УДК 621.396.8

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ МОДУЛИРУЮЩЕЙ ПОМЕХИ

© В. М. Артюшенко[1], В. И. Воловач[2]

[1] *Технологический университет,*
141070, г. Королёв Московской обл., ул. Гагарина, 42
[2] *Поволжский государственный университет сервиса,*
445017, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4
E-mail: artuschenko@mail.ru
volovach.vi@mail.ru

Рассмотрены статистические характеристики узкополосного сигнала при наличии модулирующих помех, включая случай определения одномерной плотности распределения сигнала. Установлена взаимосвязь между характеристической функцией мгновенных значений сигнала и плотностью распределения вероятностей (ПРВ) огибающей при равномерном законе распределения фазы. Получены выражения, описывающие ПРВ мгновенных значений сигнала и аддитивного шума при воздействии модулирующих помех. Проанализированы случаи, когда между флуктуациями амплитуды и фазы отсутствует и существует функциональная связь. Показано, что при законе распределения фазы, отличном от равномерного на интервале $[0, 2\pi]$, сигнал является нестационарной случайной функцией, стремящейся к стационарной при увеличении глубины фазовых искажений. При равномерном распределении фазы сигнал является стационарной случайной функцией. Показано, что при функционально связанных амплитудно-фазовых искажениях ПРВ сигнала описывается через статистические характеристики его огибающей.

Ключевые слова: мультипликативная (модулирующая) помеха, узкополосный полезный сигнал, амплитудные искажения, фазовые искажения, функциональная связь, характеристическая функция.

DOI: 10.15372/AUT20210206

Введение. Как правило, в радиотехнических системах и устройствах различного назначения используются узкополосные сигналы, ширина спектра которых много меньше несущей частоты [1–5]. Сигнал при наличии модулирующей помехи может быть записан в виде [6]

$$u_{\text{м}}(t) = \eta(t)U(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t) + \varphi(t)],$$

где $\eta(t)$, $\varphi(t)$ — случайные функции, определяющие соответственно искажения амплитуды и фазы, которые случайно и функционально связаны; $\Phi(t)$ и $U(t)$ — известные законы изменения фазы и амплитуды, определяющие передаваемую информацию; ω_0 — несущая частота сигнала.

Будем считать, что модулирующая помеха воздействует на сигнал в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Запишем нормированный сигнал, искажённый модулирующей помехой, в виде

$$s(t) = \frac{u_{\text{м}}(t)}{U(t)} = \eta(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t) + \varphi(t)] = \eta(t)\cos\psi(t), \tag{1}$$

где $\psi(t)$ — полная мгновенная фаза сигнала $s(t)$.

Математическое ожидание $\psi(t)$ имеет вид

$$\bar{\psi}(t) = \omega_0 t + \Phi(t) + \Phi_0,$$

где Φ_0 — среднее значение фазовых искажений $\varphi(t)$. Здесь и далее прямая линия сверху будет означать усреднение по времени.

Отметим, что целью данной работы является получение и анализ выражений плотностей распределения вероятностей (ПРВ) узкополосного сигнала и его смеси с аддитивной помехой при воздействии модулирующей (мультипликативной) помехи и функционально связанных и несвязанных амплитудно-фазовых искажений.

Одномерная плотность распределения вероятностей сигнала при наличии модулирующей помехи. Определим одномерную ПРВ $W(s,t)$. Воспользовавшись результатами [7–10], с учётом (1) и свойства δ-функции запишем совместную ПРВ мгновенных значений сигнала $s(t)$, огибающей $\eta(t)$ и фазы $\varphi(t)$ в виде

$$W(s,\eta,\varphi) = W(\eta,\varphi)\delta(s-\eta\cos\psi) = \frac{1}{2\pi} W(\eta,\varphi) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{jz(s-\eta\cos\psi)}\, dz.$$

Учитывая периодический характер функции $\cos\psi$ и используя разложение [11]

$$\mathrm{e}^{jz\eta\cos\psi} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(z\eta)\,\mathrm{e}^{jl\psi},$$

в котором $J_l(z\eta)$ — функция Бесселя действительного аргумента целого порядка, получим

$$W(s,\eta,\varphi) = \frac{W(\eta,\varphi)}{\pi\sqrt{\eta^2-s^2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{jl[\psi+\arcsin(s/\eta)]}, \qquad s \leqslant \eta. \tag{2}$$

Выражение (2) позволяет описать ПРВ мгновенных значений сигнала $W(s)$ при наличии амплитудных и фазовых искажений ПРВ $W(\eta,\varphi)$.

Рассмотрим и проанализируем далее два крайних случая. Первый случай, когда в совпадающие моменты времени амплитудные и фазовые искажения между собой независимы, а второй — когда между флуктуациями амплитуды и фазы существует функциональная связь.

Амплитудные и фазовые искажения в совпадающие моменты времени независимы. Плотность распределения вероятностей мгновенных значений сигнала при независимости амплитудных и фазовых искажений в совпадающие моменты времени можно представить в виде

$$W(s) = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(s,\eta,\varphi)\, d\eta\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|s|}^{\infty} \frac{W(\eta)}{\sqrt{\eta^2-s^2}}\, d\eta + \tag{3}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{l=-\infty\\ l\neq 0}}^{\infty} \theta_1^{\varphi}(l)\,\mathrm{e}^{jl\bar{\psi}} \int\limits_{|s|}^{\infty} \frac{W(\eta)}{\sqrt{\eta^2-s^2}}\,\mathrm{e}^{jl\arcsin(s/\eta)}\, d\eta, \quad |s| \leqslant \eta,$$

где $\theta_1^{\varphi}(l)$ — одномерная характеристическая функция фазовых искажений сигнала (1).

При наличии только фазовых искажений $W(\eta) = \delta(\eta - \eta_0)$ соотношение (3) имеет вид

$$W(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{\eta_0^2 - s^2}}\Big[1+2\sum_{l=1}^{\infty}|\theta_1^{\varphi}(l)|\cos\{l[\omega_0 t+\Phi(t)]+\arg\theta_1^{\varphi}(l)+l\arcsin(s/\eta_0)\}\Big], |s| \leqslant \eta_0. \quad (4)$$

Соответственно первые четыре начальных момента запишутся так:

$$m_1(s) = \eta_0|\theta_1^{\varphi}(1)|\cos[\omega_0 t + \Phi(t) + \arg\theta_1^{\varphi}(1)];$$

$$m_2(s) = \frac{\eta_0^2}{2}\{1 + |\theta_1^{\varphi}(2)|\cos[2\omega_0 t + 2\Phi(t) + \arg\theta_1^{\varphi}(2)]\};$$

$$m_3(s) = \frac{\eta_0^3}{4}\{3|\theta_1^{\varphi}(1)|\cos[\omega_0 t + \Phi(t) + \arg\theta_1^{\varphi}(1)] + |\theta_1^{\varphi}(3)|\cos[3\omega_0 t + 3\Phi(t) + \arg\theta_1^{\varphi}(3)]\}; \quad (5)$$

$$m_4(s) = \frac{3\eta_0^4}{8}\Big\{1 + \frac{4}{3}|\theta_1^{\varphi}(2)|\cos[2\omega_0 t + 2\Phi(t) + \arg\theta_1^{\varphi}(2)] +$$
$$+ \frac{1}{3}|\theta_1^{\varphi}(4)|\cos[4\omega_0 t + 4\Phi(t) + \arg\theta_1^{\varphi}(4)]\Big\}.$$

Здесь η_0 — математическое ожидание безразмерного множителя $\eta(t)$, определяющего амплитудные искажения, который может быть представлен в виде

$$\eta(t) = \eta_0[1 + \xi(t)],$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним, $[1 + \xi(t)] \geqslant 0$.

Из выражений (3) и (4) видно, что первые слагаемые в этих формулах представляют собой функции, описывающие ПРВ сигнала со случайной начальной фазой, равномерно распределённой на интервале $[0, 2\pi]$.

Вес остальных слагаемых в (3) и (4) определяется характеристической функцией фазовых искажений, которая в пределе стремится к нулю: $\lim_{l\to\infty}\theta_1^{\varphi}(l) \to 0$.

На рис. 1 приведены графики характеристической функции $\theta_1^{\varphi}(l) = \theta(l) = f(l)$ при различных значениях дисперсии фазовых искажений σ_{φ}^2 в случае флуктуаций фазы, распределённых по нормальному закону со средним, равным нулю.

Из выражений (3)–(5) видно, что среднее значение сигнала при наличии модулирующей помехи определяется относительным уровнем неискажённой части сигнала:

$$\alpha_0^2 = \eta_0^2\,\mathrm{e}^{-\sigma_{\varphi}^2}.$$

При дисперсии фазы $\sigma_{\varphi}^2 > 1$, когда $\theta_1^{\varphi}(l > 1) \ll \theta_1^{\varphi}(1)$, для описания ПРВ можно в выражениях (3) и (4) ограничиться двумя слагаемыми, например для (4)

$$W(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{\eta_0^2 - s^2}}\Big\{1 + 2|\theta_1^{\varphi}(1)|\cos\Big[\omega_0 t + \Phi(t) + \arcsin\Big(\frac{s}{\eta_0}\Big) + \arg\theta_1^{\varphi}(1)\Big]\Big\},$$
$$|s| \leqslant \eta_0. \quad (6)$$

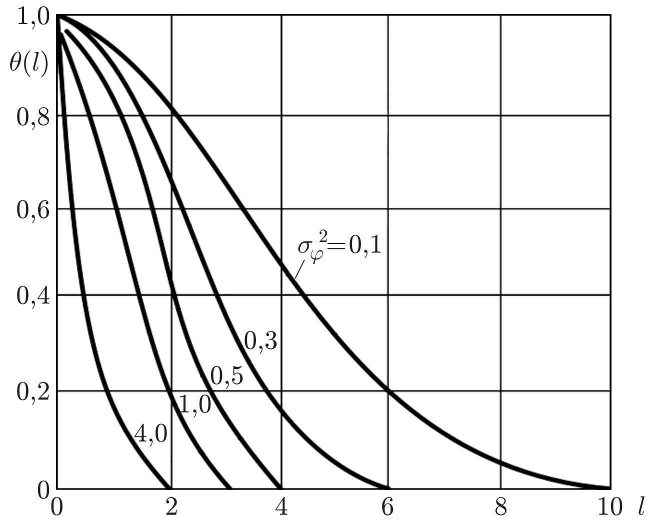

Рис. 1. Зависимость $\theta(l) = f(l)$ при различных значениях σ_φ^2

Плотность распределения вероятностей (3) и (6) при распределении фазы, отличном от равномерного на интервале $[0,\, 2\pi]$, зависит от времени, а сигнал является нестационарной случайной функцией.

При дисперсии фазы $\sigma_\varphi^2 \gg 1$ второй член много меньше первого (см. рис. 1). Следовательно, можно считать, что ПРВ сигнала независимо от закона распределения фазовых искажений $W(\varphi)$ определяется выражением, представляющим ПРВ сигнала со случайной начальной фазой, распределённой равномерно на интервале $[0, 2\pi]$:

$$W(s) \cong \frac{1}{\pi\sqrt{\eta_0^2 - s^2}}, \qquad |s| \leqslant \eta_0, \quad \sigma_\varphi^2 \gg 1.$$

Учитывая известное соотношение для ПРВ случайной величины [8] $s_{\text{ф}} = s - \alpha_0 s_0$, линейно связанной с некоторой другой случайной величиной s, можно получить ПРВ флуктуационной составляющей передаваемого сигнала при наличии модулирующих помех:

$$W(s_{\text{ф}}) = W_{s_{\text{ф}}}(s_{\text{ф}} + \alpha_0 s_0),$$

где $s_0 = u(t)/U(t)$ — нормированный неискажённый сигнал.

На рис. 2 изображена ПРВ с постоянной амплитудой $W(a)$, где $a = s/\eta_0$, и случайной фазой, распределённой по нормальному закону со средним, равным нулю, и дисперсией $\sigma_\varphi^2 = 4$ рад $\approx 230°$.

Область, лежащая между двумя штриховыми линиями, отображает изменения ПРВ сигнала. С увеличением дисперсии $\sigma_\varphi^2 \to \infty$ площадь этой области стремится к нулю, вырождаясь в сплошную линию. Следовательно, сигнал (1) при наличии фазовых искажений можно считать стационарной случайной функцией, если его фаза распределена равномерно на интервале $[0, 2\pi]$ или при других законах распределения, когда дисперсия фазовых флуктуаций значительно превышает единицу ($\sigma_\varphi^2 \gg 1$).

Если амплитуда и фаза сигнала являются независимыми функциями, то, введя в (3) переменную интегрирования $\eta = |s| \operatorname{ch} z$, после необходимых преобразований получим

$$W(s) = W_0(s) + W_{\text{ф}}(s),$$

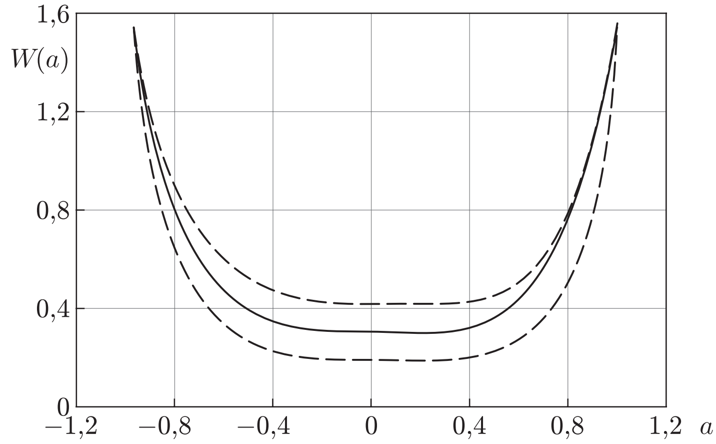

Рис. 2. Зависимость $W(a) = f(a)$ при $\sigma_\varphi^2 \approx 230°$

где

$$W_0(s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty W_\eta(s \operatorname{ch} z)\, dz, \tag{7}$$

$$W_\Phi(s) = \frac{1}{\pi} \sum_{l=-\infty,\ l\neq 0}^{\infty} \theta_1^\varphi(l)\, \mathrm{e}^{jl\bar\psi} \int\limits_{|s|}^\infty \frac{W(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - s^2}} \exp^{jl \arcsin(s/\eta)}\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{l=-\infty,\ l\neq 0}^{\infty} \theta_1^\varphi(l)\, \mathrm{e}^{jl\bar\psi}\ \frac{1}{jl} \int\limits_{|s|}^\infty \frac{d}{ds} \left[W(\eta)\, \mathrm{e}^{jl \arcsin(s/\eta)} \right] d\eta.$$

Составляющая $W_0(s)$ определяет ПРВ мгновенных значений сигнала (1) при независимых амплитудно-фазовых искажениях, когда фазовые искажения распределены равномерно на интервале $[0, 2\pi]$ или же при произвольном законе распределения, если дисперсия фазы $\sigma_\varphi^2 \gg 1$.

Четыре первых начальных момента ПРВ (7) могут быть найдены на основании выражений:

$$m_1(s) = 0, \quad m_2(s) = m_2(\eta)/2, \quad m_3(s) = 0, \quad m_4(s) = 3m_4(\eta)/8.$$

Согласно [12] можно записать

$$\int\limits_{|s|}^\infty \frac{d}{ds} \left[W(\eta)\, \mathrm{e}^{jl \arcsin(s/\eta)} \right] d\eta = \frac{d}{ds} \Big\{ \int\limits_{|s|}^\infty W(\eta)\, \mathrm{e}^{jl \arcsin(s/\eta)}\, d\eta \Big\} + W_\eta(|s|)\, \mathrm{e}^{jl(\pi/2)},$$

при

$$\theta_1^\varphi(l) \cong \int_{|s|}^\infty \mathrm{e}^{jl \arcsin(s/\eta)}\, W(\eta)\, d\eta, \qquad |s| \leqslant \eta,$$

для ПРВ (3) получим

$$W(s) = W_0(s) + \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty} l^{-1}|\theta_1^{\varphi}(l)|W_\eta(|s|)\sin\left[l(\omega_0 t + \Phi(t) + \pi/2) + \arg\theta_1^{\varphi}(l)\right],$$

$$|s| \leqslant \eta. \tag{8}$$

Из (8) видно, что при независимых амплитудных и фазовых искажениях и $\sigma_\varphi^2 \gg 1$, когда $|\theta_1^{\varphi}(l \geqslant 1)| \ll 1$, все члены суммы много меньше $W_0(s)$, а следовательно, ПРВ сигнала мало зависит от ПРВ $W(\varphi)$ и определяется соотношением (7), т. е. практически зависит лишь от ПРВ огибающей $W(\eta)$.

Определим взаимосвязь между характеристической функцией мгновенных значений сигнала и ПРВ огибающей при равномерном законе распределения фазы на интервале $[0, 2\pi]$ или при $\sigma_\varphi^2 \gg 1$ и любом другом законе распределения фазы.

Из (2) с учётом соотношения [13]

$$\frac{1}{\sqrt{\eta^2 - s^2}}\,\mathrm{e}^{jl\arcsin(s/\eta)} = \int_{-\infty}^{\infty} J_l(z\eta)\,\mathrm{e}^{jzs}\,dz, \qquad |s| \leqslant \eta,$$

видно, что в этом случае

$$W(s) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(\eta)J_0(z\eta)\,\mathrm{e}^{jzs}\,dz\,d\eta.$$

Умножив обе части на функцию e^{jvs} и проведя интегрирование по s, принимая во внимание свойства δ-функции, получим согласно [14]

$$\theta_1^{s}(v) = \int_0^{\infty} J_0(v\eta)W(\eta)\,d\eta = H_0\left[\frac{W(\eta)}{\eta}\right],$$

где $H_0(W(\eta)/\eta)$ — преобразование Ханкеля.

Обращение преобразования Ханкеля даёт выражение [15]

$$\frac{W(\eta)}{\eta} = \int_0^{\infty} \theta_1^{s}(v)J_0(v\eta)v\,dv.$$

Соответственно k-й начальный момент сигнала (1) запишется в виде

$$m_k(s) = \frac{1}{jk}\left[\frac{d^k}{dv^k}\theta_1^{s}(v)\right]_{v=0} = \frac{1}{jk}\left\{\frac{d^k}{dv^k}\,H_0\left[\frac{W(\eta)}{\eta}, v\right]\right\}_{v=0}. \tag{9}$$

При глубине фазовых искажений $\sigma_\varphi^2 > 1$ из (8) имеем

$$W(s) = W_0(s) + \frac{2}{\pi}\,|\theta_1^{\varphi}(1)|\,W_\eta(|s|)\sin\left[\omega_0 t + \Phi(t) + \frac{\pi}{2} + \arg\theta_1^{\varphi}(1)\right].$$

Первые два момента для ПРВ $W(s)$ имеют вид

$$m_1(s) = \frac{2}{\pi}\, m_1(\eta)\, |\theta_1^{\varphi}(1)| \sin\Big[\omega_0 t + \Phi(t) + \frac{\pi}{2} + \arg\theta_1^{\varphi}(1)\Big], \quad \sigma_\varphi^2 > 1;$$

$$m_2(s) = \frac{1}{2}\, m_2(\eta) \Big\{1 + \frac{4}{\pi}\, |\theta_1^{\varphi}(1)| \sin\Big[\omega_0 t + \Phi(t) + \frac{\pi}{2} + \arg\theta_1^{\varphi}(1)\Big]\Big\}, \quad \sigma_\varphi^2 > 1,$$

где $m_1(\eta)$, $m_2(\eta)$ — среднее значение и второй начальный момент флуктуаций огибающей соответственно.

Амплитудные и фазовые искажения функционально связаны. Рассмотрим случай, когда между флуктуациями амплитуды и фазы существует функциональная связь

$$\varphi = f(\eta), \tag{10}$$

тогда двумерная ПРВ $W(\eta, \varphi)$ в соотношении (2) запишется так:

$$W(\eta, \varphi) = W(\eta)\delta[\varphi - f(\eta)]. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (2), после интегрирования и преобразований, аналогичных вышеприведённым, получим

$$W(s) = \frac{1}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{|s|}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(\eta)\delta[\varphi - f(\eta)]}{\sqrt{\eta^2 - s^2}}\, \mathrm{e}^{jl(\arcsin(s/\eta) + \psi)}\, d\eta\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} W_\eta(|s| \operatorname{ch} z)\, dz + \frac{2}{\pi}\, W_\eta(|s|) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} \sin\Big\{l\Big[\omega_0 t + \Phi(t) + \frac{\pi}{2} + f(|s|)\Big]\Big\}. \tag{12}$$

Как видно из (12), при функционально связанных амплитудно-фазовых искажениях ПРВ передаваемого сигнала может быть выражена через статистические характеристики огибающей.

Начальный момент k-го порядка ПРВ (12) после необходимых вычислений запишется в виде

$$m_k(s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} s^k W(s)\, ds = m_k(s)|_{\text{р}} + m_k(s)|_{\text{н}},$$

где $m_k(s)|_{\text{р}}$ — составляющая, определяемая равномерным законом распределения фазы (9); $m_k(s)|_{\text{н}}$ — составляющая, определяемая отличием закона распределения фазы от равномерного.

Разложив в ряд Маклорена функцию $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{s^n}{n!}\, f^{(n)}(0)$ и ограничившись двумя членами ряда, после вычислений получим

$$m_k(s)|_{\text{н}} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l[jf'(0)]^k} \frac{d^k}{dl^k} \left\{\theta_1^{\eta}[jf'(0)]\right\} \mathrm{e}^{jl[\omega_0 t + \Phi(t) + f(0)]}, \tag{13}$$

где $\theta_1^{\eta}[jf'(0)]$ — характеристическая функция амплитудных искажений (флуктуаций огибающей).

Из (13) следует, что среднее значение сигнала (1) существенно зависит от характера амплитудных искажений и задаётся, кроме составляющей, определяемой ПРВ при равномерном законе распределения фазы на интервале $[0, 2\pi]$, составляющей, зависящей от производной характеристики функции амплитудных искажений.

Плотности распределения вероятностей суммы сигнала и аддитивного шума при наличии модулирующих помех. На практике вместе с сигналом всегда присутствует аддитивный нормальный шум $n(t)$, ПРВ которого

$$W(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\,\mathrm{e}^{-n^2/(2\sigma_n^2)},$$

где σ_n — среднеквадратическое отклонение шума.

Учитывая полученные ранее соотношения для ПРВ мгновенных значений сигнала (1), найдём совместную ПРВ суммарного сигнала:

$$y(t) = u_{\text{м}}(t) + n(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{14}$$

где $u_{\text{м}}(t) = U(t)s(t)$.

Как известно [8], ПРВ суммы независимых случайных величин определяется соотношением

$$W(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(u_{\text{м}})W_n(y - u_{\text{м}})\,du_{\text{м}}.$$

После подстановки в (2) соотношения (14) с учётом (1) и замены переменной интегрирования $s = \arcsin{(u_{\text{м}}/\eta)}$ получим

$$W(y,\eta,\varphi) = \frac{W(\eta,\varphi)}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\Big(-\frac{2y^2 + \eta^2U^2}{4\sigma_n^2}\Big)\times$$

$$\times\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{jl\psi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp\Big(-\frac{\eta^2U^2}{4\sigma_n^2}\cos 2z - \frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\cos z + jlz\Big)\,dz. \tag{15}$$

С учётом разложения [11] $\mathrm{e}^{-a\cos x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n I_n(a)\,\mathrm{e}^{jnx}$, в котором $I_n(a)$ — модифицированная функция Бесселя, после необходимых преобразований приведём (15) к виду

$$W(y,\eta,\varphi) = \frac{W(\eta,\varphi)}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\Big(-\frac{2y^2 + \eta^2U^2}{4\sigma_n^2}\Big)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{2k+p}\Big(\frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\Big)I_{2k}\Big(\frac{\eta^2U^2}{4\sigma_n^2}\Big)\,\mathrm{e}^{jn\psi},$$

$$W(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\theta_1^{\varphi}(l)F(y,k,l)\,\mathrm{e}^{jl[\omega_0 t + \Phi(t)]}, \tag{16}$$

где

$$F(y,k,l) = \int\limits_0^{\infty} I_{2k+p}\Big(\frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\Big)I_{2k}\Big(\frac{\eta^2U^2}{4\sigma_n^2}\Big)\exp\Big(-\frac{\eta^2U^2}{4\sigma_n^2}\Big)W(\eta)\,d\eta, \quad \psi = \omega_0 t + \Phi(t) + \varphi(t).$$

Упростим (16) для случаев отношений сигнал/шум (ОСШ) $\rho^2 = \eta^2(t)U^2(t)/(2\sigma_n^2) \gg 1$ и $\rho^2 \ll 1$, представляющих значительный интерес при решении прикладных задач на практике.

Рассмотрим случай, когда амплитудные и фазовые искажения являются независимыми [16]:

$$W(\eta,\varphi) = W(\eta)W(\varphi).$$

Пусть ОСШ $\rho^2 \ll 1$. Тогда, ограничившись членами двойного ряда с номером $k = 0$ и считая $I_0(x)\,\mathrm{e}^{-x} \cong 1$, получим

$$W(y,\eta,\varphi) = \frac{W(\eta,\varphi)}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big) \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l\Big(\frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\Big)\,\mathrm{e}^{jl\psi}\,. \tag{17}$$

При отсутствии амплитудных искажений $W(\eta) = \delta(\eta - 1)$ и произвольном законе распределения фазы запишем

$$W(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \theta_1^{\varphi}(l) I_l\Big(\frac{Uy}{2\sigma_n^2}\Big)\,\mathrm{e}^{jl[\omega_0 t+\Phi(t)]}, \qquad \rho^2 \ll 1.$$

Если глубина фазовых искажений $\sigma_\varphi^2 \gg 1$ или фазовые искажения распределены по равномерному закону на интервале $[0, 2\pi]$, то можно записать

$$W(y) \cong \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big) I_0\Big(\frac{Uy}{2\sigma_n^2}\Big), \qquad \rho^2 \ll 1, \quad \sigma_\varphi^2 \gg 1.$$

При произвольном законе распределения огибающей ПРВ суммарного сигнала будет иметь следующий вид:

$$W(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \theta_1^{\varphi}(l) F(y,l)\,\mathrm{e}^{jl[\omega_0 t+\Phi(t)]}, \qquad \rho^2 \ll 1, \tag{18}$$

где $F(y,l) = \displaystyle\int_0^\infty I_l\Big(\frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\Big) W(\eta)\,d\eta$ — интегральное преобразование ПРВ огибающей $W(\eta)$ [11].

При ОСШ $\rho^2 \ll 1$ в первом приближении можно принять

$$I_l\Big(\frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\Big) \cong \Big(\frac{\eta U y}{2\sigma_n^2}\Big)^l \frac{1}{l!}.$$

Тогда, учитывая $I_l(x) = I_{-l}(x)$, после вычисления получим

$$F(y,l) = \frac{1}{l!}\Big(\frac{yU}{2\sigma_n^2}\Big)^l m_l(\eta), \tag{19}$$

где $m_l(\eta)$ — начальный момент l-го порядка.

Выражение (18) с учётом (19) примет вид

$$W(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big)\Big\{1+2\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\frac{yU}{2\sigma_n^2}\Big)^l\frac{m_l(\eta)}{l!}\operatorname{Re}\big[\theta_1^{\varphi}(l)\,\mathrm{e}^{jl[\omega_0 t+\Phi(t)]}\big]\Big\},\quad \rho^2\ll 1.$$

При ОСШ $\rho^2\gg 1$, заменяя

$$I_{2k}\Big(\frac{\eta^2U^2}{4\sigma_n^2}\Big)\cong\frac{\sigma_n}{U\eta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\Big(-\frac{\eta^2U^2}{4\sigma_n^2}\Big)$$

и учитывая, что

$$\sum_k I_{2k}(x)=\frac{1}{2}\operatorname{ch}x,\qquad \sum_k I_{2k+1}(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sh}x,$$

для ПРВ (16) при $\sigma_\varphi^2>1$ получим

$$W(y)=\frac{1}{\pi^2\eta U}\exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big)W(\eta,\varphi)\Big[\operatorname{ch}\Big(\frac{\eta Uy}{\sigma_n^2}\Big)+\operatorname{sh}\Big(\frac{\eta Uy}{\sigma_n^2}\Big)\cos\psi\Big],\qquad \rho^2\gg 1.$$

Соответственно при произвольных законах распределения амплитуды $W(\eta)$ и фазы $W(\varphi)$ будем иметь

$$W(y)=\frac{1}{\pi^2}\exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big)\{\Gamma_c(yU)+\Gamma_s(yU)\operatorname{Re}[\theta_1^{\varphi}(l)\,\mathrm{e}^{j[\omega_0 t+\Phi(t)]}]\},\qquad \rho^2\gg 1,\tag{20}$$

где

$$\Gamma_c(yU)=\int_0^{\infty}\frac{W(\eta)}{\eta}\operatorname{ch}\Big(\frac{\eta Uy}{\sigma_n^2}\Big)\,d\eta,\qquad \Gamma_s(yU)=\int_0^{\infty}\frac{W(\eta)}{\eta}\operatorname{sh}\Big(\frac{\eta Uy}{\sigma_n^2}\Big)\,d\eta.\tag{21}$$

Вычисление функций (21) для ряда законов распределения $W(\eta)$ встречает значительные трудности. Поэтому, раскладывая в ряд

$$\operatorname{ch}x=\sum_k\frac{x^{2k}}{(2k)!},\qquad \operatorname{sh}x=\sum_k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

выразим $\Gamma_c(yU)$ и $\Gamma_s(yU)$ через начальные моменты огибающей сигнала (1):

$$\begin{gathered}\Gamma_c(yU)=\int_0^{\infty}\frac{W(\eta)}{\eta}\,d\eta+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\Big(\frac{yU}{\sigma_n^2}\Big)^{2k}m_{2k-1}(\eta);\\ \Gamma_s(yU)=\frac{yU}{\sigma_n^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\Big(\frac{yU}{\sigma_n^2}\Big)^{2k+1}m_{2k}(\eta),\end{gathered}\tag{22}$$

где $m_{2k-1}(\eta)$, $m_{2k}(\eta)$ — начальные моменты $(2k-1)$-го и $(2k)$-го порядков флуктуаций амплитуды соответственно.

Подставляя (22) в (20), получим разложение ПРВ суммарного сигнала (15) по ПРВ нормального случайного процесса с весовыми коэффициентами (22), определяемыми начальными моментами огибающей сигнала.

При дисперсии фазовых флуктуаций $\sigma_\varphi^2 \gg 1$ (см. рис. 1) или при равномерном законе распределения фазы соотношение (20) запишется в виде

$$W(y) = \frac{\Gamma_c(y)}{\pi^2} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big), \qquad \rho^2 \gg 1, \qquad \sigma_\varphi^2 \gg 1.$$

Определим ПРВ суммарного сигнала (15), когда амплитудно-фазовые искажения сигнала $u_{\text{м}}(t)$ функционально связаны, т. е. выполняются условия (10) и (11).

При ОСШ $\rho^2 \ll 1$ после интегрирования по η и φ для (17) получим

$$W(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{jl[\bar\psi + f(0)]} \int\limits_0^\infty I_l\Big(\frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\Big)\, \mathrm{e}^{jl\eta f'(0)}\, W(\eta)\, d\eta.$$

Разложив функцию Бесселя в степенной ряд, ограничившись при $\rho^2 \ll 1$ членом

$$I_l\Big(\frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\Big) \cong \Big(\frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\Big)^l \frac{1}{l!},$$

с учётом

$$\eta\, \mathrm{e}^{jl\eta f'(0)} = \Big[\frac{d^n}{[jf'(0)]^n dl^n}\, \mathrm{e}^{jlf'(0)\eta}\Big]_{n=l}$$

окончательно запишем

$$W(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big) \sum \frac{1}{[jf'(0)]^l} \Big(\frac{yU}{\sigma_n^2}\Big)^l \Big[\frac{d^n}{dl^n}\, \theta_1^\eta[lf'(0)]\Big]_{n=l} \mathrm{e}^{jl\bar\psi}, \qquad \rho^2 \ll 1,$$

где $\bar\psi = \omega_0 t + \Phi(t)$.

При ОСШ $\rho^2 \gg 1$ и $\sigma_\varphi^2 > 1$, а также $W(\eta, \varphi) = W(\eta)\delta[\varphi - f(\eta)]$ выражение (20) можно записать в виде

$$W(y) = \frac{1}{\pi^2} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big) \Big\{\Gamma_c(yU) + \mathrm{Re}\Big[\mathrm{e}^{j\bar\psi} \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}\Big(\frac{\eta U y}{\sigma_n^2}\Big)\, \mathrm{e}^{jf(\eta)}\, W(\eta)\, d\eta\Big]\Big\}, \qquad \rho^2 \gg 1.$$

Проведя преобразования, аналогичные вышеописанным для случая $\rho^2 \ll 1$, получим

$$W(y) = \frac{1}{\pi^2} \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}\Big) \Big\{\Gamma_c(yU) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k(y) \cos\left[\omega_0 t + \Phi(t) + f(0)\right]\Big\}, \qquad \rho^2 \gg 1, \qquad (23)$$

где

$$C_k(y) = \frac{1}{[jf'(0)]^{2k+1}} \Big(\frac{yU}{\sigma_n^2}\Big)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} \Big\{\frac{d^{2k+1}}{dl^{2k+1}}\, \theta_1^\eta[lf'](0)\Big\}_{l=1}.$$

В отличие от (20) в (23) при функционально связанных амплитудно-фазовых искажениях весовые множители при разложении ПРВ суммарного сигнала по нормальному закону определяются производной от характеристической функции флуктуаций огибающей. Нестационарный член в (20) отличается от нестационарного члена в (23) только начальной фазой, задаваемой функцией связи (10) в нулевой точке.

Таким образом, на примере полученных выражений для ПРВ сигнала (1), искажённого помехой, и суммы этого сигнала и шума (15) видно, что при законе распределения фазы, отличном от равномерного на интервале $[0, 2\pi]$, сигнал является нестационарной случайной функцией, стремящейся к стационарной при увеличении глубины фазовых искажений.

Заключение. В данной работе определено, что сигнал является нестационарной случайной функцией при неравномерном распределении фазы на интервале $[0, 2\pi]$. Показано, что сигнал при наличии фазовых искажений можно считать стационарной случайной функцией при равномерном распределении фазы на интервале $[0, 2\pi]$ либо при других законах распределения, когда дисперсия фазовых искажений значительно больше единицы. При независимых амплитудных и фазовых искажениях, вызванных модулирующей помехой, ПРВ сигнала мало зависит от ПРВ фазовых искажений $W(\varphi)$, а зависит практически лишь от ПРВ огибающей. Определена взаимосвязь между характеристической функцией мгновенных значений сигнала и ПРВ огибающей при равномерном законе распределения фазы.

При наличии функциональной связи между флуктуациями амплитуды и фазы ПРВ сигнала может быть выражена через статистические характеристики огибающей. Отмечается, что среднее значение сигнала зависит как от характера амплитудных искажений, так и от составляющей, определяемой производной характеристики функции амплитудных искажений.

Получены ПРВ суммы сигнала и аддитивного шума на фоне модулирующих помех для случаев, когда амплитудные и фазовые искажения являются между собой независимыми и функционально связанными при различных значениях отношения сигнал/шум. Показано, что при неравномерном распределении фазы на интервале $[0, 2\pi]$ сигнал является нестационарной случайной функцией, стремящейся перейти к стационарной при увеличении глубины фазовых искажений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
2. **Van Trees H. L., Bell K. L., Tian Z.** Detection Estimation and Modulation Theory. Pt. I, Detection, Estimation, and Filtering Theory. London: Wiley & Sons, Inc., 2013. 1151 p.
3. **Сосулин Ю. Г.** Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978. 320 с.
4. **Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др.** Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. 440 с.
5. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Нелинейное оценивание параметров сигнала при воздей-ствии узкополосных негауссовских помех // Автометрия. 2019. **55**, № 1. С. 80–88. DOI: 10.15372/AUT20190111.
6. **Кремер И. Я., Владимиров В. И., Карпухин В. И.** Модулирующие (мультипликативные) помехи и прием радиосигналов. М.: Сов. радио, 1972. 480 с.
7. **Арсенин В. Я.** Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 432 с.
8. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.

9. **Artyushenko V. M., Volovach V. I.** The effect of multiplicative noise on probability density function of signal and additive noise // Proc. of the Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT). Moscow, Russia, March 14–16, 2018. DOI: 10.1109/MWENT.2018.8337270.
10. **Artyushenko V. M., Volovach V. I.** Analysis of statistical characteristics of probability density distribution of the signal mixture and additive-multiplicative non-Gaussian noise // Proc. of the XIII Intern. IEEE Scientific and Technical Conference "Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)". Omsk, Russia, Nov. 5–7, 2019. DOI: 10.1109/Dynamics47113.2019.8944670.
11. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
12. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 2. СПб.; М.: БХВ-Петербург, 2008. 84 с.
13. **Бейтмен Г., Эрдейн А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1973. 304 с.
14. **Рытов С. М.** Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 494 с.
15. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Интегральные преобразования и операционное вычисление. М.: Физматлит, 1974. 544 с.
16. **Тихонов В. И., Харисов В. Н.** Статистический анализ радиотехнических устройств и систем: Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.

Поступила в редакцию 07.09.2020
После доработки 16.12.2020
Принята к публикации 10.02.2021