УДК 62-40

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО РАСХОДУ ЭНЕРГИИ УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© Э. Я. Рапопорт, Ю. Э. Плешивцева

Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: edgar.rapoport@mail.ru
yulia_pl@mail.ru

Предложен метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов в задачах управления с минимальным энергопотреблением линейными системами с распределёнными параметрами в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернансном методе построения параметризуемых алгоритмов оптимального программного управления. Показано, что искомая процедура синтеза оптимального регулятора сводится к построению системы управления с линейными обратными связями по неполному измерению состояния, коэффициенты передачи которых являются известными функциями времени и конечных значений управляемой величины, определяемых предварительным расчётом программного управляющего воздействия.

Ключевые слова: системы с распределёнными параметрами, минимальное энергопотребление, программное управление, альтернансный метод, синтез оптимального управления, оптимальный регулятор.

DOI: 10.15372/AUT20210403

Введение. В работе [1] предложена конструктивная технология решения типичной линейно-квадратичной задачи оптимального по расходу энергии программного управления (ЗОУ) объектом с распределёнными параметрами (ОРП) параболического типа [1–3] в характерных для приложений условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния ОРП к заданному пространственному распределению управляемой величины [1, 4]. Предлагаемый алгоритмически точный способ определения оптимального программного управления сводится к параметризации искомых управляющих воздействий [4, 5] на подмножестве конечного числа финишных значений сопряжённых переменных [1, 6] в бесконечномерной краевой задаче принципа максимума Понтрягина [4, 7]; последующей редукции исходной ЗОУ ОРП к специальной задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [1, 4–6, 8] и её решению разработанным альтернансным методом [4–6], распространяющим на рассматриваемые ЗОУ ОРП результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использующим базовые закономерности предметной области.

В данной работе на этой основе решается актуальная задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) в рассматриваемой ЗОУ ОРП, которая значительно усложняется по сравнению с известными постановками, требованиями к конечному состоянию объекта, формулируемыми в равномерной метрике.

Основные результаты решения проблемы АКОР в системах с сосредоточенными и распределёнными параметрами получены на базе метода динамического программирования или принципа максимума Понтрягина в задачах со свободным или подвижным правым концом траектории с использованием классических условий трансверсальности на гладкой границе области допустимых конечных состояний объекта управления [9–11].

Однако при заданной точности равномерного приближения к требуемому конечному состоянию ОРП известные условия трансверсальности не применимы на границе целевого множества, которая не является гладкой в конечной точке оптимального процесса, что приводит к необходимости разработки специальных методов аналитического конструирования оптимальных регуляторов в данном случае.

В этих целях в работе применяется специальная модификация метода прогонки решения задачи синтеза [9, 10], базирующаяся на предлагаемом способе решения задачи программного управления [1].

Постановка задачи. Пусть управляемая величина $Q(x,t)$ объекта с распределёнными параметрами описывается в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0, x_1]$ и времени $t \in [0, t^*]$ одномерным линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа с самосопряжённым дифференциальным оператором в его правой части:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = b(x)\,\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + c(x)\,\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + c_1(x)Q(x,t) + f_v(x)\,u_v(t) \tag{1}$$

с начальными

$$Q(x,0) = Q_0(x) = Q_0 = \mathrm{const} \geqslant 0 \tag{2}$$

и граничными

$$\alpha_0 Q(x_0,t) + \beta_0\,\frac{\partial Q(x_0,t)}{\partial x} = 0; \qquad \alpha_1 Q(x_1,t) + \beta_1\,\frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} = u_s(t) \tag{3}$$

условиями при заданных достаточно гладких функциях $f_v(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $c_1(x)$; при постоянных коэффициентах $\alpha_0, \alpha_1 \geqslant 0$; $\beta_0, \beta_1 > 0$ и нестесняемых дополнительными ограничениями сосредоточенных внутреннего $u_v(t)$ или граничного $u_s(t)$ кусочно-непрерывных управляющих воздействий, исключая для простоты случай их одновременного использования и полагая далее

$$u(t) = u_v(t) \quad \text{или} \quad u(t) = u_s(t). \tag{4}$$

Пусть необходимо обеспечить за фиксируемое априори конечное время t^* заданную точность ε равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины $Q(x,t^*)$ к требуемому $Q^{**}(x) = Q^{**} > Q_0$ согласно соотношению

$$\max_{x\in[x_0,x_1]} |Q(x,t^*) - Q^{**}| \leqslant \varepsilon, \tag{5}$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний объекта [4–6].

Пусть далее качество процесса управления оценивается интегральным функционалом

$$I = \int\limits_0^{t^*} u^2(t)\,dt \to \min_{u(t)}, \tag{6}$$

в типичных ситуациях характеризующим расход энергии на процесс управления [1–3].

Применение к уравнениям объекта (1)–(3) конечного интегрального преобразования по пространственному аргументу с ядром, равным его собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$,

$n = 1, 2, \ldots$, где μ_n^2 — собственные числа, приводит к описанию ОРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для временны́х мод $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x,t)$ в сходящийся в среднем ряд по $\varphi_n(\mu_n, x)$ [12–14]:

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n,t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n,t) + k_n u(t), \qquad \bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t)\varphi_n(\mu_n, x). \tag{8}$$

Здесь

$$k_n = k_{vn}, \text{ если } u(t) = u_v(t); \qquad k_n = k_{sn}, \text{ если } u(t) = u_s(t) \tag{9}$$

(k_{vn} — моды конечных интегральных преобразований функции $f_v(x)$ и k_{sn} — известные коэффициенты [14]).

При переходе к описанию объекта в терминах модальных переменных требование (5) в соответствии с (8) предъявляется в следующем виде:

$$\max_{x\in[x_0,x_1]} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t^*)\varphi_n(\mu_n, x) - Q^{**} \Big| \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Задача АКОР сводится теперь к определению алгоритма обратной связи $u^*(Q,t)$, обеспечивающего перевод бесконечномерного объекта (7)–(9) в требуемое конечное состояние (10) при минимально возможном значении критерия оптимальности (6).

Оптимальное программное управление и способ его параметризации. Стандартная процедура принципа максимума Понтрягина в рассматриваемой задаче оптимального управления (6)–(10) определяет программное оптимальное управление $u^*(t)$ в форме равномерно сходящегося ряда экспонент [1]

$$u^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} k_n \psi_n^*(t^*)\, \mathrm{e}^{-\mu_n^2(t^*-t)} \tag{11}$$

с точностью до выбора оптимальных величин $\psi_n^*(t^*)$ конечных значений $\psi_n(t^*)$ сопряжённых переменных

$$\psi_n(t) = \psi_n(t^*)\, \mathrm{e}^{-\mu_n^2(t^*-t)}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

которые должны быть найдены из условий достижения целевого множества (10).

Именно бесконечная размерность вектора $\psi^*(t) = (\psi_n^*(t))$ приводит к трудно разрешимой проблеме фактического определения и последующей реализации алгоритма (11), дополнительно усложняемой невозможностью его использования в целях отыскания $\psi^*(t)$ классических условий трансверсальности в конечной точке оптимального процесса на негладкой границе целевого множества.

В [6] предложена конструктивная процедура последовательной параметризации управляющих воздействий в ЗОУ ОРП на конечномерных подмножествах величин $\psi(t) = (\psi_n(t))$, формируемых в виде M-мерных векторов $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_n)$, $n = \overline{1, M}$, финишных значений $\tilde{\psi}_n = \psi_n(t^*)$ M первых сопряжённых переменных при равных нулю остальных компонентов $\psi_n(t^*)$ для всех $n > M$:

$$\psi^{(M)} = (\psi_n(t^*)) = (\tilde{\psi}_n), \quad n = \overline{1, M}, \quad M \geqslant 1, \qquad \psi_n(t^*) = 0, \quad n > M. \tag{13}$$

Параметризуемое подобным образом оптимальное управление (11) описывается теперь уже конечной суммой M экспонент:

$$u^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M} \tilde{\psi}_n^* k_n \,\mathrm{e}^{-\mu_n^2(t^*-t)}\,. \tag{14}$$

Как показано в [1, 6], размерность $M = M_0$ вектора $\psi_*^{(M_0)} = (\tilde{\psi}_n^*)$, $n = \overline{1, M_0}$, вида (13), характеризующего оптимальное управление $u^*(t)$, определяется местом заданного значения ε в (5) в убывающей цепочке неравенств

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \ldots > \varepsilon_{\min}^{(j)} > \ldots > \varepsilon_{\min}^{(\rho)} = \varepsilon_{\inf} \tag{15}$$

для минимально возможных в классе управлений (14) значений ошибок равномерного приближения $Q(x, t^*)$ к $Q^{**}(x)$:

$$\varepsilon_{\min}^{(j)} = \min_{\psi^{(j)}} \Big[\max_{x\in[x_0,x_1]} |Q(x,t^*) - Q^{**}| \Big], \tag{16}$$

согласно простому правилу

$$M_0 = \upsilon \forall\varepsilon\colon\quad \varepsilon_{\min}^{(\upsilon)} \leqslant \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\upsilon-1)}, \quad \upsilon \in \{\overline{1,\rho}\}, \quad \varepsilon \geqslant \varepsilon_{\inf}. \tag{17}$$

Здесь точная нижняя граница $\varepsilon_{\inf}$ достижимых по условиям (5), (10) значений ε в (15) оказывается равной минимаксу $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$, где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ для управляемых и неуправляемых относительно $Q^{**}(x)$ объектов соответственно [5].

Правило (17) в условиях (15), характеризующих сужающееся к $Q^{**}(x)$ семейство целевых множеств для $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)}$, $j = \overline{1, \rho}$, создаёт возможность обеспечения требуемой точности приближения к $Q^{**}(x)$ в случае $\varepsilon \geqslant \varepsilon_{\inf}$ при конечном значении M_0, принципиально упрощая тем самым рассматриваемую ЗОУ ОРП.

Дальнейшая проблема сводится к фактическому определению вектора параметров $\psi_*^{(M_0)}$ из условий достижения заданной величины ε в (5).

Редукция к задаче полубесконечной оптимизации и её решение альтернансным методом. Интегрирование уравнений модели объекта (7) при заданных величинах $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ с $\psi^{(M)}$-параметризованным согласно (13) управлением вида (14) и его подстановка в (6) приводят к представлению конечного состояния $Q(x, t^*)$, описываемого разложением в ряд (8), и критерия оптимальности (6) в форме явных зависимостей $Q(x, \psi^{(M)})$ и $I(\psi^{(M)})$ от своих аргументов соответственно.

В результате осуществляется процедура точной редукции исходной задачи оптимального управления к специальной задаче математического программирования — задаче полубесконечной оптимизации [4–6]

$$I(\psi^{(M)}) \to \min_{\psi^{(M)}}, \tag{18}$$

$$S(\psi^{(M)}) = \max_{x\in[x_0,x_1]} |Q(x,\psi^{(M)}) - Q^{**}| \leqslant \varepsilon \tag{19}$$

на экстремум функции (18) конечного числа переменных $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i)$, $i = \overline{1, M}$, в (13) с бесконечным числом диктуемых требованием (10) ограничений для всех $x \in [x_0, x_1]$, эквивалентных в совокупности одному ограничению на функцию максимума $S(\psi^{(M)})$ в (19).

Решение $\psi_*^{(M_0)} = (\psi_i^*)$, $i = \overline{1, M_0}$, ЗПО (18), (19), где M_0 выбирается по правилу (17), может быть получено по схеме альтернансного метода [4–6], базирующегося на специальных альтернансных свойствах $\psi_*^{(M_0)}$, согласно которым в условиях несущественных для прикладных задач допущений в некоторых точках $x_j^0 \in [x_0, x_1]$, $j = \overline{1, R}$, достигаются предельно допустимые значения $S(\psi_*^{(M)})$ в (19), равные ε:

$$|Q(x_j^0, \psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}| = \varepsilon, \qquad j = \overline{1, R}. \tag{20}$$

Число R этих точек оказывается равным числу всех искомых параметров оптимального процесса, включая все компоненты $\hat{\psi}_i^*$, $i = \overline{1, M_0}$, вектора $\psi_*^{(M_0)}$ при заданной величине ε в случае $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(M_0)}$ в (17) и наряду с ними априори неизвестную величину минимакса $\varepsilon_{\min}^{(M_0)}$, определяемую согласно (16), если $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M_0)}$:

$$R = \begin{cases} M_0, & \varepsilon_{\min}^{(M_0)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M_0 - 1)}; \\ M_0 + 1, & \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M_0)}. \end{cases} \tag{21}$$

При наличии диктуемой закономерностями предметной области необходимой дополнительной информации о характере зависимости $Q(x, \psi_*^{(M_0)})$ от пространственной переменной x на интервале $[x_0, x_1]$, позволяющей идентифицировать значения $x_j^0 \in [x_0, x_1]$ для всех $j = \overline{1, R}$ и знаки $Q(x_j^0, \psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}$ в этих точках, обеспечивается редукция равенств (20), составляемых для $|Q(x_j^0, \psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}|$, к замкнутой системе $R + R_1$ уравнений относительно самих величин $Q(x_j^0, \psi_*^{(M_0)}) - Q^{**}$:

$$Q(x_j^0, \psi_*^{(M_0)}) - Q^{**} = \pm\varepsilon, \qquad j = \overline{1, R}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial Q(x_{jg}^0, \psi_*^{(M_0)})}{\partial x} = 0, \quad x_{jg}^0 \in \operatorname{int}[x_0, x_1], \quad g = \overline{1, R_1}, \quad R_1 \leqslant R, \quad x_{jg}^0 \in \{x_j^0\}, \tag{23}$$

с $R + R_1$ неизвестными $\tilde{\psi}_i^*$, $i = \overline{1, M_0}$, x_{jg}^0, $g = \overline{1, R_1}$, и $\varepsilon_{\min}^{(M_0)}$, если $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M_0)}$ в (22).

Здесь каждой точке x_j^0 однозначным образом соответствует свой знак ε в (22), а равенства (23) представляют собой условия существования экстремума зависимости $Q(x, \psi_*^{(M_0)})$ от x во внутренних точках отрезка $[x_0, x_1]$ с заранее неизвестными координатами $x_{jg}^0 \in \{x_j^0\}$, в которых достигаются максимально допустимые отклонения конечного состояния объекта от требуемого.

Находимые стандартными численными методами решения системы уравнений (22), (23) относительно всех искомых параметров полностью определяют программное оптимальное управление (14) в рассматриваемой ЗОУ ОРП.

Общая методика решения ЗПО (18), (19) в условиях заранее неизвестных значений $\varepsilon_{\min}^{(j)}$ в (15), (16), базирующаяся на редукции к системам уравнений вида (22), (23) на каждом этапе её реализации, представлена в [1].

Синтез оптимальной системы управления. При параметризованном управляющем воздействии (14) модель объекта управления (7) описывается следующей бесконечной системой дифференциальных уравнений относительно временны́х мод $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t)$ в процессе оптимального управления:

$$\frac{d\bar{Q}_n^*}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n^* + \frac{1}{2}\, k_n \sum_{i=1}^{M_0} k_i \tilde{\psi}_i^* \, \mathrm{e}^{-\mu_i^2 (t^* - t)}, \quad n = 1, 2, \ldots; \qquad \bar{Q}_n^*(\mu_n, 0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n). \tag{24}$$

Согласно полученным в [13] результатам решение бесконечной системы уравнений (24) может быть с любой требуемой точностью аппроксимировано решением укороченной системы, образуемой достаточно большим конечным числом $N < \infty$ первых уравнений в (24) при $\bar{Q}_n^*(\mu_n, t) = 0 \ \forall n > N$, т. е. можно ограничиться учётом только N уравнений в (24), полагая там $n = \overline{1, N}$.

При рассмотрении процесса управления в «обратном» времени $\tau = t^* - t$ укороченная система уравнений (24) с «начальными» величинами $\bar{Q}_n^*(\tau)|_{\tau=0}$, совпадающими с их конечными значениями $\bar{Q}_n^*(t^*)$, принимает следующий вид:

$$\frac{d\bar{Q}_n^*}{d\tau} = \mu_n^2 \bar{Q}_n^* - \frac{1}{2}\, k_n \sum_{i=1}^{M_0} k_i \tilde{\psi}_i^* \, \mathrm{e}^{-\mu_i^2 \tau}, \quad n = \overline{1, N}; \qquad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}_n^*(t^*). \tag{25}$$

Интегрирование уравнений (25) приводит к явной форме представления их решений в зависимости от параметров оптимального управления и конечного состояния объекта $\bar{Q}_n^*(t^*)$, $n = \overline{1, N}$:

$$\bar{Q}_n^*(\mu_n, t) = \bar{Q}_n^*(t^*)\, \mathrm{e}^{\mu_n^2 (t^* - t)} - \frac{1}{2}\, k_n \sum_{i=1}^{M_0} \frac{k_i \tilde{\psi}_i^*}{\mu_n^2 + \mu_i^2} \left(\mathrm{e}^{\mu_n^2 (t^* - t)} - \mathrm{e}^{-\mu_i^2 (t^* - t)} \right), \quad n = \overline{1, N}. \tag{26}$$

Полагая здесь согласно (13)

$$\psi^*(t^*) = (\psi_n^*(t^*)),\ n = \overline{1, N}; \quad \psi_i^*(t^*) = \tilde{\psi}_i^*,\ i = \overline{1, M_0}; \quad \psi_n^*(t^*) = 0,\ n = \overline{M_0 + 1, N}, \tag{27}$$

и

$$\bar{Q}^*(t) = (\bar{Q}_n^*(\mu_n, t)), \quad n = \overline{1, N}, \tag{28}$$

представим равенства (26) в векторно-матричной форме

$$\bar{Q}^*(t) = B(t^* - t)\bar{Q}^*(t^*) + B_1(t^* - t)\psi^*(t^*), \tag{29}$$

где $N \times N$ матрицы $B(t^* - t)$ и $B_1(t^* - t)$ определяются следующим образом:

$$B(t^* - t) = \operatorname{diag}\left[\mathrm{e}^{\mu_n^2 (t^* - t)}\right], \quad n = \overline{1, N}, \tag{30}$$

$$B_1(t^* - t) = \left[\frac{k_n k_i}{2(\mu_n^2 + \mu_i^2)} \left(\mathrm{e}^{-\mu_i^2 (t^* - t)} - \mathrm{e}^{\mu_n^2 (t^* - t)} \right) \right], \quad n, i = \overline{1, N}. \tag{31}$$

Согласно (12)

$$\psi^*(t^*) = B(t^* - t)\psi^*(t), \tag{32}$$

где в силу (12) и (27)

$$\psi^*(t) = (\psi_n^*(t)), \quad \psi_n^*(t) = 0, \quad n = \overline{M_0 + 1, N}. \tag{33}$$

Подставляя (32) в (29) и решая полученное уравнение относительно $\psi^*(t)$, найдём искомую зависимость $\psi^*(t)$ от $\bar{Q}^*(t)$ для $0 \leqslant t < t^*$:

$$\psi^*(t) = A_1(t^* - t)\bar{Q}^*(t) - A_2(t^* - t)\bar{Q}^*(t^*), \tag{34}$$

где

$$A_1(t^* - t) = [B_1 B]^{-1}; \qquad A_2(t^* - t) = A_1 B \tag{35}$$

и значение $\bar{Q}^*(t^*) = (\bar{Q}^*_n(t^*))$, $n = \overline{1, N}$, определяется по результатам предварительного решения задачи программного управления после интегрирования уравнений (24) при найденных величинах $\tilde{\psi}^*_i$, $i = \overline{1, M_0}$, для каждого из реализуемых значений $\bar{Q}(0)$ в виде

$$\bar{Q}^*_n(\psi^{(M_0)}_*, t^*) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n)\,\mathrm{e}^{-\mu_n^2 t^*} + \frac{1}{2}\,k_n \sum_{i=1}^{M_0} \frac{k_i \tilde{\psi}^*_i}{\mu_n^2 + \mu_i^2}\,(1 - \mathrm{e}^{-(\mu_n^2 + \mu_i^2)t^*}\,), \quad n = \overline{1, N}. \tag{36}$$

Подстановка (34) в (14) для программного управления с учётом равенств (12) приводит к линейному закону синтеза оптимального регулятора с нестационарными коэффициентами обратных связей:

$$u^*(\bar{Q}, t) = \frac{1}{2}\,K\psi^*(t) = \frac{1}{2}\,KA_1\bar{Q}(t) - \frac{1}{2}\,KA_2\bar{Q}^*(t^*); \qquad K = (k_n), \quad n = \overline{1, N}. \tag{37}$$

Здесь матрицы A_1, A_2 представляются согласно (30), (31), (35) известными функциями времени и $u^*(\bar{Q}, t)$ находится в форме (37) при фиксируемых на протяжении процесса управления значениях $\bar{Q}(0)$, которые определяются по результатам наблюдения значений $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ в (36) в начальный момент времени $t = 0$.

Переход в (37) к измеряемому выходу объекта $Q_u(x_u, t) = (Q_u(x_{uj}, t))$ в r точках $x_{uj} \in [x_0, x_1]$, $j = \overline{1, r}$, задаётся согласно (8) векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q(x_u, t) = \Phi_u \bar{Q}(t), \qquad \Phi_u = [\varphi_n(\mu_n, x_{uj})], \quad n = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, r}. \tag{38}$$

В условиях $r < N$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}(t)$ по значениям $Q(x_u, t)$ требуется построение наблюдателя состояния полного или пониженного порядка [9].

Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (7) можно ограничиться учётом только M_0 первых составляющих $\bar{Q}(t)$, то $\bar{Q}(t)$ непосредственно определяется решением системы уравнений (38) при $r = M_0 = N$:

$$\bar{Q}(t) = \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t). \tag{39}$$

Подстановка (39) в (37) приводит к линейному алгоритму оптимального управления по наблюдаемому выходу объекта

$$u^*(Q_u, t) = \frac{1}{2}\,KA_1\Phi_u^{-1}Q(x_u, t) - \frac{1}{2}\,KA_2\bar{Q}^*(t^*). \tag{40}$$

Оптимальное управление процессом нестационарной теплопроводности. В качестве примера рассмотрим задачу аналитического конструирования оптимального регулятора для управления процессом индукционного нагрева перед последующей обработкой давлением [15]. Пусть температурное поле $Q(x,t)$ неограниченной пластины в процессе индукционного нагрева описывается линейным неоднородным уравнением теплопроводности вида (1)–(3) в относительных единицах [15]:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + W_1(x) u_v(t), \qquad x \in [0,1], \quad t \in [0,t^*], \tag{41}$$

с начальными

$$Q(x,0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{42}$$

и граничными

$$\frac{\partial Q(0,t)}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial Q(1,t)}{\partial x} + \alpha Q(1,t) = 0 \tag{43}$$

условиями, учитывающими тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на границе пластины $x = 1$ по закону конвективной теплопередачи с заданным значением α критерия Био.

Здесь $u_v(t)$ в (41) — внутреннее сосредоточенное управляющее воздействие по мощности электромагнитных источников тепла и $W_1(x)$ — известная функция пространственного распределения мощности внутреннего тепловыделения [15].

Модальное описание объекта сводится к бесконечной системе дифференциальных уравнений вида (7), (8) [1, 14]:

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n,t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n,t) + \bar{W}_{1n} u_v(t), \qquad \bar{Q}_n(\mu_n,0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{44}$$

где $\bar{W}_{1n}$ — моды конечных интегральных преобразований $W_1(x)$.

Температурное поле $Q(x,t)$ представляется его разложением в ряд вида (8) по собственным функциям $\cos(\mu_n x)$ [15]:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2 \cos(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \alpha^2 + \alpha)\sin^2 \mu_n}\, \bar{Q}_n(\mu_n,t). \tag{45}$$

Здесь μ_n — бесконечно возрастающая последовательность корней трансцендентного уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu - \alpha = 0,$$

в (44)

$$\bar{W}_{1n} = \int_0^1 W_1(x) \cos(\mu_n x)\, dx. \tag{46}$$

Задача сводится к определению уравнения регулятора $u_v^*(Q,t)$, обеспечивающего перевод объекта (44), (45) в требуемое конечное состояние согласно (10)

$$\max_{x\in[0,1]} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n,t^*) \varphi_n(\mu_n,x) - Q^{**} \Big| \leqslant \varepsilon \tag{47}$$

при минимальном значении критерия оптимальности (6).

Решение задачи программного управления альтернансным методом. Рассмотрим типичный для прикладных задач [4, 15] и проще всего реализуемый на практике случай $\varepsilon = \varepsilon^{(2)}_{\min}$ в (47), где $\varepsilon^{(2)}_{\min}$ определяется в соответствии с (16). Тогда размерность M_0 вектора $\psi^{(M_0)}_*$ вида (13), характеризующего оптимальное программное управление $u^*(t)$ в (14), задаётся правилом (17):

$$M_0 = 2; \qquad \psi^{(2)}_* = (\tilde{\psi}^*_1, \tilde{\psi}^*_2), \tag{48}$$

следовательно, в такой ситуации $u^*_v(t)$ находится в соответствии с (14) при $k_n = k_{vn} = \bar{W}_{1n}$ согласно (9), (14), (44) с точностью до выбора двух параметров $\tilde{\psi}^*_1$ и $\tilde{\psi}^*_2$:

$$u^*_v(t) = \frac{1}{2}\,(\tilde{\psi}^*_1 \bar{W}_{11}\,\mathrm{e}^{-\mu_1^2(t^*-t)} + \tilde{\psi}^*_2 \bar{W}_{12}\,\mathrm{e}^{-\mu_2^2(t^*-t)}\,). \tag{49}$$

Исходя из альтернансных свойств (21) оптимального управления (49) число R точек x^0_j, $j = \overline{1, R}$, в системе уравнений (22), (23) альтернансного метода равно $M_0 + 1 = 3$ в условиях (48) при $\varepsilon = \varepsilon^{(2)}_{\min}$.

Известные закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе нагрева при $\varepsilon = \varepsilon^{(2)}_{\min}$, $M_0 = 2$, $R = 3$ находят заранее, подобно [1, 4, 5, 15], форму кривой пространственного распределения конечного температурного состояния $Q(x, \tilde{\psi}^{(2)}_*)$ на отрезке $[0, 1] \ni x$ (рис. 1).

По виду этой кривой применительно к рассматриваемому примеру при $x^0_1 = 0$, $0 < x^0_2 < 1$, $x^0_3 = 1$ непосредственно конструируется однозначным образом конкретный вариант системы четырёх уравнений (22), (23):

$$\begin{gathered} Q(0, \tilde{\psi}^*_1 \tilde{\psi}^*_2) - Q^{**} = -\varepsilon^{(2)}_{\min}; \quad Q(x^0_2, \tilde{\psi}^*_1, \tilde{\psi}^*_2) - Q^{**} = \varepsilon^{(2)}_{\min}; \\ Q(1, \tilde{\psi}^*_1, \tilde{\psi}^*_2) - Q^{**} = -\varepsilon^{(2)}_{\min}; \quad \frac{\partial Q(x^0_2, \tilde{\psi}^*_1, \tilde{\psi}^*_2)}{\partial x} = 0, \end{gathered} \tag{50}$$

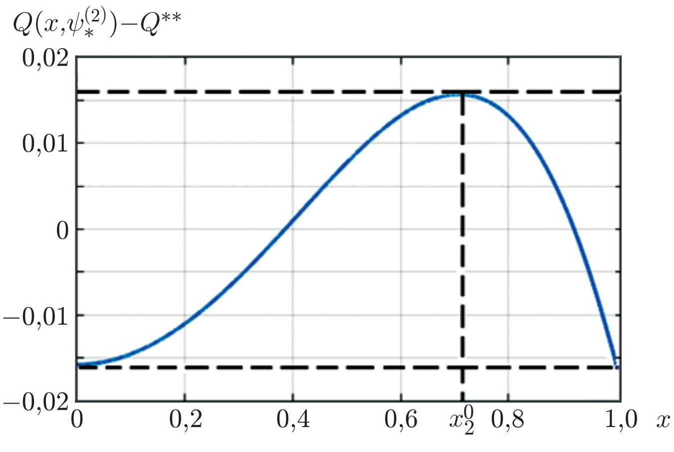

Рис. 1. Температурное распределение в конце оптимального процесса ($\tilde{\psi}^*_1 = 1{,}93$; $\tilde{\psi}^*_2 = 2{,}02$; $t^* = 1{,}2$; $\varepsilon^{(2)}_{\min} = 0{,}0155$; $x^0_2 = 0{,}71$)

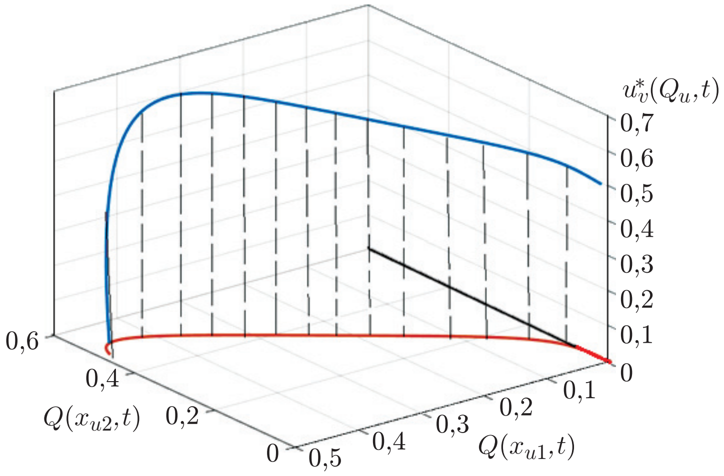

Рис. 2. Оптимальное управление с обратными связями по неполному измерению выхода объекта

которая может быть решена стандартными численными методами относительно четырёх неизвестных $\tilde{\psi}_1^*$, $\tilde{\psi}_2^*$, $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ и x_2^0 для каждого заданного начального состояния объекта в (42). Здесь $Q(x,\psi_*^{(2)})$ находится в форме (8) при $t = t^*$, где $\bar{Q}_n^*(\psi_*^{(2)}, \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), t^*)$ определяется в виде (36), таким образом система уравнений (50) оказывается линейной относительно искомых параметров $\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*$.

Найденные в результате её решения величины $\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*$ полностью определяют программное управление в форме (49) (рис. 2).

Синтез оптимального регулятора. Имея в виду возможность ограничиться учётом лишь конечного числа N модальных переменных $\bar{Q}_n^*$, примем далее для простоты и большей наглядности получаемых результатов $N = M_0 = 2$, полагая $n = \overline{1, M_0}$ во всех выражениях (25)–(40).

В таком случае уравнение оптимального регулятора (37) конкретизируется применительно к рассматриваемому примеру следующим образом:

$$u_v^*(\bar{Q},t) = \frac{1}{2}\Big(\bar{W}_{11}a_{11}(t) + \bar{W}_{12}a_{21}(t)\Big)\bar{Q}_1(t) + \frac{1}{2}\Big(\bar{W}_{11}a_{12}(t) + \bar{W}_{12}a_{22}(t)\Big)\bar{Q}_2(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\bar{W}_{11}b_{11}(t) + \bar{W}_{12}b_{21}(t)\Big)\bar{Q}_1^*(t^*) + \frac{1}{2}\Big(\bar{W}_{11}b_{12}(t) + \bar{W}_{12}b_{22}(t)\Big)\bar{Q}_2^*(t^*). \qquad (51)$$

Здесь a_{ij} и b_{ij} $(i,j = 1,2)$ — элементы 2×2 матриц $A_1 = [a_{ij}]$ и $A_2 = [b_{ij}]$ соответственно, вычисляемые при $0 \leqslant t < t^*$ по формулам (30), (31), (35) после элементарных преобразований:

$$a_{11}(t) = \frac{\bar{W}_{12}^2}{4\Delta\mu_2^2}\,(1 - \mathrm{e}^{2\mu_2^2(t^*-t)});$$

$$a_{12}(t) = a_{21}(t) = -\frac{\bar{W}_{11}\bar{W}_{12}}{2\Delta(\mu_1^2+\mu_2^2)}\,(1 - \mathrm{e}^{(\mu_1^2+\mu_2^2)(t^*-t)}); \qquad (52)$$

$$a_{22}(t) = \frac{\bar{W}_{11}^2}{4\Delta\mu_1^2}\,(1 - \mathrm{e}^{2\mu_1^2(t^*-t)});$$

$$b_{11}(t) = \frac{\bar{W}_{12}^2}{4\Delta\mu_2^2}\,(1 - \mathrm{e}^{2\mu_2^2(t^*-t)})\,\mathrm{e}^{\mu_1^2(t^*-t)};$$

$$b_{12}(t) = -\frac{\bar{W}_{11}\bar{W}_{12}}{2\Delta(\mu_1^2+\mu_2^2)}\,(1 - \mathrm{e}^{(\mu_1^2+\mu_2^2)(t^*-t)})\,\mathrm{e}^{\mu_2^2(t^*-t)};$$

$$b_{21}(t) = -\frac{\bar{W}_{11}\bar{W}_{12}}{2\Delta(\mu_1^2+\mu_2^2)}\,(1 - \mathrm{e}^{(\mu_1^2+\mu_2^2)(t^*-t)})\,\mathrm{e}^{\mu_1^2(t^*-t)}; \tag{53}$$

$$b_{22}(t) = \frac{\bar{W}_{11}^2}{4\Delta\mu_1^2}\,(1 - \mathrm{e}^{2\mu_1^2(t^*-t)})\,\mathrm{e}^{\mu_2^2(t^*-t)},$$

$$\Delta = \frac{\bar{W}_{11}^2\bar{W}_{12}^2}{16\mu_1^2\mu_2^2}\,(1 - \mathrm{e}^{2\mu_1^2(t^*-t)})(1 - \mathrm{e}^{2\mu_2^2(t^*-t)}) - \frac{\bar{W}_{11}^2\bar{W}_{12}^2}{4(\mu_1^2+\mu_2^2)^2}\,(1 - \mathrm{e}^{(\mu_1^2+\mu_2^2)(t^*-t)})^2. \tag{54}$$

В случае $t = t^*$, для которого в (31) $B_1 = [0]$ и обратная матрица A_1 в (35) не существует, оптимальное управление $u_v^*(t^*)$ определяется непосредственно по алгоритму (49) программного управления.

При наличии двух измерителей выхода объекта в точках $x_{u1}, x_{u2} \in [0,1]$ получаем систему двух линейных уравнений (38):

$$\begin{aligned} Q_u(x_{u1},t) &= \bar{Q}_1(t)\varphi_1(\mu_1,x_{u1}) + \bar{Q}_2(t)\varphi_2(\mu_2,x_{u1}); \\ Q_u(x_{u2},t) &= \bar{Q}_1(t)\varphi_1(\mu_1,x_{u2}) + \bar{Q}_2(t)\varphi_2(\mu_2,x_{u2}), \end{aligned} \tag{55}$$

разрешаемую относительно модальных переменных $\bar{Q}_1(t)$, $\bar{Q}_2(t)$.

Подстановка этого решения в (51) определяет алгоритм синтеза оптимального управления (40) в подобной (51) форме:

$$u_v^*(Q_u,t) = C_1(t)Q(x_{u1},t) + C_2(t)Q(x_{u2},t) + C_3(t)Q^*(x_{u1},t^*) + C_4(t)\,Q^*(x_{u2},t^*), \tag{56}$$

где нестационарные коэффициенты C_j, $j = \overline{1,4}$, находятся после простых вычислений по известным значениям a_{ij}, b_{ij} в (52)–(54) и решениям системы уравнений (55).

Некоторые расчётные результаты, полученные при синтезе оптимального управления индукционным нагревом пластины из титановых сплавов для значений $\alpha = 0{,}5$, $Q_0 = 0$, $Q^{**} = 0{,}5$, $t^* = 1{,}2$, $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$, представлены на рис. 1, 2 при выборе двух измерителей управляемой величины в точках $x_{u1} = 0$; $x_{u2} = 1$. На рис. 1 показано распределение температуры по толщине пластины в конце оптимального процесса нагрева.

Рис. 2 иллюстрирует алгоритм управления с обратными связями по наблюдаемым переменным, синтезируемый согласно (51)–(56). Кривая на плоскости $Q(x_{u1})$, $Q(x_{u2})$ задаётся в параметрической форме зависимостями $Q(x_{u1},t)$, $Q(x_{u2},t)$.

Заключение. Предлагаемый метод аналитического конструирования оптимальных по расходу энергии регуляторов в задачах управления линейными системами с распределёнными параметрами параболического типа разработан применительно к наиболее употребительным в приложениях оценкам целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике.

Полученные уравнения регуляторов сводятся к линейным алгоритмам обратной связи с фиксируемыми предварительным расчётом нестационарными коэффициентами.

Погрешности реализации предлагаемых процедур синтеза непосредственно по неполному измерению состояния системы определяются требованиями к точности описания модели объекта укороченной системой уравнений для модальных составляющих управляемой величины.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00232).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я.** Программное управление с минимальным энергопотреблением в системах с распределёнными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 4. С. 42–57.
2. **Егоров А. И., Знаменская Л. Н.** Введение в теорию управления системами с распределёнными параметрами. СПб.: “Лань”, 2017. 292 с.
3. **Муромцев Ю. Л., Муромцев Д. Ю., Погонин В. А.** Теоретические основы энергосберегающего управления. М.: ЯНУС-К, 2010. 286 с.
4. **Рапопорт Э. Я.** Оптимальное управление системами с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2009. 677 с.
5. **Рапопорт Э. Я.** Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.
6. **Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я.** Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределёнными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 22–33.
7. **Панасюк В. И., Ковалевский В. Б., Политыко Э. Д.** Оптимальное управление в технических системах. Минск: Наука и техника, 1990. 271 с.
8. **Аллахвердиева Н. К., Ахмедов Ф. Г., Мустафаев М. И.** Об одном подходе к решению задач полубесконечной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1994. № 1. С. 32–38.
9. **Ким Д. П.** Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007. 440 с.
10. **Теория** автоматического управления /Под. ред. В. Б. Яковлева. М.: Высш. шк., 2003. 567 с.
11. **Сиразетдинов Т. К.** Оптимизация систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
12. **Дидук Г. А., Золотов О. И., Пустыльников Л. М.** Специальные разделы теории автоматического регулирования и управления (теория СРП). СПб.: СЗТУ, 2000. 172 с.
13. **Коваль В. А.** Спектральный метод анализа и синтеза распределённых систем. Саратов: СГТУ, 2010. 148 с.
14. **Рапопорт Э. Я.** Структурное моделирование объектов и систем управления с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2003. 299 с.
15. **Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.** Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012. 309 с.

Поступила в редакцию 01.04.2021
После доработки 11.05.2021
Принята к публикации 12.05.2021