УДК 681.51

КОМБИНИРОВАННОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ПЕРЕВЁРНУТЫХ МАЯТНИКОВ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ УПРАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛОВ

© Е. Л. Ерёмин[1], Л. В. Никифорова[1], Е. А. Шеленок[2]

[1] *Амурский государственный университет,*
675000, г. Благовещенск, Игнатьевское шоссе, 21
[2] *Тихоокеанский государственный университет,*
680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136
E-mail: 007141@pnu.edu.ru

С использованием критерия гиперустойчивости, быстродействующих фильтров-корректоров и неявной эталонной модели в условиях ограничений управляющих воздействий и априорной параметрической неопределённости рассматривается решение задачи синтеза системы комбинированного управления перевёрнутыми маятниками, соединёнными пружиной. С помощью вычислительных экспериментов исследуется качество работы предложенной системы децентрализованного управления.

Ключевые слова: комбинированный регулятор, априорная неопределённость, механическая система, критерий гиперустойчивости, L-диссипативность, фильтр-корректор, неявная эталонная модель.

DOI: 10.15372/AUT20210409

Введение. Одними из самых актуальных проблем современной теории и практики автоматического управления являются анализ и синтез крупномасштабных систем для сложных механических объектов. Основная сложность разработки алгоритмов управления подобными системами заключается в отсутствии физической возможности использования внутренней информации локальных подсистем в других подсистемах. В данной ситуации наиболее целесообразным способом проектирования законов управления является так называемое децентрализованное управление, при котором синтезируются отдельные контуры управления, использующие информацию из своих локальных подсистем [1–3]. Основной областью применения децентрализованных систем является управление различными механическими системами, к которым относятся: роботы-манипуляторы, системы перевёрнутых маятников, автоматизированные дорожные системы, механические компоненты энергетических объектов и др. [4–6]. При этом задачи синтеза алгоритмов дополнительно усложняются, если в объекте управления присутствуют входные ограничения, обусловленные их конструктивными особенностями либо особенностями среды функционирования [7, 8].

В данной работе с использованием результатов [9–12] рассматривается новое решение задачи синтеза комбинированного нелинейного алгоритма управления системой перевёрнутых маятников с ограничениями управляющих воздействий.

Математическая модель объекта управления. Рассматривается механическая система, состоящая из двух идентичных по исполнению перевёрнутых маятников, соединённых пружиной (рис. 1).

Известно [6], что математическое описание подобных многосвязных систем в общем случае представимо в виде

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) + Z_i(q, \dot{q}) + D_i(q_i, \dot{q}_i) = \sigma_i(u_i),$$

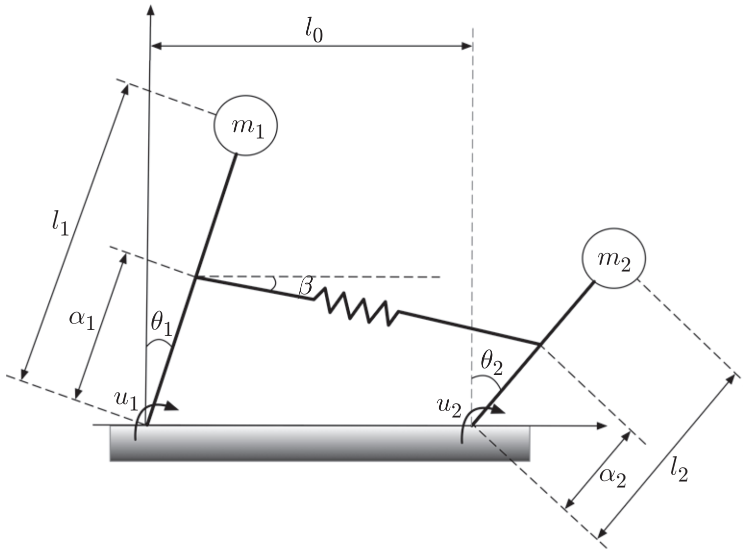

Рис. 1. Система перевёрнутых маятников

где $q_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ — вектор обобщённых координат i-й подсистемы, $i = 1, 2, \ldots$; $M_i(q_i)$ — матрица инерции размера $n_i \times n_i$; $C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i$ — матрица кориолисовых и центробежных сил; $g_i(q_i)$ — потенциальная энергия подсистем; $\sigma_i(u_i)$ — нелинейные функции насыщения:

$$\sigma_i(u_i) = \begin{cases} \sigma_{0i}, & u_i > \sigma_{0i}, \\ u_i, & |u_i| \leqslant \sigma_{0i}, \\ -\sigma_{0i}, & u_i < -\sigma_{0i}; \end{cases}$$

u_i — управляющие воздействия, $i = 1, 2$; $Z_i(q, \dot{q})$ — нелинейные функции, описывающие перекрёстные связи между подсистемами; $D_i(q_i, \dot{q}_i)$ — функции, описывающие действующие на каждую подсистему возмущения. Математическую модель представленной на рис. 1 системы по аналогии с [6] можно записать с помощью уравнений

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 g l_1 \sin(\theta_1) &= \sigma_1(u_1) - b_1 \dot{\theta}_1 + Q\alpha_1 \cos(\theta_1 - \beta), \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \sin(\theta_2) &= \sigma_2(u_2) - b_2 \dot{\theta}_2 - Q\alpha_2 \cos(\theta_2 - \beta), \end{aligned} \tag{1}$$

где $q_i = \theta_i$; $M_i = m_i l_i^2$; $C_i = 0$; $g_i = -m_i g l_i \sin(\theta_i)$; $Z_i = (-1)^i Q\alpha_i \cos(\theta_i - \beta)$; $D_i = b_i \dot{\theta}_i$; b_1, b_2 — коэффициенты демпфирования;

$$Q = k[1 + A^2(l_k - l_0)^2](l_k - l_0); \qquad |A(l_k - l_0)| < 1;$$

$$\beta = \arctan\Big(\frac{\alpha_1 \cos(\theta_1) - \alpha_2 \cos(\theta_2)}{l_0 - \alpha_1 \sin(\theta_1) + \alpha_2 \sin(\theta_2)}\Big); \tag{2}$$

$$l_k = \sqrt{(l_0 + \alpha_2 \sin(\theta_2) - \alpha_1 \sin(\theta_1))^2 + (\alpha_1 \cos(\theta_1) - \alpha_2 \cos(\theta_2))^2}.$$

Вводя в рассмотрение векторы локальных переменных состояния для каждой отдельной подсистемы (маятника) $\mathbf{x}_i(t) = [x_{1i}(t), x_{2i}(t)]^\top = [\theta_i, \dot{\theta}_i]^\top$, с помощью ряда преобразований модель системы маятников (1), (2) запишем в форме вход-выход:

$$y_i(t) = W_i(p)\{\sigma_i(u_i(t)) + f_i(\mathbf{x}_i(t)) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))\}; \qquad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \tag{3}$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования; $y_i(t)$ — выходные сигналы локальных подсистем; $W_i(p)$ — передаточные функции линейных частей локальных подсистем; $\mathbf{x}_i(t) = [x_{1i}(t), x_{2i}(t)]^\top = [\theta_i, \dot{\theta}_i]^\top$ — векторы переменных состояния локальных подсистем; $f_i(\mathbf{x}_i(t)) = J_i^{-1}[m_i g l_i \sin(x_{1i}(t)) - b_i x_{2i}(t)]$ — сигнал возмущающих воздействий; $F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) = (-1)^i Q\alpha_i \cos(x_{1i}(t) - \beta)$ — перекрёстные связи.

Будем полагать, что работа объекта управления (3) протекает при следующих допущениях:

1) возмущения и нелинейные перекрёстные связи удовлетворяют неравенствам

$$|f_i(\mathbf{x}_i(t))| \leqslant f_{0i}, \qquad f_{0i} = \mathrm{const}, \qquad \forall \mathbf{x}_i(t) \neq 0, \tag{4}$$

$$|F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))| \leqslant F_{0i}, \qquad F_{0i} = \mathrm{const}, \qquad \forall \mathbf{x}_i(t), \quad \mathbf{x}_j(t) \neq 0, \quad i \neq j, \tag{5}$$

где f_{0i} и F_{0i} — неизвестные величины;

2) числовые параметры возмущений и перекрёстных связей являются априори неопределёнными и удовлетворяют соотношениям

$$f_i(\mathbf{x}_i(t)) = f_{\xi i}(\mathbf{x}_i(t)), \qquad F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)) = F_{\xi i}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)),$$

где ξ — неизвестный набор параметров, входящих в состав известного ограниченного числового множества Ξ;

3) передаточные функции линейных звеньев локальных подсистем описываются в виде

$$W_i(p) = 1/a_i(p), \qquad a_i(p) = p^2 + a_{1i}p + a_{2i}, \qquad i = 1, 2,$$

где $a_i(p)$ — нормированный полином с неизвестными числовыми коэффициентами и произвольным распределением корней;

4) для непосредственного измерения доступны только выходы локальных подсистем $y_i(t)$.

С учётом особенностей рассматриваемого объекта пропустим измеряемые сигналы локальных подсистем $y_i(t)$ через выходные фильтры-корректоры (ВФК) [10]

$$y_{Fi}(t) = W_{Fi}(p) y_i(t) = \frac{T_i p + 1}{T_i^* p + 1}\, y_i(t), \qquad i = 1, 2, \tag{6}$$

где $y_{Fi}(t)$ и $y_i(t)$ — соответственно выходные и входные сигналы; $W_{Fi}(p)$ — передаточные функции фильтров-корректоров; T_i, T_i^* — постоянные времени фильтров, причём значение T_i^* мало. В этом случае модель последовательного соединения объекта управления и фильтра-корректора (6) в форме вход-выход будет иметь вид

$$y_{Fi}(t) = W_{Fi}(p) W_i(p)\{\sigma_i(u_i(t)) + f_i(\mathbf{x}_i(t)) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))\} =$$

$$= \frac{\tilde{b}_i(p)}{\tilde{a}_i(p)}\, \{\sigma_i(u_i(t)) + f_i(\mathbf{x}_i(t)) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))\},$$

$$\tilde{b}_i(p) = T_i p + 1, \qquad \tilde{a}_i(p) = a_i(p)(T_i^* p + 1), \qquad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \tag{7}$$

Реальному произведению передаточных функций $\tilde{W}_i(p) = W_{Fi}(p)W_i(p)$ всегда можно поставить в соответствие их «виртуальное» произведение

$$\tilde{W}_i(p) = \frac{b_i(p)}{a_i(p)}\,\frac{T_ip+1}{T_i^*p+1} = \frac{\tilde{b}_i(p)}{a_i(p)}\,\frac{1}{T_i^*p+1} = \hat{W}_i(p)\,\frac{1}{T_i^*p+1}, \quad i = 1, 2.$$

Как показано, например, в [9], за счёт выбора малых значений параметров T_i^* допустимо заменить модель (7) следующей моделью:

$$y_{Fi}(t) \cong \frac{\tilde{b}_i(p)}{a_i(p)}\,y_i(t) = \hat{W}_i(p)\{\sigma_i(u_i(t)) + f_i(\mathbf{x}_i(t)) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))\}, \qquad \tilde{b}_i(p) = T_ip + 1,$$

или эквивалентной моделью в форме вход-состояние-выход:

$$\frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} = \mathbf{N}_i\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{b}_i\{\mathbf{a}_i^\top\mathbf{x}_i(t) + \sigma_i(u_i(t)) + f_i(\mathbf{x}_i(t)) + F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t))\},$$

$$y_{Fi}(t) = \mathbf{c}_i^\top\mathbf{x}_i(t), \qquad x_i(t_0) = x_{i0}, \qquad t \geqslant t_0 = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \tag{8}$$

где $\mathbf{x}_i(t) = [x_{1i}(t), x_{2i}(t)]^\top$ — векторы переменных состояния локальных подсистем; $\mathbf{N}_i$ — нильпотентные матрицы размера 2×2; $\mathbf{b} = [0, 1]^\top$ — стационарные векторы; $\mathbf{a}_i^\top = [a_{2i}, a_{1i}]$ и $\mathbf{c}_i^\top = [\tilde{b}_{1i}, \tilde{b}_{0i}] = [1, T_i]$ — стационарные векторы с соответствующими коэффициентами.

Цели управления и эталонные модели. Определим основную цель управления как высокоточное слежение выходов локальных подсистем $y_i(t)$ объекта управления (1)–(3), (8) за сигналами $r_i(t)$, задающими требуемое угловое смещение каждого маятника:

$$\lim_{t\to\infty} |r_i(t) - y_i(t)| \leqslant \Delta_{ri}, \qquad \Delta_{ri} = \text{const}, \tag{9}$$

где Δ_{ri} — малые относительно соответствующих максимальных значений задающих сигналов величины (требуемая точность слежения).

Если требуемую динамику выходов основных локальных контуров управления $y_{Fi}(t)$ по аналогии с [9, 10] задать за счёт использования задающих фильтров-корректоров (ЗФК)

$$\hat{r}_i(t) = W_{Fi}(p)r_i(t) = \frac{T_ip+1}{T_i^*p+1}\,r_i(t), \tag{10}$$

где $r_i(t)$ — некоторые дополнительные командные сигналы, то для рассматриваемого объекта можно сформулировать дополнительную цель управления: требуется синтезировать явный вид закона управления

$$u_i(t) = u_i(y_{Fi}(t), \hat{r}_i(t)), \tag{11}$$

обеспечивающего при наличии возмущений (4) и нелинейных перекрёстных связей (5), а также при измерении только выходных сигналов $y_i(t)$ выполнение целей

$$|y_i^*(t) - y_{Fi}(t)| \cong |\hat{r}_i(t) - y_{Fi}(t)| \leqslant \hat{\Delta}_{ri}, \qquad \hat{\Delta}_{ri} = \text{const}, \tag{12}$$

где $\hat{\Delta}_{ri}$ — малая величина; $y_i^*(t)$ — выходы неявной эталонной модели (НЭМ):

$$y_i^*(t) = \frac{1}{\chi_{*i}^{-1}p+1}\,\hat{r}_i(t) = \frac{\chi_{*i}}{p+\chi_{*i}}\,\hat{r}_i(t), \qquad \chi_{*i} = \text{const} > 0, \tag{13}$$

которую при $\chi_{*i} \gg 0$ допустимо представить в виде $y_i^*(t) \cong \hat{r}_i(t)$ [9, 10]. При этом для решения задачи синтеза закона управления вместо математической модели НЭМ (13) целесообразно использовать её аналог:

$$y_i^*(t) = \frac{\chi_{*i}\tilde{b}_i(p)\tilde{b}_{1i}}{(p+\chi_{*i})\tilde{b}_i(p)\tilde{b}_{1i}}\,\hat{r}_i(t) = \frac{\hat{\chi}_{*i}\tilde{b}_i(p)\tilde{b}_{1i}^{-1}}{(p+\chi_{*i})\tilde{b}_i(p)}\,\hat{r}_i(t), \qquad \hat{\chi}_{*i} = \chi_{*i}\tilde{b}_{1i},$$

который в форме вход-состояние-выход запишем в виде следующих уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{x}_i^*(t)}{dt} = \mathbf{A}_i^*\mathbf{x}_i^*(t) + \mathbf{b}_i\hat{\chi}_{i*}\hat{r}_i(t); \\ y_i^*(t) = \mathbf{c}_i^\top\mathbf{x}_i^*(t), \qquad \mathbf{x}_i^*(t_0) = 0, \qquad t \geqslant t_0 = 0, \quad i = 1, 2, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\mathbf{x}_i^*(t) = [x_{1i}^*(t), x_{2i}^*(t)]^\top$; $\mathbf{A}_i^* = \mathbf{N}_i + \mathbf{b}_i\mathbf{a}_{*i}^\top = \mathbf{N}_i + \mathbf{b}_i(\mathbf{a}_i - \chi_{*i}\mathbf{c}_i)^\top$ — гурвицевы матрицы; $\chi_{*i}, \hat{\chi}_{*i} = \mathrm{const} \gg 0$ — большие числа; $\mathbf{a}_{*i}^\top = (\mathbf{a}_i - \chi_{*i}\mathbf{c}_i)^\top = [a_{*2i}, a_{*1i}] = [a_{2i} - \chi_{*i}\tilde{b}_{1i}, a_{1i} - \chi_{*i}\tilde{b}_{0i}]$ — вектор с заданными коэффициентами.

Синтез комбинированного алгоритма управления. Рассмотрим вектор отклонений переменных состояния НЭМ (14) и объекта управления с ВФК (8) $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i^*(t) - \mathbf{x}_i(t)$ и запишем эквивалентную математическую модель рассматриваемой системы в следующем виде:

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{e}_i(t)}{dt} = \mathbf{A}_{*i}\mathbf{e}_i(t) + \mathbf{b}_i\mu_i(t); \qquad v_i(t) = \mathbf{c}_i^\top\mathbf{e}_i(t) = y_i^*(t) - y_{Fi}(t) = \hat{r}_i(t) - y_{Fi}(t), \\ \mu_i(t) = \hat{\chi}_{*i}\hat{r}_i(t) - \chi_{*i}y_{Fi}(t) - u_i(t) - [\sigma_i(u_i(t)) - u_i(t)] - f_i(\mathbf{x}_i(t)) - F_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_j(t)), \end{gathered} \tag{15}$$

где $v_i(t)$ и $\mu_i(t)$ — видоизменённые сигналы выходов и сигналы управляющих воздействий соответственно. Согласно методике критерия гиперустойчивости [9–11] для эквивалентной системы (15) необходимо выполнить два условия:

$$\mathrm{Re}\,[\mathbf{c}_i(j\omega\mathbf{E}_i - \mathbf{A}_i^*)^{-1}\mathbf{b}_i] > 0, \qquad \forall\omega \geqslant 0, \tag{16}$$

$$\eta_i(0,t) = -\int\limits_0^t \mu_i(\varsigma)v_i(\varsigma)\,d\varsigma \geqslant -\eta_{0i}, \qquad \eta_{0i} = \mathrm{const}, \quad \forall t > 0, \quad i = 1, 2, \tag{17}$$

где $\mathbf{E}_i$ — единичные матрицы размера 2×2. Справедливость частотного условия (16) является очевидной, поскольку передаточная функция линейной части системы (15) имеет вид

$$W_i(s) = \mathbf{c}_i(s\mathbf{E}_i - \mathbf{A}_i^*)^{-1}\mathbf{b}_i = \frac{1}{\chi_{*i}^{-1}s + 1}$$

(s — комплексная переменная). Поэтому требуется определить условия, которые обеспечат выполнение интегральных неравенств (17). Учитывая вид сигналов $\mu_i(t)$ из (15), а также определяя сигнал управления как $u_i(t) = \sum\limits_{d=1}^{3} u_{di}(t)$, перепишем левые части неравенства (17):

$$\eta_i(0,t) = \Bigl(\int\limits_0^t u_{i1}(\varsigma)v_i(\varsigma)\,d\varsigma - \int\limits_0^t \hat{\chi}_{*i}\hat{r}_i(\varsigma)v(\varsigma)\,d\varsigma\Bigr) + \Bigl(\int\limits_0^t u_{i2}(\varsigma)v_2(\varsigma)\,d\varsigma + \int\limits_0^t \chi_{*i}y_{Fi}(\varsigma)v(\varsigma)\,d\varsigma\Bigr) +$$

$$+\Big(\int\limits_0^t u_{i3}(\varsigma)v_i(\varsigma)\,d\varsigma+\int\limits_0^t[f_i(\mathbf{x}_i(\varsigma))+F_i(\mathbf{x}_i(\varsigma),\mathbf{x}_j(\varsigma))]v(\varsigma)\,d\varsigma\Big)+$$

$$+\int\limits_0^t[\sigma_i(u_i(\varsigma))-u_i(\varsigma)]v_i(\varsigma)\,d\varsigma=\sum_{d=1}^{3}\eta_{di}(0,t)+\int\limits_0^t[\sigma_i(u_i(\varsigma))-u_i(\varsigma)]v_i(\varsigma)\,d\varsigma. \qquad (18)$$

Синтезируем составляющую

$$u_{1i}(t)=h_{11i}\hat r_i(t)\int\limits_0^t\hat r_i(\varsigma)v_i(\varsigma)\tilde\delta_i(\varsigma)\,d\varsigma+h_{12i}\hat r_i^2(t)v_i(t)\tilde\delta_i(t),\qquad i=1,2, \qquad (19)$$

где $h_{11i},h_{12i}=\mathrm{const}>0$; $\tilde\delta_i(t)$ — выходы динамических переключателей:

$$\tau_i\,\frac{d\tilde\delta_i(t)}{dt}+\tilde\delta_i(t)=\delta_i(t),\qquad \tilde\delta_i(0)=0,\qquad \delta_i(t)=\begin{cases}1, & \forall[\sigma_i(u_i(t))-u_i(t)]v_i(t)\geqslant 0;\\ \delta_{0i}, & \forall[\sigma_i(u_i(t))-u_i(t)]v_i(t)<0,\end{cases} \qquad (20)$$

здесь $\tau_i=\mathrm{const}>0$; $\delta_i(t)$ — функции переключения; $0<\delta_{0i}<1$ — масштабирующие коэффициенты. Тогда интеграл $\eta_{1i}(0,t)$ из (18) с учётом $\tilde\delta(t)\geqslant\delta_{0i}$ можно оценить следующим образом:

$$\eta_{1i}(0,t)=h_{11i}\int\limits_0^t\hat r_i(\varsigma)v_i(\varsigma)\int\limits_0^\varsigma\hat r_i(\zeta)v_i(\zeta)\tilde\delta_i(\zeta)\,d\zeta\,d+$$

$$+\,h_{12i}\int\limits_0^t\hat r_{2i}(\varsigma)v_i^2(\varsigma)\tilde\delta_i(\varsigma)\,d(\varsigma)-\int\limits_0^t\hat\chi_{*i}\hat r_i(\varsigma)v(\varsigma)\,d\varsigma\geqslant$$

$$\geqslant h_{11i}\delta_{0i}\int\limits_0^t\hat r_i(\varsigma)v_i(\varsigma)\int\limits_0^\varsigma\hat r_i(\zeta)v_i(\zeta)\,d\zeta\,d\varsigma+h_{12i}\delta_{0i}\int\limits_0^t[\hat r_i(\varsigma)v_i(\varsigma)]^2\,d\varsigma-\int\limits_0^t\hat\chi_{*i}\hat r_i(\varsigma)v(\varsigma)\,d\varsigma\geqslant$$

$$\geqslant\frac{h_{11i}\delta_{0i}}{2}\Big(\int\limits_0^t\hat r_i(\varsigma)v_i(\varsigma)\,d\varsigma\Big)^2-\hat\chi_{*i}\int\limits_0^t\hat r_i(\varsigma)v(\varsigma)\,d\varsigma\pm\frac{\hat\chi_{*i}^2}{2h_{11i}\delta_{0i}}\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{\hat\chi_{*i}^2}{2h_{11i}\delta_{0i}}=-\eta_{01i}^2,\qquad \eta_{01i}=\mathrm{const},\quad \forall t>0.$$

Если явный вид $u_{2i}(t)$ синтезировать как

$$u_{2i}(t)=h_{21i}y_{Fi}(t)\int\limits_0^t y_{Fi}(\varsigma)v_i(\varsigma)\tilde\delta_i(\varsigma)\,d\varsigma+h_{22i}y_{Fi}^2(t)v_i(t)\tilde\delta_i(t),$$

$$h_{21i},h_{22i}=\mathrm{const}>0,\qquad i=1,2, \qquad (21)$$

то для интеграла $\eta_{2i}(0,t)$ будем иметь следующую справедливую оценку:

$$\eta_{2i}(0,t) = h_{21i}\int\limits_0^t y_{Fi}(\varsigma)v_i(\varsigma)\int\limits_0^{\varsigma} y_{Fi}(\zeta)v_i(\zeta)\tilde{\delta}_i(\zeta)\,d\zeta\,d+$$

$$+\,h_{22i}\int\limits_0^t y_{Fi}^2(\varsigma)v_i^2(\varsigma)\delta_i(\varsigma)d(\varsigma)+\int\limits_0^t \chi_{*i}y_{Fi}(\varsigma)v(\varsigma)\,d\varsigma \geqslant$$

$$\geqslant h_{21i}\delta_{0i}\int\limits_0^t y_{Fi}(\varsigma)v_i(\varsigma)\int\limits_0^{\varsigma} y_{Fi}(\zeta)v_i(\zeta)\,d\zeta\,d\varsigma+h_{22i}\delta_{0i}\int\limits_0^t [y_{Fi}(\varsigma)v_i(\varsigma)]^2\,d\varsigma+\chi_{*i}\int\limits_0^t y_{Fi}(\varsigma)v(\varsigma)\,d\varsigma \geqslant$$

$$\geqslant \frac{h_{21i}\delta_{0i}}{2}\Big(\int\limits_0^t y_{Fi}(\varsigma)v_i(\varsigma)\,d\varsigma\Big)^2+\chi_{*i}\int\limits_0^t y_{Fi}(\varsigma)v_i(\varsigma)\,d\varsigma \pm \frac{\chi_{*i}^2}{2h_{21i}\delta_{0i}} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\chi_{*i}^2}{2h_{21i}\delta_{0i}} = -\eta_{02i}^2, \qquad \eta_{02i}=\mathrm{const}, \quad \forall t>0.$$

Составляющую $u_{3i}(t)$ закона управления (11) синтезируем в виде

$$u_{3i}(t) = h_{31i}\int\limits_0^t v_i(\varsigma)\hat{\delta}_i(\varsigma)\,d\varsigma + h_{32i}v_i(t)\hat{\delta}_i(t), \qquad h_{31i}, h_{32i}=\mathrm{const}>0, \quad i=1,2, \tag{22}$$

и оценим интегральное слагаемое $\eta_{3i}(0,t)$ как

$$\eta_{3i}(0,t) = h_{31i}\int\limits_0^t v_i(\varsigma)\int\limits_0^{\varsigma} v_i(\zeta)\tilde{\delta}(\zeta)\,d\zeta\,d\varsigma + h_{32i}\int\limits_0^t v_i^2(\varsigma)\tilde{\delta}(\varsigma)\,d\varsigma +$$

$$+\int\limits_0^t [f_i(\mathbf{x}_i(\varsigma))+F_i(\mathbf{x}_i(\varsigma),\mathbf{x}_j(\varsigma))]v_i(\varsigma)\,d\varsigma \pm (f_{0i}+F_{0i})\Big|\int\limits_0^t v_i(\varsigma)\,d\varsigma\Big| \geqslant$$

$$\geqslant h_{31i}\delta_{0i}\int\limits_0^t v_i(\varsigma)\int\limits_0^{\varsigma} v_i(\zeta)\,d\zeta\,d\varsigma + h_{32i}\delta_{0i}\int\limits_0^t v_i^2(\varsigma)\,d\varsigma - (f_{0i}+F_{0i})\Big|\int\limits_0^t v_i(\varsigma)\,d\varsigma\Big| \geqslant$$

$$\geqslant h_{31i}\delta_{0i}\Big(\int\limits_0^t v_i(\varsigma)\,d\varsigma\Big)^2 - (f_{0i}+F_{0i})\Big|\int\limits_0^t v_i(\varsigma)\,d\varsigma\Big| \pm \frac{(f_{0i}+F_{0i})^2}{2h_{31i}\delta_{0i}} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{(f_{0i}+F_{0i})^2}{2h_{31i}\delta_{0i}} = -\eta_{03i}^2 = \mathrm{const}, \qquad \forall t>0.$$

Таким образом, с учётом полученных оценок для интеграла (18) будет справедливо

$$\eta_i(0,t) \geqslant \int\limits_0^t [\sigma_i(u_i(\varsigma)) - u_i(\varsigma)]v_i(\varsigma)\,d\varsigma - \frac{\hat{\chi}^2_{*i}}{2h_{11i}\delta_{0i}} - \frac{\chi^2_{*i}}{2h_{21i}\delta_{0i}} - \frac{(f_{0i}+F_{0i})^2}{2h_{31i}\delta_{0i}},$$
$$\forall t > 0, \qquad i = 1,2. \tag{23}$$

Представим интеграл в правой части (23) в виде соотношения

$$\int\limits_0^t [\sigma_i(u_i(\varsigma)) - u_i(\varsigma)]v_i(\varsigma)\,d\varsigma =$$
$$= \int\limits_0^{t_*} [\sigma_i(u_i(\varsigma)) - u_i(\varsigma)]v_i(\varsigma)\,d\varsigma + \int\limits_{t_*}^t [\sigma_i(u_i(\varsigma)) - u_i(\varsigma)]v_i(\varsigma)\,d\varsigma,$$

где t_* — момент времени, начиная с которого всегда выполняется условие $|u_i(t)| \leqslant \sigma_{0i}$. В этом случае, как показано, например, в [12], в силу того что при $t > t_*$ имеет место тождество $\sigma_i(u_i(t)) = u_i(t)$, будут справедливы неравенства

$$\Big|\int\limits_0^{t_*} [\sigma_i(u_i(\varsigma)) - u_i(\varsigma)]v_i(\varsigma)\,d\varsigma\Big| \leqslant \eta^2_{04i}, \quad \eta_{04i} = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [0, t_*].$$

Тогда для соотношения (23) будет справедлива оценка

$$\eta_i(0,t) \geqslant -\eta^2_{04i} - \frac{\hat{\chi}^2_{*i}}{2h_{11i}\delta_{0i}} - \frac{\chi^2_{*i}}{2h_{21i}\delta_{0i}} - \frac{(f_{0i}+F_{0i})^2}{2h_{31i}\delta_{0i}} =$$
$$= -\sum_{d=1}^{4} \eta^2_{0di} = -\eta^2_{0i} = \mathrm{const}, \qquad \forall t > 0, \quad i = 1,2, \tag{24}$$

не противоречащая справедливости интегрального неравенства (17).

Отметим, что присутствие в основных локальных контурах управления малоинерционных ВФК может привести к пиковым выбросам в переходных процессах, негативно сказывающихся на формировании управляющих воздействий и устойчивости системы. По аналогии с [13] в целях снижения влияния пиков на работу системы ограничим выходы ВФК с помощью элементов типа «насыщение». Закон управления (14) при этом примет вид

$$u_i(t) = \Big(h_{11i}\int\limits_0^t \hat{r}_i(\varsigma)v_i(\varsigma)\tilde{\delta}_i(\varsigma)\,d\varsigma + h_{12i}\hat{r}_i(t)v_i(t)\tilde{\delta}_i(t)\Big)\hat{r}_i(t) +$$
$$+ \Big(h_{21i}\int\limits_0^t sat(y_{Fi}(\varsigma))v_i(\varsigma)\tilde{\delta}_i(\varsigma)\,d\varsigma + h_{22i} sat(y_{Fi}(t))v_i(t)\tilde{\delta}_i(t)\Big) sat(y_{Fi}(t)) +$$
$$+ h_{31i}\int\limits_0^t v_i(\varsigma)\hat{\delta}_i(\varsigma)\,d\varsigma + h_{32i}v_i(t)\hat{\delta}_i(t), \qquad i = 1,2;$$

$$\tau_i \frac{d\tilde{\delta}_i(t)}{dt} + \tilde{\delta}_i(t) = \delta_i(t), \quad \tilde{\delta}_i(0) = 0, \quad \delta_i(t) = \begin{cases} 1, & \forall[\sigma_i(u_i(t)) - u_i(t)]v_i(t) \geqslant 0; \\ \delta_{0i}, & \forall[\sigma_i(u_i(t)) - u_i(t)]v_i(t) < 0. \end{cases} \qquad (25)$$

Вычислительный эксперимент. Для анализа качества работы синтезированной системы управления рассмотрим задачу управления системой перевёрнутых маятников (см. рис. 1) при следующих параметрах: $m_1 = 0{,}44$ кг, $m_2 = 0{,}55$ кг, $l_1 = 0{,}3$ м, $l_2 = 0{,}35$ м, $b_1 = b_2 = 0{,}009$, $k = 30$ Н/м,

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0{,}1 \text{ м}, & t \in [0,1) \text{ с}; \\ 0{,}3 \text{ м}, & t \in [1,6] \text{ с}, \end{cases} \qquad \alpha_2 = \begin{cases} 0{,}35 \text{ м}, & t \in [0,3) \cup [5,6] \text{ с}; \\ 0{,}05 \text{ м}, & t \in [3,5) \text{ с}, \end{cases}$$

$$\sigma_i(u_i(t)) = \begin{cases} 17 \text{ Н}\cdot\text{м}, & u_i(t) > 17 \text{ Н}\cdot\text{м}; \\ u_i(t), & |u_i(t)| \leqslant 17 \text{ Н}\cdot\text{м}; \\ -17 \text{ Н}\cdot\text{м}, & u_i(t) < -17 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{cases}$$

Требуемые траектории движения маятников сформируем с помощью задающих воздействий

$$r_1(t) = 0{,}55\cos(6{,}28t), \qquad r_2(t) = 0{,}35\cos(9{,}42t),$$

начальные положения маятников определим как их вертикальные положения, т. е. $\mathbf{x}_i(0) = [0,0]^\top$. Динамику ВФК (10) и ЗФК (15) зададим соотношениями

$$y_{Fi}(t) = \frac{0{,}05p+1}{0{,}001p+1}\, y_i(t), \qquad \hat{r}(t) = \frac{0{,}05p+1}{0{,}001p+1} r(t), \qquad i = 1,2.$$

В ходе имитационного моделирования, результаты которого представлены на рис. 2 и 3, в целях увеличения быстродействия системы управления были подобраны постоянные коэффициенты комбинированного регулятора (25) со следующими значениями:

$$h_{11i} = 200, \quad h_{12i} = 250, \quad h_{21i} = 450, \quad h_{22i} = 330, \quad h_{31i} = 500, \quad h_{32i} = 200,$$

$$\tau_i = 0{,}2, \quad \delta_{0i} = 0{,}2, \quad i = 1,2.$$

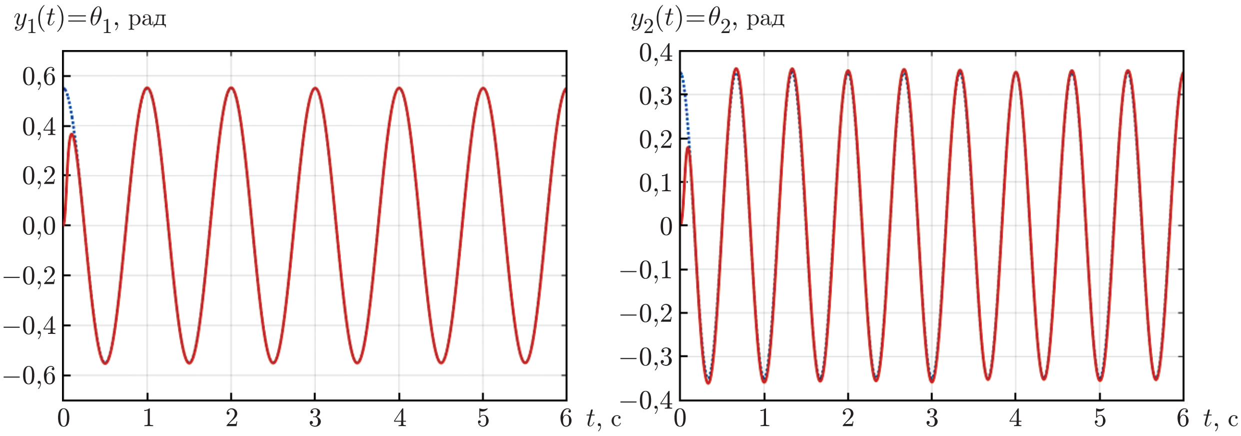

Рис. 2. Требуемые траектории (прерывистые линии) и фактические перемещения (сплошные линии) первого (график слева) и второго (график справа) маятников

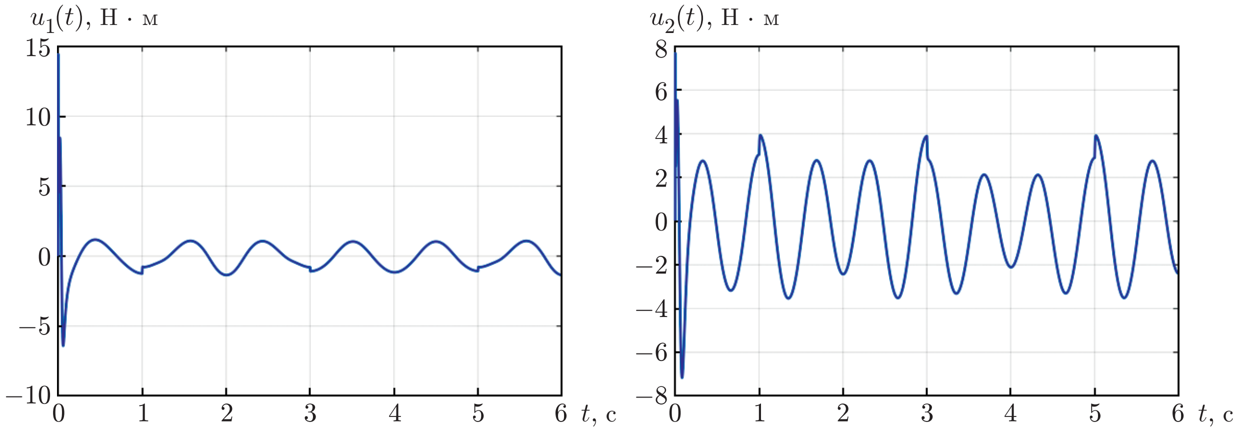

Рис. 3. Управляющие моменты первого (график слева) и второго (график справа) маятников

Полученные динамические характеристики показывают, что предложенная система хорошо отрабатывает задающие воздействия в условиях скачкообразного изменения положения крепления пружины, связывающей маятники (см. рис. 2).

При этом сигналы управляющих моментов (см. рис. 3) являются более качественными в сравнении с управляющими моментами, формируемыми в аналогичной системе, предложенной в [6].

Заключение. С помощью критерия гиперустойчивости В. М. Попова, быстродействующих фильтров-корректоров и неявной эталонной модели представлено решение задачи комбинированного нелинейного управления системой перевёрнутых маятников, соединённых пружиной, при ограничении управляющих сигналов и изменении мест крепления упругой связи между маятниками. На этапе вычислительных экспериментов показано достаточно высокое качество функционирования разработанной системы управления. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании систем управления манипуляционными роботами, а также систем, объекты управления которых содержат неаффинности по входным воздействиям и имеют запаздывания по состоянию или нейтральному типу.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00712).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пыркин А. А., Арановский С. В., Бобцов А. А. и др.** Управление многоканальными нелинейными системами вида Лурье на основе теоремы Фрадкова // Автоматика и телемеханика. 2018. № 6. С. 140–154.
2. **Siljak D. D.** Decentralized Control of Complex Systems. San Diego, CA: Academic, 1991. 525 p.
3. **Karimi B., Sadeghi M. E.** Decentralized adaptive control of large-scale non-affine nonlinear time-delay systems using neural networks // Journ. of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers. 2017. **14**, N 4. P. 1–8.
4. **Karimi B., Menhaj M. B.** Non-affine nonlinear adaptive control of decentralized large-scale systems using neural networks // Inform. Sciences. 2010. N 180. P. 3335–3347.
5. **Wei C., Luo J., Yin Z., Wei X.** Robust estimation-free decentralized prescribed performance control of nonaffine nonlinear large-scale systems // Int. Journ. Robust Nonlinear Control. 2017. P. 1–23.

6. **Tang Y., Tomizuka M., Guerrero G., Montemayor G.** Decentralized robust control of mechanical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. **45**, N 4. P. 771–776.
7. **He W., Xiao S., Yu S.** Learning control for a robotic manipulator with input saturation // IFAC Proceedings Volumes. 2013. **46**, Iss. 20. P. 74–79.
8. **He W., Dong Y., Sun C.** Adaptive neural impedance control of a robotic manipulator with input saturation // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2016. **46**, Iss. 3. P. 334–344.
9. **Еремин Е. Л.** Комбинированная система с неявным эталоном для класса априорно неопределённых одноканальных объектов неаффинных по управлению на множестве состояний функционирования // Информатика и системы управления. 2018. № 3. С. 93–103.
10. **Еремин Е. Л., Никифорова Л. В., Шеленок Е. А.** Комбинированная нелинейная система управления с неявным эталоном для априорно неопределённого неаффинного двухканального объекта с запаздываниями по выходу // Информатика и системы управления. 2020. № 1. С. 95–108.
11. **Еремин Е. Л., Шеленок Е. А.** Система нелинейного робастного управления для неаффинного нестационарного динамического объекта с запаздыванием // Автометрия. 2017. **53**, № 2. С. 63–71. DOI: 10.15372/AUT20170207.
12. **Ерёмин Е. Л., Чепак Л. В.** Комбинированный регулятор для неаффинного объекта с запаздыванием по управлению // Автометрия. 2019. **55**, № 6. С. 11–20. DOI: 10.15372/AUT20190602.
13. **Khalil H. K.** Nonlinear Systems. Third Edition. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 750 p.

Поступила в редакцию 25.05.2021
После доработки 21.06.2021
Принята к публикации 21.06.2021