslant u^*(t^*) > u^{(2)}_{1\max}$ в (4) при $t^* = 0{,}1$.

Заключение. Предложен метод оптимизации температурных режимов в нагревательной установке непрерывного действия, описываемых совмещёнными уравнениями теплопроводности и массопереноса в среде, движущейся с постоянной скоростью. Найденные алгоритмы пространственного распределения мощности тепловыделения по длине нагревателя в стационарном режиме его работы определяют искомые проектные решения объекта. Предлагаемый метод решения задач программного управления и аналитического конструирования оптимального регулятора в переходных режимах функционирования технологической установки разработан применительно к наиболее употребительным в приложениях оценкам целевых множеств конечных температурных состояний в равномерной метрике. Полученные уравнения регулятора сводятся к линейным алгоритмам обратной связи с нестационарными коэффициентами, фиксируемыми предварительным расчётом программного управления.

Погрешности реализации предлагаемого метода определяются требованиями к точности описания модели объекта укороченной системой уравнений для модальных составляющих температурного поля.

Финансирование. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 22-29-00180, https://rscf.ru/project/22-29-00180/, ФГБУ ВО «Самарский государственный технический университет».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н.** Управление нагревом металла. М.: Металлургия, 1981. 271 с.
2. **Сиразетдинов Т. К.** Оптимизация систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
3. **Кафаров В. В.** Методы кибернетики в химии и химической технологии. М.: Химия, 1985. 448 с.

4. **Демиденко Н. Д.** Управляемые распределённые системы. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1999. 393 с.
5. **Бутковский А. Г.** Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
6. **Аргучинцев А. В.** Оптимальное управление гиперболическими системами. М.: Физматлит, 2007. 168 с.
7. **Рапопорт Э. Я.** Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. 279 с.
8. **Рапопорт Э. Я.** Оптимальное управление системами с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2009. 677 с.
9. **Рапопорт Э. Я.** Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в линейно-квадратичных задачах управления системами с распределёнными параметрами при равномерных оценках целевых множеств // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2021. № 3. С. 23–38.
10. **Рапопорт Э. Я.** Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.
11. **Полянин А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
12. **Рапопорт Э. Я.** Структурное моделирование объектов и систем управления с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2003. 299 с.
13. **Коваль В. А.** Спектральный метод анализа и синтеза распределённых управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997. 191 с.
14. **Рапопорт Э. Я.** Минимаксная оптимизация стационарных состояний в системах с распределёнными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 2. С. 3–18.
15. **Егоров А. И., Знаменская Л. Н.** Введение в теорию управления системами с распределёнными параметрами. СПб.: Лань, 2017. 292 с.
16. **Федоренко Р. П.** Приближённое решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
17. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
18. **Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я.** Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределёнными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 3. С. 22–33.
19. **Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.** Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 2021. 286 с.
20. **Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.** Оптимальное по расходу энергии управление в системах с распределёнными параметрами // Автометрия. 2021. **57**, № 4. С. 17–28. DOI: 10.15372/AUT20210403.
21. **Рапопорт Э. Я.** Анализ и синтез систем автоматического управления системами с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2005. 292 с.
22. **Рапопорт Э. Я.** Программная управляемость линейных многомерных систем с распределёнными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2015. № 2. С. 22–39.
23. **Ким Д. П.** Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007. 440 с.
24. **Бутковский А. Г.** Структурная теория распределённых систем. М.: Наука, 1977. 320 с.

Поступила в редакцию 24.01.2022
После доработки 24.05.2022
Принята к публикации 30.06.2022