УДК 535.42:681.786

ФОРМИРОВАНИЕ В КОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОТЯЖЁННОГО ЩЕЛЕВОГО ОТВЕРСТИЯ СИММЕТРИЧНОГО ТИПА С АБСОЛЮТНО ПОГЛОЩАЮЩИМИ ВНУТРЕННИМИ ГРАНЯМИ

© **Ю. В. Чугуй**

Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН, 630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41
E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru

Исследованы особенности формирования изображений внешних граней протяжённых (по глубине) щелевых отверстий постоянной толщины d симметричного типа (с равными входной и выходной апертурами D) с абсолютно поглощающими внутренними гранями. В основу расчётов положена оптико-физическая модель дифракционных явлений на протяжённых абсолютно поглощающих объектах с использованием эквивалентных транспарантов щелевого типа. Изучены структуры изображений таких объектов, формируемых в идеальных и дифракционно-ограниченных системах. Показано, что профили изображений передней и задней граней протяжённого щелевого отверстия в значительной степени зависят от параметра N, равного отношению критического угла дифракции $\theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d}$ к половинному угловому размеру θ_0 апертурного фильтра, а также от отношения апертуры щели D к размеру зоны Френеля $\delta_d = \sqrt{\lambda d}$. Установлено, что при $N = \theta_{\text{кр}}/\theta_0 \gg 1$ (глубина резкости системы $\Delta z = \lambda/\theta_0^2 \gg d$) имеет место смещение геометрических границ объекта в его изображении, которое определяется как взаимодействием дифракционных картин двух краёв для случая плоской щели ($d = 0$), так и влиянием вторичной дифракции света на задней грани протяжённого объекта. Показано, что при $D \gg \sqrt{\lambda d}$ смещение границ в основном обусловлено вторичной дифракцией света, что, в свою очередь, приводит к систематической погрешности измерения апертуры D, равной $\varepsilon_d = 0{,}22\delta_d$. Исследованы особенности формирования дифракционно-ограниченных изображений задней грани при сильных объёмных эффектах ($N \ll 1$). Изучена структура полей в изображениях граней канального отверстия ($D \ll \sqrt{\lambda d}$).

Ключевые слова: дифракция Френеля и Фраунгофера, фурье-оптика, спектры протяжённых объектов, объёмное щелевое отверстие, оптический размерный контроль.

DOI: 10.15372/AUT20220313

Введение. При разработке когерентно-оптических систем для бесконтактного контроля протяжённых (по глубине) пластин постоянной толщины с плоскими внутренними гранями возникает потребность в создании теории формирования их дифракционных картин Фраунгофера и изображений. Теория должна адекватно описывать наблюдаемые в экспериментах физические явления дифракции света на объектах и позволять восстанавливать с высокой точностью их геометрические характеристики. Так как существующая скалярная теория Кирхгофа — Френеля справедлива лишь для одномерных и двумерных (плоских) объектов [1, 2], а строгие [1, 3–5] и приближённые [6, 7] теории для расчёта дифракционных явлений на таких объектах чрезвычайно сложны в их применении на практике, то с этой целью была разработана конструктивная теория дифракционных явлений на объёмных телах, основанная на модели эквивалентных диафрагм [8, 9]. В отличие от известных она сравнительно простая (в математическом отношении), физически наглядная и в то же время достаточно точная. Крайне важно, что теория позволяет при расчётах полей применять приближение Кирхгофа — Френеля [1, 2] и хорошо согласуется с полученными экспериментальными данными [8–13].

В [8, 14] исследованы особенности формирования дифракционных полей в дальней зоне (спектров) и изображений пластин асимметричного типа с абсолютно поглощающими внутренними гранями. Случаи формирования дифракционных картин и изображений металлических пластин с абсолютно отражающими внутренними гранями симметричного и несимметричного типов изучены в [12, 15]. Дифракционные явления на протяжённой асимметричной щели с абсолютно поглощающими внутренними гранями рассмотрены в [16].

Цель данной работы — изучение особенностей формирования изображений внешних граней протяжённых объектов симметричного типа в виде щелевых отверстий, у которых входная и выходная апертуры (будучи центрированными) имеют одинаковые размеры. Существенно, что внутренние грани объектов являются абсолютно поглощающими. При расчётах использовалась предложенная нами оптико-физическая модель дифракционных явлений на протяжённых объектах постоянной толщины на основе эквивалентных транспарантов, отстоящих друг от друга на расстоянии, равном толщине объекта. Исследованы случаи формирования изображений внешних граней канальных отверстий.

Оптико-физическая модель щелевого протяжённого симметричного отверстия с абсолютно поглощающими внутренними гранями. Исследованию подлежало щелевое отверстие (объёмная щель) глубиной d с одинаковыми апертурами D внешних передней (входной) и задней (выходной) граней, перпендикулярных оптической оси z (рис. 1). Рассмотрим случай объекта центрированного типа, у которого центры передней и задней апертур совпадают с оптической осью. При этом внутренние грани отверстия, будучи плоскими, полностью поглощают падающие на них дифрагированные волны, и таким образом получаем абсолютно поглощающее (чёрное) тело.

Ограничимся далее одномерными по x и протяжёнными по z отверстиями (объёмными щелями (рис. 1, a) размерностью $x \times z$). Ввиду сложности строгого расчёта дифракционных явлений на таком протяжённом объекте в [8, 9] предложен конструктивный подход решения задачи на основе оптико-физической модели объекта в виде эквивалентных транспарантов (ЭТ). Согласно этой модели считается, что основной вклад в поле в дальней зоне вносит дифракция света на передней и задней гранях объекта. При этом

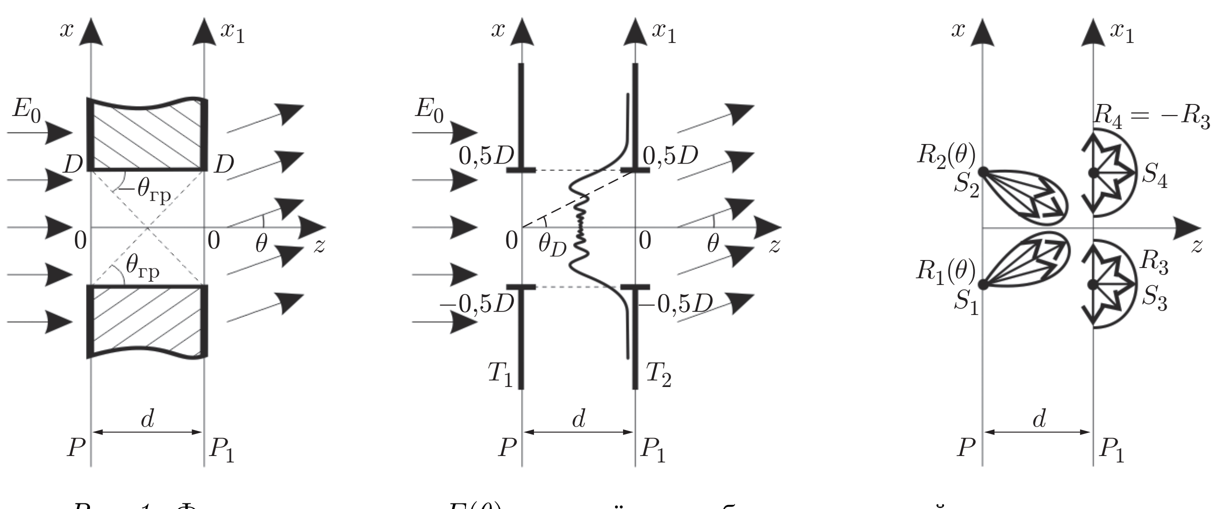

Рис. 1. Формирование поля $F(\theta)$ протяжённого объекта в дальней зоне: сечение объекта (a), его модель в виде эквивалентных транспарантов (b) и дифракционная модель формирования $F(\theta)$ в виде обобщённых первичных источников S_1, S_2 и вторичных S_3, S_4 (c)

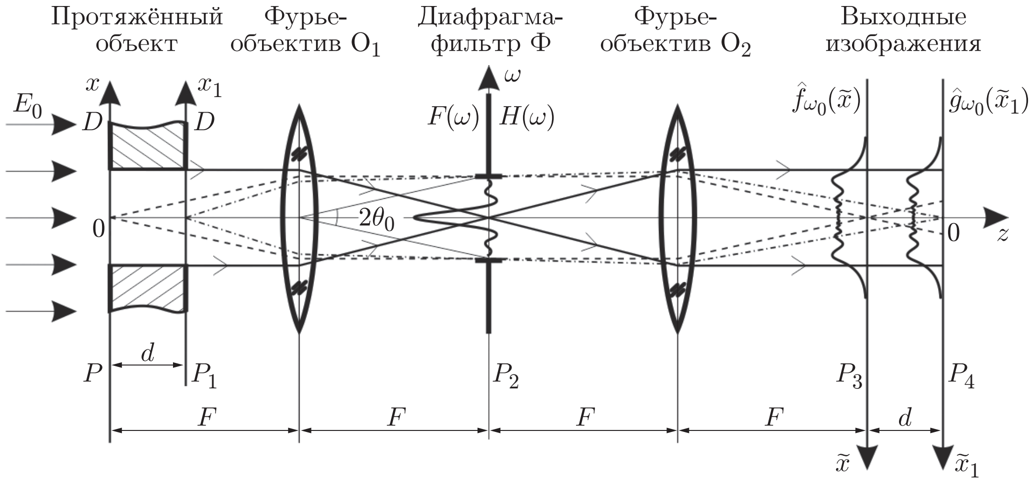

Рис. 2. Схема когерентно-оптической системы $4F$ для формирования изображений внешних передней (плоскость P_3) и задней (P_4) граней протяжённого щелевого отверстия

предполагается, что влияние внутренней грани на это поле пренебрежимо мало. Проведённые экспериментальные исследования, как уже отмечалось, подтвердили справедливость предложенной модели [8–13]. Она включает два одинаковых транспаранта T_1 и T_2 в виде щелей одинаковой ширины D, установленных на расстоянии d друг от друга (рис. 1, b). Расчёт дифракционных явлений на такой структуре может быть выполнен в рамках скалярной теории Кирхгофа — Френеля [1, 2]. Амплитудные коэффициенты пропускания этих транспарантов можно описать граничными функциями $f^{\text{гр}}(x)$ и $g^{\text{гр}}(x_1)$, характеризующими оптические свойства отверстия с абсолютно поглощающими внутренними гранями:

$$f^{\text{гр}}(x) = \text{Rect}\,(x/D), \tag{1}$$

$$g^{\text{гр}}(x_1) = \text{Rect}\,(x_1/D). \tag{2}$$

Разместим исследуемый протяжённый объект на входе стандартной когерентно-оптической проекционной системы $4F$ для формирования (низкочастотной фильтрации) изображений объектов на базе двух фурье-звеньев (рис. 2) [2]. Исходный объект освещается плоской монохроматической волной света с длиной волны λ и амплитудой E_0. Он устанавливается таким образом, чтобы его передняя грань (плоскость P_1) отстояла на фокусном расстоянии F от объектива O$_1$. Этим объективом в результате прямого преобразования Фурье в задней фокальной плоскости P_2 формируется дифракционная картина Фраунгофера в виде спектра $F(\omega)$ пространственных частот ω, которая соответствует полю, наблюдаемому в дальней зоне (дифракционная картина Фраунгофера). Полученное поле $F(\omega)$ фильтруется апертурной диафрагмой (фильтром) с шириной полосы пропускаемых частот $2\omega_0 = 2k\sin\theta_0$, где $2\theta_0$ — угловой размер фильтра, а $k = 2\pi/\lambda$. Результирующее распределение далее объективом O$_2$ подвергается обратному преобразованию Фурье, в результате которого в задней фокальной плоскости P_3 объектива O$_2$ формируется отфильтрованное изображение передней грани объёмного края протяжённой пластины, а в плоскости P_4 — изображение её задней грани, расположенной в плоскости P_1. Отметим, что в силу объёмных свойств объекта поле в изображении его передней грани даже при отсутствии фильтра пространственных частот может заметно отличаться от исходного входного распределения $f^{\text{гр}}(x)$, задаваемого формулой (1).

Далее представлены два случая формирования изображения объёмной щели: идеальный, когда система является безаберрационной и дифракционно-неограниченной (апертурная диафрагма отсутствует), и реальный, когда система, будучи безабберационной, относится к классу дифракционно-ограниченных. Существенно, что результаты, полученные в первом случае, будут использованы при исследовании структуры дифракционно-ограниченных изображений объёмных отверстий.

Дифракционно-неограниченное формирование изображений граней протяжённого щелевого отверстия. При получении полей в плоскостях изображений граней в идеальной системе воспользуемся полученной в [8, 9] формулой для спектра протяжённого отверстия:

$$F(\omega) = E_0 \mathbf{e}^{j\omega^2 d/2k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathrm{Rect}}_d \left(\frac{x_1}{D}\right) \mathrm{Rect}\left(\frac{x_1}{D}\right) \mathbf{e}^{-j\omega x_1}\, dx_1 = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Rect}\left(\frac{x}{D}\right) \widetilde{\mathrm{Rect}}_d \left(\frac{x+\omega d/k}{D}\right) \mathbf{e}^{-j\omega x}\, dx, \tag{3}$$

где $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\left(\frac{t}{D}\right) = \frac{1}{j\lambda d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Rect}\left(\frac{x}{D}\right)\mathbf{e}^{-jk(x-t)^2/(2d)}\,dx$ — френелевский образ прямоугольной функции $\mathrm{Rect}\,(x/D)$, формируемый в плоскости P_1. Отметим, что спектр $F(\omega)$ согласно (3) может быть вычислен двояким образом: путём интегрирования полей по координате x_1 (плоскость P_1) или по координате x (плоскость P).

Имея в распоряжении спектр $F(\omega)$, нетрудно перейти к его нормированному на E_0 изображению $\hat{f}(\tilde{x})$, формируемому в плоскости P_3. Для этого необходимо выполнить обратное преобразование Фурье спектра $F(\omega)$:

$$\hat{f}(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathbf{e}^{j\omega\tilde{x}}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Rect}\left(\frac{x}{D}\right)\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\left(\frac{x+\omega d/k}{D}\right)\mathbf{e}^{j\omega(\tilde{x}-x)}\,dx\,d\omega. \tag{4}$$

Здесь и далее спектр нормирован на E_0.

Выполним интегрирование по ω, сделав предварительную замену переменных $x + \omega d/k = \xi$. При этом воспользуемся известной формулой для спектра $T(w)$ френелевского образа $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(\xi/D)$ функции $\mathrm{Rect}\,(x/D)$, согласно которой он равен произведению спектров функций $\mathrm{Rect}\,(\xi/D)$ и $\mathbf{e}^{jk\xi^2/2d}$ [17]:

$$T(w) = \Im\left\{\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(\xi/D)\right\} = (j\lambda d)^{-1/2}\Im\left\{\mathrm{Rect}\,(\xi/D)\otimes\mathbf{e}^{jk\xi^2/2d}\right\} = \frac{2\sin(wD/2)}{w}\mathbf{e}^{-jw^2 d/2k},$$

где $\Im\{\cdot\}$ — оператор прямого преобразования Фурье, $\otimes$ — символ свёртки, а $w = (\tilde{x} - x)k/d$. В результате для поля $\hat{f}(\tilde{x})$ в плоскости P_3, сопряжённой с плоскостью P, получим

$$\hat{f}(\tilde{x}) = \mathbf{e}^{-jk\tilde{x}^2/2d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Rect}\left(\frac{x}{D}\right)\frac{\sin[\omega_D(\tilde{x}-x)]}{\pi(\tilde{x}-x)}\mathbf{e}^{jkx^2/2d}\,dx, \tag{5}$$

где $\omega_D = k\sin\theta_D$, угол $\theta_D = \mathrm{arctg}\,(D/2d)$ (см. рис. 1, b).

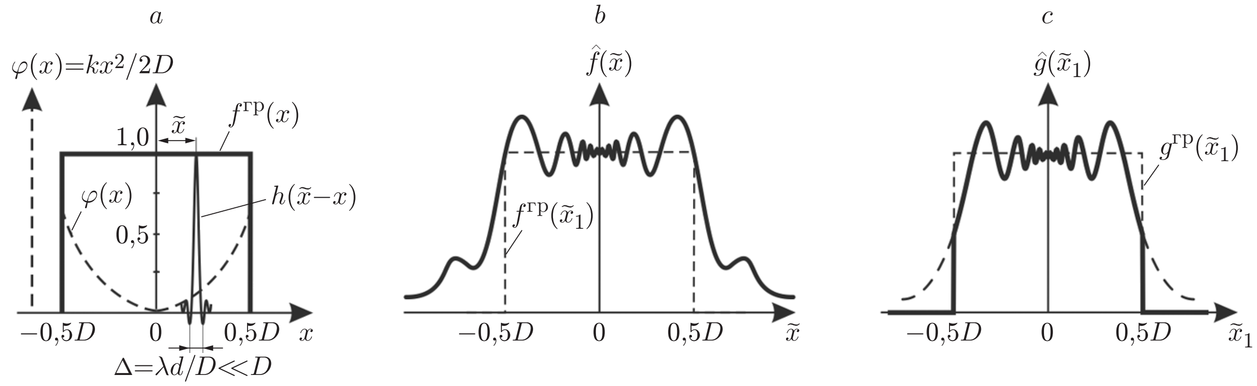

Рис. 3. Поля в изображениях граней объёмного абсолютно поглощающего симметричного отверстия в дифракционно-неограниченной оптической системе: принцип формирования поля в изображении передней грани (a), профили полей $\hat{f}(\tilde{x})$ и $\hat{g}(\tilde{x}_1)$ в изображениях соответственно передней (b) и задней (c) граней протяжённого объекта

Принцип формирования изображения $\hat{f}(\tilde{x})$ и типичный профиль его распределения показаны на рис. 3, a, b.

При нахождении поля $\hat{g}(\tilde{x}_1)$ (нормированного на E_0) в плоскости изображения задней грани P_4 учтём, что в идеальной оптической системе оно совпадает с полем в плоскости P_1, которое является результатом перемножения распределений $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(\tilde{x}_1/D)$ и $g(\tilde{x}_1) = \mathrm{Rect}\,(\tilde{x}_1/D)$ (рис. 3, c):

$$\hat{g}(\tilde{x}_1) = \mathrm{Rect}\,(\tilde{x}_1/D)\ \widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(\tilde{x}_1/D). \tag{6}$$

Полученные формулы (5) и (6) описывают формирование изображений передней и задней граней протяжённого отверстия в дифракционно-неограниченной проекционной системе при любых соотношениях параметров D, d и λ.

Проанализируем формулу (5). Видно, что поле $\hat{f}(\tilde{x})$ (с точностью до квадратичного фазового множителя $\mathbf{e}^{-jk\tilde{x}^2/2d}$, независящего от x) можно рассматривать как результат свёртки функции $h(x) = \sin(\omega_D x)/(\pi x)$ с входным комплексным распределением $f_{\text{вх}}(x) = \mathbf{e}^{jkx^2/2d}\,\mathrm{Rect}\,(x/D)$ (рис. 3, a). Если параметр ω_D выбрать достаточно большим, при котором функцию $\sin[\omega_D(\tilde{x}-x)]/(\pi(\tilde{x}-x))$ можно рассматривать как дельта-функцию Дирака $\delta(\tilde{x}-x)$ [2], то из формулы (5) следует, что выходное поле $\hat{f}(\tilde{x})$ равно входному распределению $\mathrm{Rect}\,(x/D)$, т. е. в этом случае имеем идеальное проецирование входного плоского объекта.

Очевидно, что влиянием фазового члена $\mathbf{e}^{jkx^2/2d}$ в формуле (5) можно пренебречь в случае, когда изменение фазы в пределах рабочего поля в плоскости P незначительно, т. е. при $kx^2/2d \ll 2\pi$ ($x \ll \sqrt{\lambda d}$). А это означает, что входной размер отверстия должен быть много меньше размера зоны Френеля, т. е. $D \ll \sqrt{\lambda d}$ (условие изопланатизма) (рис. 4, a). В этом случае формула (5) принимает следующий вид:

$$\hat{f}(\tilde{x}) = \mathbf{e}^{-jk\tilde{x}^2/2d} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Rect}\left(\frac{x}{D}\right) \frac{\sin[\omega_D(\tilde{x}-x)]}{\pi(\tilde{x}-x)}\,dx. \tag{7}$$

Полученное выражение описывает формирование изображения передней грани объекта в линейной пространственно-инвариантной системе. Однако это достигается ценой

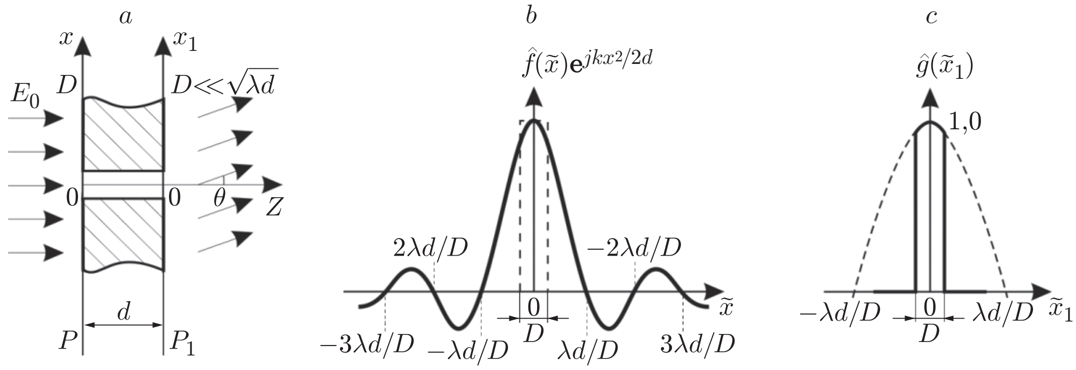

Рис. 4. Формирование изображений граней объёмной симметричной абсолютно поглощающей щели в дифракционно-неограниченной пространственно-инвариантной оптической системе с полем зрения $D \ll \sqrt{\lambda d}$ (условие изопланатизма): сечение протяжённого отверстия (a), поля в изображениях его передней (b) и задней (c) граней

значительного уменьшения входного поля. Действительно, если, например, выбрать протяжённость объекта $d = 10$ мм, длину волны света $\lambda = 0{,}5$ мкм, то размер зоны Френеля будет равен $\delta_d = \sqrt{\lambda d} = 71$ мкм. Соответственно размер отверстия D должен составлять долю от δ_d, т. е. быть порядка $10 \ldots 20$ мкм.

При указанных выше условиях нетрудно вычислить поле $\hat{f}(\tilde{x})$. Так как $D \ll \sqrt{\lambda d}$, то характерный размер функции $\sin[\omega_D(\tilde{x}-x)]/[\pi(\tilde{x}-x)]$, равный $\Delta_D \sim 2\lambda d/D$, гораздо больше размера D прямоугольной функции $\mathrm{Rect}\,(x/D)$ ($\Delta_D/D = 2\lambda d/D^2 \gg 1$). Очевидно, что в этом случае функцию $\mathrm{Rect}\,(\tilde{x}/D)$ можно рассматривать как дельта-функцию по отношению к функции $\sin[k(\tilde{x}-x)D/2d]/[\pi(\tilde{x}-x)]$. В результате для распределения $\hat{f}(\tilde{x})$ согласно (7) получаем (рис. 4, b)

$$\hat{f}(\tilde{x}) = D\mathbf{e}^{-jk\tilde{x}^2/2d}\,\frac{\sin(k\tilde{x}D/2d)}{\pi\tilde{x}}. \tag{8}$$

Исследуемый нами объект можно рассматривать как канальное отверстие, у которого ширина D много меньше размера зоны Френеля $\delta_d = \sqrt{\lambda d}$. Фактически поле $\hat{f}(\tilde{x})$ описывает дифракцию Фраунгофера на щели (апертуре задней грани) канального отверстия (рис. 4, b).

Найдём теперь поле $\hat{g}(\tilde{x}_1)$ в изображении задней грани канального отверстия, формируемом идеальной оптической системой. Очевидно, что оно будет совпадать с полем $g(x_1)$ в плоскости P_1 согласно формуле (6). При указанном условии ($D \ll \sqrt{\lambda d}$) френелевский образ $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(x/D)$ исходной прямоугольной функции $\mathrm{Rect}\,(x/D)$ имеет вид дифракционной картины Фраунгофера:

$$\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(x_1/D) \approx (j\lambda d)^{-1/2}\mathbf{e}^{jkx_1^2/2d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Rect}\,(x/D)\mathbf{e}^{jkxx_1/d}\,dx =$$

$$= \mathbf{e}^{j(kx_1^2/2d-\pi/4)}\,\frac{D}{\sqrt{\lambda d}}\,\frac{\sin(kx_1D/2d)}{kx_1D/2d}. \tag{9}$$

Откуда для поля (6) получаем следующее выражение:

$$\hat{g}(\tilde{x}_1) = \widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(\tilde{x}_1/D)\,\mathrm{Rect}\,(\tilde{x}_1/D) \approx \mathbf{e}^{j(k\tilde{x}_1^2/2d-\pi/4)}\,\frac{D}{\sqrt{\lambda d}}\,\frac{\sin\,(k\tilde{x}_1 D/2d)}{k\tilde{x}_1 D/2d}\,\mathrm{Rect}\,(\tilde{x}_1/D). \qquad (10)$$

Профиль функции $g(\tilde{x}_1)$ показан на рис. 4, *c*. Так как размер $D \ll \sqrt{\lambda d}$, то функция $\sin\,(kx_1 D/2d)/(kx_1 D/2d) \approx 1 - (kx_1 D/2d)^2/6$. При указанном выше условии второй член разложения этой функции достаточно мал. Так, при $D/\sqrt{\lambda d} = 0{,}2$ в точках $x_1 = \pm\,0{,}5D$ он составляет 0,06 % от основного.

Таким образом, при указанном выше условии в идеальном случае поле в изображении задней грани для канального отверстия с хорошей степенью точности можно описать следующим выражением:

$$\hat{g}(\tilde{x}_1) = \widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(\tilde{x}_1/D)\,\mathrm{Rect}\,(\tilde{x}_1/D) \approx$$

$$\approx \mathbf{e}^{j(k\tilde{x}_1^2/2d-\pi/4)}\,\frac{D}{\sqrt{\lambda d}}\Big[1 - \frac{1}{6}\Big(\frac{k\tilde{x}_1 D}{2d}\Big)^2\Big]\,\mathrm{Rect}\,(\tilde{x}_1/D). \qquad (11)$$

Формирование дифракционно-ограниченного изображения передней грани объёмной абсолютно поглощающей симметричной щели. Выполним с использованием спектрального подхода расчёт полей в изображениях внешних граней, формируемых в дифракционно-ограниченной системе. С этой целью обратимся к спектру (дифракционной картине) $F(\omega)$ исследуемого абсолютно поглощающего протяжённого отверстия, представленному интегралом (3). Согласно проведённым в [16] расчётам для нормированного спектра симметричной протяжённой щели можно получить следующее выражение:

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{j\omega}\Big[R_1(\omega)^{j\omega D/2} + R_2(\omega)^{-j\omega D/2} + R_3\mathbf{e}^{j\omega^2 d/2k}\,[\mathbf{e}^{j\omega D/2} - \mathbf{e}^{-j\omega D/2}]\Big], \qquad (12)$$

где $R_1(\omega) = \widetilde{\mathrm{Rect}}_{\omega_{\text{кр}}}\,[(\omega - 0{,}5\omega_{\text{гр}})/\omega_{\text{гр}}]$, $\omega_{\text{гр}} = k\sin\theta_{\text{гр}}$, $\theta_{\text{гр}} = \mathrm{arctg}\,(D/d)$, $R_2(\omega) = -\widetilde{\mathrm{Rect}}_{\omega_{\text{кр}}}[(\omega + 0{,}5\omega_{\text{гр}})/\omega_{\text{гр}}]$ — неизотропные диаграммы излучения первичных источников, расположенных в точках $x = \pm\,0{,}5D$ (плоскость P), а $R_3 = \widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,[(x_1 = 0{,}5D)/D] = -R_4$ — изотропные диаграммы излучения вторичных источников, расположенных в плоскости P_1 в точках с координатами $x_1 = \pm\,0{,}5D$ (см. рис. 1 и рис. 5, *a*).

При дальнейших расчётах целесообразно френелевские образы $\widetilde{\mathrm{Rect}}_{\omega_{\text{кр}}}\,[(\omega \pm \pm\,0{,}5\,\omega_{\text{гр}})\omega_{\text{гр}}]$ выразить через стандартную интегральную функцию Френеля (частотного вида) $\tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega)$ [16], которая является френелевским образом ступенчатой функции Хевисайда $Y(\omega)$ [2, 17]. Используя очевидную связь между ними, а именно $\widetilde{\mathrm{Rect}}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega) = \tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega + 0{,}5\omega_{\text{гр}}) - \tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega - 0{,}5\omega_{\text{гр}})$, спектр $F(\omega)$ можно представить в следующем виде:

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}\Big([\tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega) - \tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega - \omega_{\text{гр}})]\,\mathbf{e}^{j\omega D/2} - [\tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega + \omega_{\text{гр}}) - \tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega)]\mathbf{e}^{-j\omega D/2} +$$

$$+ [\tilde{Y}_d(0) - \tilde{Y}_d(-D)]\mathbf{e}^{j\omega^2 d/2}(\mathbf{e}^{j\omega D/2} - \mathbf{e}^{-j\omega D/2})\Big). \qquad (12a)$$

Случай слабых объёмных эффектов. Исследуем поведение поля для объёмного отверстия, когда на его размере D укладывается много зон Френеля, т. е. при $D \gg \sqrt{\lambda d}$

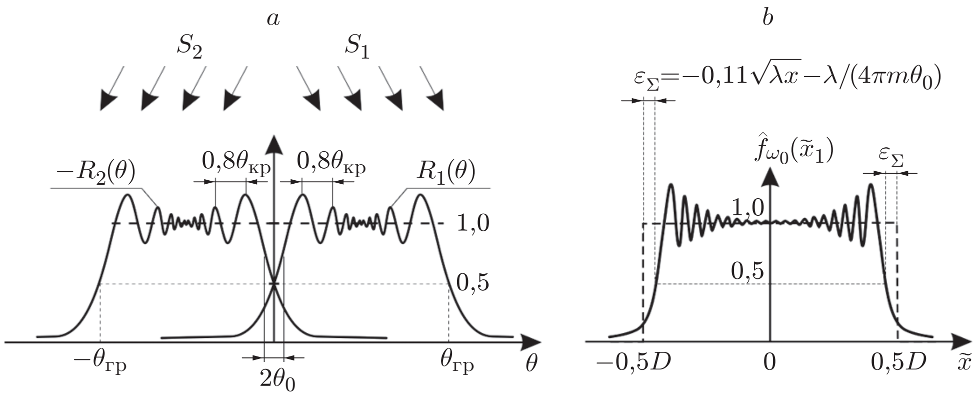

Рис. 5. Формирование изображений граней симметричной абсолютно поглощающей протяжённой щели в дифракционно-ограниченной системе для случая $D \gg \sqrt{\lambda d}$: поведение диаграмм излучения $R_1(\theta)$ и $-R_2(\theta)$ первичных источников S_1 и S_2 (a), поле $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$ в изображении передней грани (b) (ε_Σ — смещение границы в изображении передней грани протяжённого отверстия)

($M = D/\sqrt{\lambda d} \gg 1$), и выберем ширину полосы частот, пропускаемых апертурным фильтром, достаточно узкой: $\omega_0 \ll \omega_{\text{кр}}$ ($\theta_0 \ll \theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d}$) (см. рис. 5, a). Параметр $\theta_{\text{кр}}$ характеризует критический угол дифракции, при котором наиболее точно проявляются объёмные эффекты [8, 10]. При этом условии интегральная функция Френеля в области $|\omega| \leqslant \omega_0$ допускает линейную аппроксимацию $\tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega) = 0{,}5 + \mathbf{e}^{-j\pi/4}\omega/\omega_{\text{кр}}$ [10]. В этом случае выражение (12а) приводится к следующему виду:

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega}\Big\{\Big[0{,}5 + \frac{\mathbf{e}^{-j\pi/4}\omega}{\omega_{\text{кр}}} + \frac{0{,}5\mathbf{e}^{j(\omega-\omega_{\text{гр}})^2 d/2k}}{\pi\mathbf{e}^{-j\pi/4}(\omega-\omega_{\text{гр}})/\omega_{\text{кр}} + \operatorname{sgn}(\omega-\omega_{\text{гр}})}\Big]\mathbf{e}^{j\omega D/2} -$$

$$-\Big[1 - \frac{0{,}5\mathbf{e}^{j(\omega+\omega_{\text{гр}})^2 d/2k}}{\pi\mathbf{e}^{-j\pi/4}(\omega+\omega_{\text{гр}})/\omega_{\text{кр}} + \operatorname{sgn}(\omega+\omega_{\text{гр}})} - 0{,}5 - \frac{\mathbf{e}^{-j\pi/4}\omega}{\omega_{\text{кр}}}\Big]\mathbf{e}^{-j\omega D/2} +$$

$$+\Big(0{,}5 - \frac{\mathbf{e}^{j\pi/4}\mathbf{e}^{jkD^2/2d}\sqrt{\lambda d}}{2\pi D}\Big)(\mathbf{e}^{j\omega D/2} - \mathbf{e}^{-j\omega D/2})\Big\}. \tag{13}$$

Здесь использовалась аппроксимация функции $\tilde{Y}_d(-D) \approx \mathbf{e}^{j\pi/4}\mathbf{e}^{jkD^2/2d}\sqrt{\lambda d}/(2\pi D)$ [8, 9]. Заметим, что при $\omega_0 \ll \omega_{\text{кр}}$ фазовый квадратичный множитель $\mathbf{e}^{j\omega^2 d/2k}$ с большой точностью можно считать равным единице. Если учесть далее, что $\omega_{\text{гр}}/\omega_{\text{кр}} \gg 1$ при $D \gg \sqrt{\lambda/d}$ ($M \gg 1$), то выражение (13) можно заметно упростить:

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega} = \Big[2j\sin(\omega D/2) + \frac{\mathbf{e}^{-j\pi/4}\mathbf{e}^{j\omega D/2}\omega}{\omega_{\text{кр}}} + \frac{\mathbf{e}^{-j\pi/4}\mathbf{e}^{-j\omega D/2}\omega}{\omega_{\text{кр}}}\Big]. \tag{14}$$

В результате низкочастотной фильтрации этого распределения фильтром с передаточной функцией $H(\omega) = \operatorname{Rect}(\omega/2\omega_0)$ для поля в изображении передней грани получим (рис. 5, b)

$$\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)H(\omega)\mathrm{e}^{j\omega\tilde{x}}\,d\omega = \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}+0{,}5D) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}-0{,}5D) -$$

$$-\frac{\mathrm{e}^{j\pi/4}\sqrt{\lambda d}}{2\pi}\,\frac{\sin\left[\omega_0(\tilde{x}-0{,}5D)\right]}{\pi(\tilde{x}-0{,}5D)} - \frac{\mathrm{e}^{j\pi/4}\sqrt{\lambda d}}{2\pi}\,\frac{\sin\left[\omega_0(\tilde{x}+0{,}5D)\right]}{\pi(\tilde{x}+0{,}5D)}. \qquad (15)$$

В (15) первые два члена $\Phi_{\omega_0}(\tilde{x}+0{,}5D) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}-0{,}5D) = $ $= \mathrm{Rect}\,(\tilde{x}/D)\otimes\sin(\omega_0\tilde{x})/(\pi\tilde{x})$ описывают классическое дифракционно-ограниченное изображение плоской щели ($d = 0$). Третий и четвёртый члены отражают влияние объёмных свойств протяжённой щели. Эта ситуация аналогична случаю изображения симметричного объёмного края [13].

Далее определим положение границ протяжённого отверстия пороговым методом, исходя из полученного изображения объекта. Как известно, в случае изображения полуплоскости амплитуда поля в точке, соответствующей её границе, равна $0{,}5E_0$, а интенсивность — $0{,}25E_0^2 = 0{,}25I_0$, где I_0 — интенсивность освещающей объект волны [1, 17]. Как показано в [10], для объёмного края объекта с малой глубиной d амплитуда поля уменьшается на величину, пропорциональную зоне Френеля $\sqrt{\lambda d}$. Рассмотрим эту ситуацию для симметричной абсолютно поглощающей щели. Найдём амплитуду поля $\hat{f}(\tilde{x})$, например, в точке $\tilde{x} = -0{,}5D$. Из формулы (15) следует, что

$$\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}=-0{,}5D) = 0{,}5 - \Phi_{\omega_0}(-D) - \frac{\mathrm{e}^{j\pi/4}\sqrt{\lambda d}\,\omega_0}{2\pi^2} - \frac{\mathrm{e}^{j\pi/4}\sqrt{\lambda d}}{2\pi}\,\frac{\sin(\omega_0 D)}{\pi D}.$$

Нормированная интенсивность поля в этой точке приближённо равна

$$\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x}=-0{,}5D) = I_{\omega_0}(\tilde{x}=-0{,}5D)/I_0 \approx$$

$$\approx 0{,}25 - \Phi_{\omega_0}(-D) - \frac{\sqrt{\lambda d}\,\omega_0}{2\sqrt{2}\pi^2} - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\sqrt{2}\,\pi}\,\frac{\sin(\omega_0 D)}{\pi D}. \qquad (16)$$

Здесь ограничимся членами, дающими основной вклад в интенсивность. Оценим интерференционный член $\Phi_{\omega_0}(-D)$. Его можно представить в виде

$$\Phi_{\omega_0}(-D) = \int\limits_{-\infty}^{-D}\frac{\sin(\omega_0 x)}{\pi x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-t_0}\frac{\sin t}{\pi t}\,dt,$$

где $t_0 = \omega_0 D = 2\pi\theta_0/\theta_D = 2\pi m$, $\theta_D = \lambda/D$ — полуширина основного лепестка функции $\sin(\omega D)/\omega$, а $m = \theta_0/\theta_D$ — число колебаний, укладывающихся в пределах половинной угловой апертуры θ_0. Используем далее асимптотическое представление функции $\Phi(-t_0) \approx$ $\approx \cos t_0/(\pi t_0)$, справедливое при $t_0 \gg 1$ (его можно получить путём интегрирования $\Phi_{\omega_0}(-D)$ по частям). С учётом вышеуказанного выражение для интенсивности можно записать в следующем виде:

$$\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x}=-0{,}5D) \approx 0{,}25 - \frac{\cos(2\pi m)}{2\pi m} - \frac{\sqrt{\lambda d}\,\omega_0}{2\sqrt{2}\,\pi^2} - \frac{\sqrt{\lambda d}\,\omega_0}{4\pi^3\sqrt{2}\,m}\sin(2\pi m). \qquad (17)$$

Так как максимальное значение последнего члена, обусловленного влиянием соседнего протяжённого края на рассматриваемый объёмный край, меньше третьего члена в $2\pi m$ раз, то при дальнейших расчётах будем им пренебрегать. Для определения абсолютной погрешности ε_Σ нахождения положения границы объекта в его изображении, расположенной в точке $\tilde{x} = -0{,}5D$, воспользуемся пороговым алгоритмом, выбрав нормированный порог $\hat{I}_{\text{пор}} = 0{,}25$ [13]. Согласно ему погрешность

$$\varepsilon_\Sigma \approx \frac{\pi[I_{\omega_0}(x = -0{,}5D) - 0{,}25]}{\omega_0} = -\frac{\lambda}{4\pi m\theta_0} - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\sqrt{2}\,\pi} = \varepsilon_D + \varepsilon_d, \tag{18}$$

где $\varepsilon_D = -\lambda/(4\pi m\theta_0)$ — составляющая погрешности, обусловленная взаимодействием дифракционных картин краёв в случае плоского объекта ($d = 0$), а $\varepsilon_d = -\sqrt{\lambda d}\,/(2\sqrt{2}\pi) = -\delta_d/(2\sqrt{2}\,\pi)$ — ранее изученная составляющая погрешности, возникающая вследствие влияния вторичной дифракции света на задней грани объекта (см. рис. 5, b). Найдём теперь общую погрешность $\varepsilon_{\text{общ}}$ определения параметра D для протяжённой щели. Так как объект состоит из двух протяжённых краёв, то очевидно, что эта погрешность будет в 2 раза больше ε_Σ, т. е.

$$\varepsilon_{\text{общ}} = 2\varepsilon_\Sigma = -\frac{\lambda}{2\pi m\theta_0} - \frac{\sqrt{\lambda d}}{\sqrt{2}\pi}. \tag{19}$$

Оценим эту погрешность. Если, например, толщину объекта d выбрать 1 мм, длину волны света $\lambda = 0{,}5$ мкм, а размер $D = 5$ мм, то в этом случае размер зоны Френеля $\delta_d = \sqrt{\lambda d} \approx 22$ мкм, $\theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d} = 0{,}01$, а $\theta_D = \lambda/D = 10^{-4}$. Выберем далее половинную апертуру системы $\theta_0 = \theta_{\text{кр}}/3 = 3 \cdot 10^{-3}$ $(0,2^\circ)$. В этом случае параметр $m = \theta_0/\theta_D = 30$. В результате составляющие погрешности равны: $2\varepsilon_D = -0{,}44$ мкм, $2\varepsilon_d = -5$ мкм. Таким образом, результирующая погрешность составляет $\varepsilon_{\text{общ}} = -5{,}44$ мкм. Видно, что при выбранных параметрах основной вклад в погрешность даёт составляющая $2\varepsilon_d$.

Рассмотрим далее дифракционно-ограниченное изображение передней грани $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$ объекта в виде канального отверстия. Его распределение можно получить, если сделать свертку его идеального изображения (8) с импульсным откликом дифракционно-ограниченной оптической системы $h_{\omega_0}(\tilde{x})$:

$$\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}) = D\mathbf{e}^{-j\tilde{x}^2/2d}\,\frac{\sin(k\tilde{x}^2 D/2d)}{\pi\tilde{x}} \otimes \frac{\sin(\omega_0\tilde{x})}{\pi\tilde{x}}. \tag{20}$$

Если теперь полагать, что апертура $\theta_0 \gg D/d$ и одновременно $\theta_0 \gg \theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d}$, то отклик $h_{\omega_0}(\tilde{x})$ можно рассматривать как дельта-функцию по отношению к фазовой и амплитудной компонентам функции $\hat{f}(\tilde{x})$. В этом случае поле $f_{\omega_0}(\tilde{x})$ совпадает с распределением (8) (см. рис. 4, b):

$$\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}) = D\mathbf{e}^{-j\tilde{x}^2/2d}\,\frac{\sin(k\tilde{x}^2 D/2d)}{\pi\tilde{x}}.$$

Это распределение имеет периодическую структуру с расстоянием между минимумами $\Delta_D = \lambda d/D$.

Применительно к размерному контролю интерес представляет нахождение геометрического параметра D (ширины щелевой апертуры) путём обработки поля $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$. Из последнего выражения для Δ_D следует, что $D = \lambda d/\Delta_D$. Оценим Δ_D и D при следующих значениях параметров канального отверстия: $d = 50$ мм, $\lambda = 0{,}5$ мкм, $D = 0{,}3\sqrt{\lambda d}$, откуда следует, что $D = 47$ мкм, а $\Delta_D = 0{,}53$ мм. Используя современные средства фоторегистрации на базе многоэлементных приёмников, параметр Δ_D может быть определён с высокой точностью (погрешность порядка 0,1 %). А это означает, что абсолютная погрешность определения параметра D может составлять 0,05–0,1 мкм.

Формирование дифракционно-ограниченного изображения задней грани объёмной абсолютно поглощающей симметричной щели. Рассмотрим теперь особенности формирования изображения задней грани абсолютно поглощающего симметричного отверстия в дифракционно-ограниченной проекционной системе. В этом случае поле $g_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ в изображении задней грани (плоскость P_4) определяется интегралом свёртки функции (6) с импульсным откликом системы $h_{\omega_0}(x_1) = \Im^{-1}\{\mathrm{Rect}\,(\omega/2\omega_0)\} = \sin(\omega_0 x_1)/(\pi x_1)$ ($\Im^{-1}\{\cdot\}$ — оператор обратного преобразования Фурье):

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = E_0\Big[\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\left(\frac{\tilde{x}_1}{D}\right)\mathrm{Rect}\left(\frac{\tilde{x}_1}{D}\right)\Big] \otimes \frac{\sin(\omega_0\tilde{x}_1)}{\pi\tilde{x}_1} =$$
$$= E_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\mathrm{Rect}}\left(\frac{x_1}{D}\right)\mathrm{Rect}\left(\frac{x_1}{D}\right)\frac{\sin[\omega_0(\tilde{x}_1 - x_1)]}{\pi(\tilde{x}_1 - x_1)}\,dx_1. \tag{21}$$

Здесь $g_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ — ненормированное (на E_0) распределение поля.

Изучим поведение поля при различных соотношениях углового размера $2\theta_0$ апертурного фильтра и критического угла дифракции $\theta_{\text{кр}}$. В случае малой объёмности при $\theta_0 \ll \theta_{\text{кр}}$ ($N = \theta_{\text{кр}}/\theta_0 \gg 1$), когда объёмные эффекты выражены слабо вследствие того, что глубина резкости системы $\Delta z = \lambda/\theta_0^2$ много больше толщины объекта d ($\Delta z \gg d$), поле $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ в плоскости изображения задней грани незначительно отличается от полученного ранее поля $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$ в изображении передней грани (см. (15)):

$$\frac{\hat{g}_{\omega_0}}{E_0}(\tilde{x}_1) = \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 + 0{,}5D) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - 0{,}5D) -$$
$$- \frac{\mathbf{e}^{j\pi/4}\sqrt{\lambda d}}{2\pi}\,\frac{\sin[\omega_0(\tilde{x}_1 - 0{,}5D)]}{\pi(\tilde{x}_1 - 0{,}5D)} - \frac{\mathbf{e}^{j\pi/4}\sqrt{\lambda d}}{2\pi}\,\frac{\sin[\omega_0(\tilde{x}_1 + 0{,}5D)]}{\pi(\tilde{x}_1 + 0{,}5D)}. \tag{22}$$

Исследуем далее в аналитическом виде поведение поля $\hat{g}_{\omega}(\tilde{x}_1)$ в случае сильной объёмности, при которой глубина фокусировки системы Δz много меньше толщины объекта d. В этом случае характерный размер импульсного отклика системы $\Delta = \lambda/\theta_0$ много меньше размера зоны Френеля: $\Delta = \lambda/\theta_0 \ll \delta_d = \sqrt{\lambda d}$, т. е. $\theta_0 \gg \theta_{\text{кр}}$ ($N \ll 1$). Фактически импульсный отклик $h_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ ведёт себя по отношению к распределению (6) как «дельта-функция конечного размера», что позволяет функцию $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(x_1/D)$ вынести из подынтегрального выражения (21):

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = E_0\,\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\left(\frac{\tilde{x}_1}{D}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Rect}\left(\frac{x_1}{D}\right)\frac{\sin[\omega_0(\tilde{x}_1 - x_1)]}{\pi(\tilde{x}_1 - x_1)}\,dx_1 =$$
$$= E_0\,\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\left(\frac{\tilde{x}_1}{D}\right)[\Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 + 0{,}5D) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - 0{,}5D)]. \tag{23}$$

Таким образом, поле в изображении задней грани при $\theta_0 \gg \theta_{\text{кр}}$ является результатом перемножения двух распределений, соответствующих френелевской картине $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(x_1/D)$ щели и дифракционному изображению плоской щели $(\Phi_{\omega_0}(x_1+0{,}5D)-\Phi_{\omega_0}(x_1-0{,}5D))$. Это означает, что влияние объёмности на поле (23) полностью определяется поведением функции $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(x_1/D)$ — френелевского образа прямоугольной функции $\mathrm{Rect}\,(x/D)$, описывающей пропускание входной щели.

Что касается распределения интенсивности света в изображении задней грани в рассматриваемом случае сильных объёмных эффектов ($N=\theta_{\text{кр}}/\theta_0 \ll 1$), то согласно выражению (22) это распределение имеет вид

$$\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)=I_0|\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)|^2=I_0|\,\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(x_1/D_1)|^2[\Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1+0{,}5D)-\Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1-0{,}5D)]^2. \qquad (24)$$

Напоминаем, что I_0 — интенсивность освещающей объект волны.

Отметим, что поле (22) может быть представлено в аналитическом виде, если воспользоваться конструктивной аппроксимацией функции $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(x_1/D)=\tilde{Y}_d(\tilde{x}_1+{}$ ${}+0{,}5D)-\tilde{Y}_d(\tilde{x}_1-0{,}5D)$ [8, 9]. В этом случае аппроксимированная функция $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d^{\text{ап}}\,(x_1/D)$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{\mathrm{Rect}}_d\,(\tilde{x}_1/D)=\tilde{Y}_d(\tilde{x}_1+0{,}5D)-\tilde{Y}_d(\tilde{x}_1-0{,}5D)\approx \mathrm{Rect}_d^{(\text{ап})}(\tilde{x}_1/D)=\mathrm{Rect}\,(\tilde{x}_1/D)-$$

$$-\frac{0{,}5\mathbf{e}^{jk(\tilde{x}_1+0{,}5D)^2/2d}}{\alpha\mathbf{e}^{-j\pi/4}(\tilde{x}_1+0{,}5D)/\sqrt{\lambda d}+\mathrm{sgn}\,(\tilde{x}_1+0{,}5D)}+$$

$$+\frac{0{,}5\mathbf{e}^{jk(\tilde{x}_1-0{,}5D)^2/2d}}{\alpha\mathbf{e}^{-j\pi/4}(\tilde{x}_1-0{,}5D)/\sqrt{\lambda d}+\mathrm{sgn}\,(\tilde{x}_1-0{,}5D)}, \qquad (25)$$

где параметр α в зависимости от рассматриваемого диапазона меняется в пределах $2\leqslant\alpha\leqslant\pi$. Подставляя выражение для $\widetilde{\mathrm{Rect}}_d^{\text{ап}}\,(x_1/D)$ в (24), нетрудно получить в аппроксимированном виде выражение для интенсивности света в изображении задней грани

$$\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)\approx\hat{I}^{\text{ап}}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)=I_0|\,\widetilde{\mathrm{Rect}}_d^{\text{ап}}\,(\tilde{x}_1/D)|^2|\Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1+0{,}5D)-\Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1-0{,}5D)|^2. \qquad (26)$$

Найдём значение интенсивности света в граничных точках $\tilde{x}_1=\pm\,0{,}5D$. Выберем размер отверстия $D\gg\sqrt{\lambda d}$ ($M\gg1$). Поскольку параметр $\theta_0\gg\theta_{\text{кр}}=\sqrt{\lambda/d}$ ($N=\theta_{\text{кр}}/\theta_0\ll1$), то в этом случае множители в точках $x_1=\pm\,0{,}5D$ равны 0,25, а результирующая нормированная интенсивность составляет 6,25 % от интенсивности освещающей объект волны. Отсюда следует, что для определения положения границ протяжённой щели (исходя из изображения её задней грани) следует выбрать порог $I_{\text{пор}}=0{,}062I_0$.

Изучим далее структуру поля $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ в дифракционно-ограниченном изображении задней грани канального отверстия, у которого, как уже отмечалось, апертура D много меньше зоны Френеля, т. е. $D\ll\sqrt{\lambda d}$. Согласно выражению (11) это поле в дифракционно-ограниченной системе вычисляется следующим образом:

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)\approx E_0\mathbf{e}^{j(k\tilde{x}_1^2/2d-j\pi/4)}\,\frac{D}{\sqrt{\lambda d}}\left\{\left[1-\frac{1}{6}\Big(\frac{k\tilde{x}_1D}{2d}\Big)^2\right]\mathrm{Rect}\,\Big(\frac{\tilde{x}_1}{D}\Big)\right\}\otimes\sin\Big(\frac{\omega_0\tilde{x}_1}{\pi\tilde{x}_1}\Big), \qquad (27)$$

где $2\omega_0$ — ширина полосы пропускаемых низкочастотным фильтром частот.

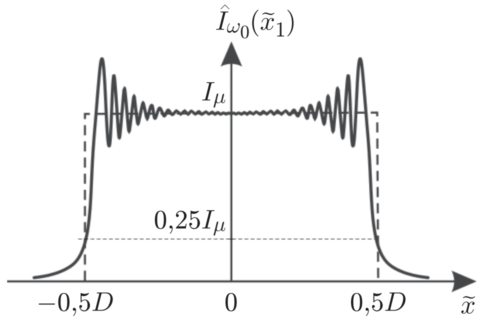

Рис. 6. Распределение интенсивности света $\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ в дифракционно-ограниченном изображении задней грани канального отверстия шириной D и глубиной $d(D \ll \sqrt{\lambda d})$ при сильных объёмных эффектах ($\theta_0 \gg \theta_{\text{кр}}$), $I_\mu = \mu I_0\,(\mu = D^2/(\lambda d) \ll 1)$ — интенсивность волны, освещающей заднюю грань

Выберем далее апертуру фильтра $2\theta_0$ такой, чтобы характерный размер импульсного отклика $\Delta \sim 2\pi/\omega_0 = \lambda/\theta_0$ был много меньше характерного размера Δ_D функции $\sin t/t$ $(t = kxD/2d)$, равного $\Delta_D \sim \lambda d/D$, что имеет место при $\theta_0 \gg D/d$. В этом случае импульсный отклик $h_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ ведёт себя по отношению к медленным функциям $\sin z/z$ и $\mathbf{e}^{jk\tilde{x}_1^2 d/2d}$ как дельта-функция Дирака, что позволяет их вынести из подынтегрального выражения (27):

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) \approx E_0\mathbf{e}^{j(k\tilde{x}_1^2/2d - j\pi/4)}\,\frac{D}{\sqrt{\lambda d}}\Big[1 - \frac{1}{6}\Big(\frac{k\tilde{x}_1 D}{2d}\Big)^2\Big][\Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 + 0{,}5D) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - 0{,}5D)]. \quad (28)$$

Отсюда следует, что интенсивность света в изображении задней грани канального отверстия изменяется по закону

$$\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = |\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)|^2 = \mu I_0\Big[1 - \frac{1}{3}\Big(\frac{k\tilde{x}_1 D}{2d}\Big)^2\Big][\Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 + 0{,}5D) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - 0{,}5D)]^2, \quad (29)$$

где коэффициент $\mu = D^2/(\lambda d) \ll 1$.

Как уже отмечалось, при ширине щелевой диафрагмы $D \ll \sqrt{\lambda d}$ (случай дифракции Фраунгофера) изменение распределения $\sin(k\tilde{x}_1 D/2d)/(k\tilde{x}_1 D/2d)$ (соответствующего дифракции света на передней щели) в пределах выходной щели пренебрежимо мало (десятые доли процента), и, таким образом, его влияние на выбор значения порога для определения положения границ выходной щели можно не учитывать. В этом случае его следует выбрать $I_{\text{пор}} = 0{,}25I_\mu$, где $I_\mu = \mu I_0(\mu = D^2/(\lambda d) \ll 1)$ — интенсивность волны, освещающей заднюю грань. Вследствие дифракции Фраунгофера эта интенсивность заметно меньше интенсивности волны I_0 на входе объекта.

В качестве примера на рис. 6 приведён типичный профиль интенсивности света $|\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)|^2$ в плоскости изображения задней грани. Он практически совпадает с профилем дифракционно-ограниченного изображения плоской щели ($d = 0$) шириной D.

Заключение. В данной работе изучены особенности формирования изображений граней протяжённых щелевых отверстий постоянной толщины симметричного типа с абсолютно поглощающими внутренними гранями в идеальной (аберрации и ограничивающие диафрагмы отсутствуют) и дифракционно-ограниченной системах. У таких объектов размеры входной (передней) и выходной (задней) апертур одинаковы, при этом апертуры центрированы. В основу расчётов положена оптико-физическая модель дифракционных явлений на протяжённых абсолютно поглощающих объектах с использованием эквивалентных транспарантов щелевого типа, отстоящих на расстоянии, равном толщине d объекта.

Установлено, что в идеальном случае поле в изображении передней грани протяжённого объекта эквивалентно полю, формируемому в пространственно-неинвариантной системе на основе проекционного объектива с ограниченной апертурой, роль которой выполняет задняя грань щелевого отверстия.

Исследована структура дифракционно-неограниченных изображений передней и задней граней для отверстий канального типа, у которых размер $D \ll \delta_d$, где $\delta_d = \sqrt{\lambda d}$ — размер зоны Френеля. Показано, что в этом случае поле в изображении передней грани соответствует дифракции Фраунгофера в свободном пространстве на расстоянии d. Что касается поля в изображении задней грани, то оно имеет форму, близкую к прямоугольной.

Изучена структура изображений передней и задней граней, формируемых в дифракционно-ограниченной системе. Установлено, что профили изображений в значительной степени зависят от параметра N, равного отношению критического угла дифракции $\theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d}$ к половинному угловому размеру апертурного фильтра θ_0. Показано, что при $N = \theta_{\text{кр}}/\theta_0 \gg 1$ (случай малых объёмных эффектов) профили изображений граней объекта близки друг к другу и во многом напоминают дифракционные изображения плоской щели. Установлено, что при определении размера апертуры D протяжённого объёма путём обработки его изображения стандартным пороговым алгоритмом могут возникать систематические погрешности, обусловленные как взаимодействием дифракционных картин краёв в случае плоского объекта ($d = 0$), так и влиянием вторичной дифракции света на задней грани. Показано также, что при $D \gg \sqrt{\lambda d}$ основной вклад в погрешность даёт вторая составляющая, равная $0{,}22\sqrt{\lambda d}$.

Исследованы особенности формирования дифракционно-ограниченных изображений задней грани при сильных объёмных эффектах ($N \ll 1$), т. е. когда глубина резкости системы много меньше толщины объекта ($\theta_0 \gg \theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d}$). Установлено, что поле в изображении задней грани можно представить в виде произведения двух полей, одно из которых соответствует дифракционной картине Френеля на передней апертуре, а второе — дифракционному изображению плоской щели. Изучена структура полей в дифракционно-ограниченном изображении канального отверстия. Предложены алгоритмы нахождения размера его апертуры.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке оптико-электронных систем прецизионного размерного контроля объектов типа пластин.

Благодарность. Автор выражает благодарность Е. С. Арсениной и Е. В. Сергееву за техническую помощь при подготовке данной работы.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственная регистрация № АААА-А17-117121270018-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. **Гудмен Дж.** Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
3. **Ваганов Р. Б., Каценленбаум Б. З.** Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
4. **Потехин А. И.** Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1948. 134 с.
5. **Уфимцев П. Я.** Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962. 244 с.
6. **Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.** Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.

7. **Хёнл Х., Мауэ М., Вестпфаль К.** Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
8. **Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В.** Дифракция Фраунгофера на телах постоянной толщины // Автометрия. 1987. № 3. С. 79–92.
9. **Chugui Yu. V., Krivenkov B. E.** Fraungofer diffraction by volumetric bodies of constant thickness // JOSA. 1989. **6**, N 5. P. 617–626.
10. **Чугуй Ю. В.** Определение геометрических параметров протяжённых объектов постоянной толщины по их дифракционным картинам // Автометрия. 1991. № 6. С. 76–92.
11. **Чугуй Ю. В.** Фурье-оптика $3D$-объектов применительно к размерному контролю // Оптико-информационные измерительные и лазерные технологии и системы: Сб. тр. КТИ НП СО РАН. Новосибирск: Изд-во «Гео», 2012. С. 15–42.
12. **Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В.** Дифракция Фраунгофера на отражающих объёмных телах постоянной толщины // Автометрия. 1991. № 4. С. 113–118.
13. **Чугуй Ю. В.** Дифракционные явления на трёхмерных телах постоянной толщины и определение их геометрических параметров // $3D$ лазерные информационные технологии. Отв. ред. П. Е. Твердохлеб. Новосибирск: Изд-во «Офсет», 2003. С. 428–479.
14. **Чугуй Ю. В.** Особенности формирования и оконтуривания изображений объёмных тел в когерентном свете // Автометрия. 1991. № 4. С. 103–112.
15. **Чугуй Ю. В.** Формирование в когерентном свете изображений асимметричного абсолютно отражающего края $3D$-объекта // Автометрия. 2021. **57**, № 3. С. 102–116. DOI: 10.15372/AUT20210312.
16. **Чугуй Ю. В.** Дифракционные явления на протяжённой асимметричной щели с абсолютно поглощающими внутренними гранями // Автометрия. 2022. **58**, № 1. С. 54–67. DOI: 10.15372/AUT20220107.
17. **Сороко Л. М.** Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.
18. **Папулис А.** Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.

Поступила в редакцию 26.04.2022
После доработки 16.05.2022
Принята к публикации 18.05.2022