

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 539.3; 535.3

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННО ВОЗДЕЙСТВУЮЩИХ ПРИВодОВ КРУГЛОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ЗЕРКАЛА СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ

© Д. А. Ягнятинский, В. Н. Федосеев

*Научно-исследовательский институт Научно-производственное объединение «ЛУЧ»
142103, г. Подольск Московской обл., ул. Железнодорожная, 24
E-mail: day@luch.com.ru*

Получено аналитическое решение задачи прогиба тонкой круглой пластины (подложки) деформируемого зеркала со свободным краем при срабатывании одного из сосредоточенно действующих на пластину приводов, опирающихся другими концами на бесконечно жёсткое основание. Решение основывается на применении интегральных преобразований и учёте кинематической связи между пластиной и приводами, деформация которых подчиняется закону Гука. Приведено сравнение найденного аналитического решения с решением по методу конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Полученный результат может быть использован для оптимизации расположения приводов и управления круглыми деформируемыми зеркалами в задачах адаптивной оптики.

Ключевые слова: прогиб, тонкая круглая пластина, деформируемое зеркало, свободный край, сосредоточенная сила, привод, интегральные преобразования, кинематическая связь, ANSYS.

DOI: 10.15372/AUT20210108

Введение. Для задач адаптивной оптики по проектированию и использованию деформируемых зеркал (ДЗ) важно уметь с допустимой точностью рассчитывать функции влияния приводов этих зеркал [1, 2]. Это, в частности, требуется для оптимизации плана расположения приводов [3] в целях уменьшения систематической погрешности отработки заданных аберраций и для управления ДЗ. Воздействие приводов на пластину зеркала часто моделируют силами, приложенными в дискретных точках [4–9].

В [4] отмечается, что аналитическое решение задачи прогиба тонкой упругой изотропной пластины деформируемого зеркала со свободными краями при действии на неё сосредоточенных сил представляет собой значительную трудность и вместо этого используются расчётные модели, построенные на основе метода конечных элементов (МКЭ) [10]. Тем не менее для определённых форм пластины решение задачи может быть найдено. Для пластины прямоугольной формы аналитическое решение получено в [11]. В представленной работе рассматривается другой случай — пластина круглой формы. Одной из основных областей применения круглых ДЗ является астрономическая адаптивная оптика [2, 12, 13]. Это подтверждает актуальность задачи применения круглого ДЗ.

Вычисление функции влияния для каждого привода основано на разложении решения в ряд по специальным функциям и применении интегральных преобразований. Дополнительно учитываются условия кинематической связи (аналогично [6, 11]). Приводы моделируются упругими пружинами, деформация которых подчиняется закону Гука. Одним концом приводы крепятся к пластине, а другим — опираются на абсолютно жёсткое основание. В качестве управляющих элементов часто используют пьезопроводы, принцип

действия которых основан на обратном пьезоэффекте [14]. При подаче электрического напряжения на так называемый активный привод он растягивается и сосредоточенно воздействует на пластину с некоторой силой. Другие, пассивные приводы также деформируются, сосредоточенно воздействуя на подложку, но работают уже на её удержание.

В [7, 15–17] аналитически рассматривается изгиб тонкой круглой пластины под действием локализованной нагрузки. В отличие от [7] в данной работе использовался другой способ решения и задача не ограничена условием, что приводы должны иметь одинаковую жёсткость. Для круглого ДЗ часто предпочтительно, чтобы эффективная жёсткость каждого привода была одинаковой. Однако в реальных условиях некоторого разброса их значений из-за многофакторности [14] не избежать. Кроме того, из-за несбалансированной жёсткости иногда специально ближе к краю зеркала устанавливают более жёсткие приводы. Таким образом, данная работа актуальна для задачи выбора оптимального расположения приводов, более точной оценки их функций влияния и содержит оригинальный подход с математической точки зрения. В [15] выводится аналитическое решение для поперечного прогиба тонкой круглой пластины со свободным краем при заданном на неё воздействии поперечного давления $P(x, y)$. В реальности величины и направления действия сосредоточенных сил со стороны приводов заранее неизвестны, что является принципиальным отличием математической постановки задачи. Мы рассматриваем целиком механическую систему «пластина — приводы».

1. Предварительный анализ. Существует подход в [8] для решения задачи вычисления наилучшей аппроксимации произвольного волнового фронта $\phi(x, y)$ с помощью ДЗ со свободными краями на N дискретных пьезоприводах — на основе результатов из [15]. Требуется найти заранее неизвестные сосредоточенные силы P_i , действующие на пластину зеркала со стороны приводов. Составляется система линейных алгебраических уравнений числом $N + 3$. Решая её, можно определить силы P_i и три коэффициента при подставке (piston) и наклонах, которые следует добавить, чтобы получить наилучшую аппроксимацию фронта. Далее остаётся вычислить подаваемые напряжения на приводы.

Для этого можно рассмотреть условия механического равновесия в приводах (предположим для простоты, что они все одинаковые):

$$F_i = P_i + Kw_i, \quad F_i = \beta V_i, \quad \beta V_i = P_i + Kw_i,$$

где для каждого привода V_i — искомое электрическое напряжение, F_i — внутренняя сила на растяжение/сжатие, w_i — растяжение/сжатие привода, K — жёсткость привода, β — коэффициент передачи электрического напряжения в усилие внутри привода. Если бы аппроксимация фронта $\phi(x, y)$ была идеальной, то могло выполняться $w_i = \phi(x_i, y_i)$ и управляющие напряжения на приводах могли вычисляться как

$$V_i = \frac{P_i + K\phi(x_i, y_i)}{\beta}.$$

Но в реальных условиях аппроксимация имеет ошибку. Кроме того, в [8] подразумевается, что ДЗ работает вместе с корректором наклонов, а в данной работе, как будет видно далее, функции влияния ДЗ вычислены в полном базисе с учётом подставки и наклонов.

2. Постановка задачи. Нагрузку на поверхность упругой тонкой пластины (рис. 1, а) толщиной h и изгибной жёсткостью D представим в виде давления q . Тогда малый прогиб пластины w в поперечном направлении подчиняется неоднородному бигармоническому уравнению [18]

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)},$$

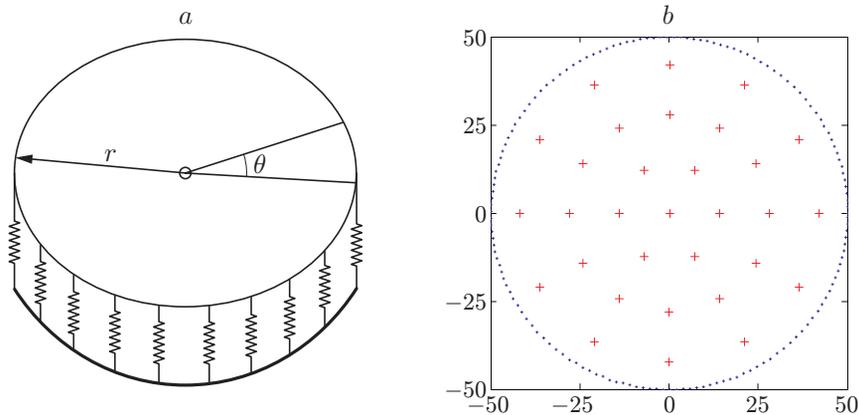


Рис. 1. Схема деформируемого зеркала: *a* — модель пластины с упругими приводами; *b* — план расположения приводов

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины соответственно. Для круглой пластины в полярных координатах (r, θ) с началом в центре пластины имеем [18]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) w(r, \theta) = \frac{q(r, \theta)}{D}. \quad (1)$$

В случае свободного края граничные условия для круглой пластины радиуса a будут [18] иметь вид

$$(M_r)_{r=a} = 0, \quad V = \left(Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{rt}}{\partial \theta}\right)_{r=a} = 0,$$

где M_r — изгибающий момент на единице длины; Q_r — перерезывающая сила на единице длины; M_{rt} — крутящий момент на единице длины; V — вертикальная реакция на единице длины. Выражая все величины через прогиб пластины [18], запишем условия на её границе следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + \frac{1-\nu}{a} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = 0. \quad (2)$$

Давление, производимое на пластину n_a сосредоточенными приводами, может быть записано в виде

$$q(r, \theta) = F_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j0}) - \sum_{j=1}^{n_a} K_j w_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (3)$$

где F_0 — внутренняя растягивающая сила в активном приводе (которому присвоен номер j_0); \mathbf{r} — радиус-вектор точки пластины с полярными координатами (r, θ) ; \mathbf{r}_j — радиус-вектор j -го привода с полярными координатами (r_j, θ_j) ; K_j — жёсткость j -го привода; $w_j = w(r_j, \theta_j)$ — прогиб пластины в месте расположения j -го привода и растяжение (или сжатие) j -го привода; δ — двумерная дельта-функция Дирака. Требуется определить функцию $w(r, \theta)$ при $(r, \theta) \in [0, a] \times [0, 2\pi)$.

Особенность решения уравнения в частных производных в данном случае — учёт зависимости величины $q(r, \theta)$ в правой части (1) от заранее неизвестных прогибов подложки w_j в точках размещения приводов.

3. Решение в виде ряда Фурье. Решение уравнения (1) ищем в виде разложения по собственным модам колебаний однородной круглой тонкой пластины со свободным краем [19] (вместо индекса j используется индекс i):

$$w(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_{i,p} \psi_{i,p}(r, \theta), \quad (4)$$

$$\psi_{i,p}(r, \theta) = \begin{cases} A_{i,p}[J_p(R_{i,p}) + C_{i,p}I_p(R_{i,p})] \sin p\theta, & p < 0; \\ A_{i,0}[J_0(R_{i,0}) + C_{i,0}I_p(R_{i,0})], & p = 0; \\ A_{i,p}[J_p(R_{i,p}) + C_{i,p}I_p(R_{i,p})] \cos p\theta, & p > 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $R_{i,p} = \lambda_{i,p}r/a$, i ($i \geq 0$) и p ($-\infty < p < \infty$) — целые числа; $J_p(R)$ — функции Бесселя первого рода; $I_p(R)$ — модифицированные функции Бесселя. Безразмерные частотные параметры $\lambda_{i,p}$ и параметры формы мод $C_{i,p}$ являются решением задачи на собственные значения [19], $A_{i,p}$ — амплитудный параметр, соответствующий условию нормировки [19]. Параметры $\lambda_{i,p}$, $C_{i,p}$ и $A_{i,p}$ — чётные по параметру p [19].

Исключением среди собственных мод являются три моды, соответствующие нулевой собственной частоте, которые представляют собой моды абсолютно твёрдого тела: два поворота круглой пластины вокруг взаимно перпендикулярных диаметров и параллельный сдвиг по вертикальной оси [19]:

$$\psi_{0,-1}(r, \theta) = 2 \frac{r}{a} \sin \theta, \quad \psi_{0,0}(r, \theta) = 1, \quad \psi_{0,1}(r, \theta) = 2 \frac{r}{a} \cos \theta. \quad (6)$$

Эти функции удовлетворяют всем используемым условиям, которые выполняются и для функций в (5).

Параметры формы мод $C_{i,p}$ из (5) одновременно удовлетворяют двум равенствам [19]:

$$C_{i,p} = \frac{\lambda_{i,p}^2 J_p(\lambda_{i,p}) + (1 - \nu)[\lambda_{i,p} J'_p(\lambda_{i,p}) - p^2 J_p(\lambda_{i,p})]}{\lambda_{i,p}^2 I_p(\lambda_{i,p}) - (1 - \nu)[\lambda_{i,p} I'_p(\lambda_{i,p}) - p^2 I_p(\lambda_{i,p})]}, \quad (7)$$

$$C_{i,p} = \frac{\lambda_{i,p}^3 J'_p(\lambda_{i,p}) + p^2(1 - \nu)[\lambda_{i,p} J'_p(\lambda_{i,p}) - J_p(\lambda_{i,p})]}{\lambda_{i,p}^3 I'_p(\lambda_{i,p}) - p^2(1 - \nu)[\lambda_{i,p} I'_p(\lambda_{i,p}) - I_p(\lambda_{i,p})]},$$

где ν — коэффициент Пуассона материала пластины. Если приравнять правые части в двух выражениях из (7) для $C_{i,p}$, то получится характеристическое уравнение для частотного параметра $\lambda_{i,p}$. Решая численно данное уравнение и подставляя каждый корень в одно из равенств (7), можно найти соответствующие значения $C_{i,p}$. Для проверки корректности численных расчётов данная процедура была проделана для значения $\nu = 0,33$. Наблюдалось идеальное соответствие с числовыми значениями $\lambda_{i,p}$ и $C_{i,p}$, приведёнными в [19].

Для вычисления амплитудных параметров $A_{i,p}$ используется условие нормировки

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \psi_{i,p}^2 r dr d\theta = \pi a^2.$$

Следует отметить, что в [19] в формулах для $A_{i,0}$ и для $A_{i,p}$ при $p > 0$ содержатся ошибки, которые не приводят к числовым значениям, данным в таблицах этой работы. Из условия нормировки можно вывести, что для $A_{i,0}$ правильной является формула

$$A_{i,0}^{-2} = J_0^2(\lambda_{i,0}) + 2 \frac{C_{i,0}}{\lambda_{i,0}} (J_0(\lambda_{i,0})I_0'(\lambda_{i,0}) - J_0'(\lambda_{i,0})I_0(\lambda_{i,0})) + \\ + [J_0'(\lambda_{i,0})]^2 + C_{i,0}^2(I_0^2(\lambda_{i,0}) - [I_0'(\lambda_{i,0})]^2).$$

Для вычисления значений $A_{i,p}$ при $p > 0$ можно использовать либо формулу

$$A_{i,p}^{-2} = \frac{1}{2} \left(J_p^2(\lambda_{i,p}) + 2 \frac{C_{i,p}}{\lambda_{i,p}} [J_p(\lambda_{i,p})I_p'(\lambda_{i,p}) - J_p'(\lambda_{i,p})I_p(\lambda_{i,p})] + C_{i,p}^2 I_p^2(\lambda_{i,p}) - \right. \\ \left. - \frac{p^2}{\lambda_{i,p}^2} [J_p^2(\lambda_{i,p}) - C_{i,p}^2 I_p^2(\lambda_{i,p})] + [J_p'(\lambda_{i,p})]^2 - [C_{i,p} I_p'(\lambda_{i,p})]^2 \right),$$

либо

$$A_{i,p}^{-2} = \frac{1}{2} \left(J_p^2(\lambda_{i,p}) + C_{i,p}^2 I_p^2(\lambda_{i,p}) + 2 \frac{C_{i,p}}{\lambda_{i,p}} [J_p(\lambda_{i,p})I_{p-1}(\lambda_{i,p}) - J_{p-1}(\lambda_{i,p})I_p(\lambda_{i,p})] - \right. \\ \left. - [J_{p-1}(\lambda_{i,p})J_{p+1}(\lambda_{i,p}) + C_{i,p}^2 I_{p-1}(\lambda_{i,p})I_{p+1}(\lambda_{i,p})] \right).$$

При выводе формул для $A_{i,p}$ были использованы табличные интегралы [20]

$$\text{Int}_{12} = \int_0^\lambda x J_p^2(\alpha x) dx = \frac{\lambda^2}{2} \{ J_p^2(\alpha \lambda) - J_{p-1}(\alpha \lambda) J_{p+1}(\alpha \lambda) \},$$

$$(J \leftrightarrow I),$$

$$\text{Int}_3 = \int_0^\lambda x J_p(\alpha x) I_p(\beta x) x dx = \lambda \frac{\alpha J_p'(\alpha \lambda) J_p(\beta \lambda) - \beta J_p'(\beta \lambda) J_p(\alpha \lambda)}{\beta^2 - \alpha^2}.$$

Проверочные расчёты показали, что все вычисленные значения параметров для функций $\psi_{i,p}$ обеспечивают ортонормированность этой системы функций на множестве $[0, a] \times [0, 2\pi)$. Использование этих функций для решения поставленной задачи удобно тем, что они также удовлетворяют граничным условиям (2) и подчиняются условию [19]

$$\nabla^4 \psi_{i,p} = \left(\frac{\lambda_{i,p}}{a} \right)^4 \psi_{i,p}. \quad (8)$$

Таким образом, исходная задача сводится к нахождению коэффициентов $\alpha_{i,p}$. При этом в двойном ряду (4) можно ограничиться максимальными значениями \bar{i} и $\pm \bar{p}$ для индексов i

и p соответственно (максимальные значения можно выбирать исходя из характерного количества приводов в радиальном и угловом направлениях; на практике это определяется тем, насколько высоким или низким пространственным разрешением обладает используемое в управлении деформируемое зеркало [21]).

Если теперь подставить (4) в выражение (1), то с учётом (3), (8) и конечности сумм получится выражение

$$\sum_{i=0}^{\bar{i}} \sum_{p=-\bar{p}}^{\bar{p}} \alpha_{i,p} \left(\frac{\lambda_{i,p}}{a} \right)^4 \psi_{i,p}(r, \theta) = \frac{1}{D} \left(F_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j0}) - \sum_{j=1}^{n_a} K_j w_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \right). \quad (9)$$

Далее нужно умножить обе части уравнения (9) на один из базисных элементов частичной суммы ряда (4): $\psi_{i0,p0}$, где $i0 \in [0, \bar{i}]$, $p0 \in [-\bar{p}, \bar{p}]$. Затем при действии на по-

лученное уравнение оператором $\int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta$ в силу ортонормированности функций $\psi_{i,p}$ получится

$$\alpha_{i0,p0} \left(\frac{\lambda_{i0,p0}}{a} \right)^4 \pi a^2 D = F_0 \psi_{i0,p0}(r_{j0}, \theta_{j0}) - \sum_{j=1}^{n_a} K_j w_j \psi_{i0,p0}(r_j, \theta_j). \quad (10)$$

После преобразований с использованием обозначения $\psi_{i,p}(j) \equiv \psi_{i,p}(r_j, \theta_j)$ равенство (10) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{n_a} K_j \psi_{i0,p0}(j) w_j + \sum_{i=0}^{\bar{i}} \sum_{p=-\bar{p}}^{\bar{p}} \delta_{i,i0} \delta_{p,p0} \left(\frac{\lambda_{i,p}}{a} \right)^4 \pi a^2 D \alpha_{i,p} = F_0 \psi_{i0,p0}(j0), \quad (11)$$

где $\delta_{i,i0}$ и $\delta_{p,p0}$ — символы Кронекера. При разных значениях индексов $i0$ и $p0$ выражение (11) представляет собой систему $\bar{l} = (\bar{i} + 1)(2\bar{p} + 1)$ уравнений относительно столбца неизвестных

$$WA = (w_1, \dots, w_{n_a}, \alpha_{0,-\bar{p}}, \alpha_{0,-\bar{p}+1}, \dots, \alpha_{\bar{i},\bar{p}-1}, \alpha_{\bar{i},\bar{p}})^\top.$$

Для того чтобы дополнить эту систему недостающими n_a уравнениями, следует воспользоваться «самосогласованными условиями», которые выражают кинематическую связь — равенство растяжения (или сжатия) j -го привода и поперечного прогиба пластины в точке его расположения. С учётом выбора конечных сумм в (4) можно написать соотношение

$$w_j = \sum_{i=0}^{\bar{i}} \sum_{p=-\bar{p}}^{\bar{p}} \alpha_{i,p} \psi_{i,p}(j),$$

или

$$\sum_{l=1}^{n_a} \delta_{j,l} w_l - \sum_{i=0}^{\bar{i}} \sum_{p=-\bar{p}}^{\bar{p}} \alpha_{i,p} \psi_{i,p}(j) = 0, \quad (12)$$

где $\delta_{j,l}$ — символ Кронекера.

Уравнения (12) и (11) вместе представляют систему $n_a + \bar{l}$ линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных WA .

В матричной форме система имеет вид

$$MA \cdot WA = FD. \quad (13)$$

Матрицу MA и столбец свободных членов FD удобно представить в виде

$$MA = \begin{bmatrix} I_{n_a} & -AP_{n_a \times \bar{l}} \\ KP_{\bar{l} \times n_a} & DL_{\bar{l} \times \bar{l}} \end{bmatrix}, \quad FD = \begin{bmatrix} \Theta_{n_a} \\ FD2_{\bar{l}} \end{bmatrix},$$

где I_{n_a} — единичная матрица размерности n_a ;

$$AP_{n_a \times \bar{l}} = \begin{pmatrix} \psi_{0,-\bar{p}}(1) & \psi_{0,-\bar{p}+1}(1) & \dots & \psi_{\bar{i},\bar{p}-1}(1) & \psi_{\bar{i},\bar{p}}(1) \\ \psi_{0,-\bar{p}}(2) & \psi_{0,-\bar{p}+1}(2) & \dots & \psi_{\bar{i},\bar{p}-1}(2) & \psi_{\bar{i},\bar{p}}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \psi_{0,-\bar{p}}(n_a) & \psi_{0,-\bar{p}+1}(n_a) & \dots & \psi_{\bar{i},\bar{p}-1}(n_a) & \psi_{\bar{i},\bar{p}}(n_a) \end{pmatrix};$$

$$KP_{\bar{l} \times n_a} = \begin{pmatrix} K_1\psi_{0,-\bar{p}}(1) & K_2\psi_{0,-\bar{p}}(2) & \dots & K_{n_a}\psi_{0,-\bar{p}}(n_a) \\ K_1\psi_{0,-\bar{p}+1}(1) & K_2\psi_{0,-\bar{p}+1}(2) & \dots & K_{n_a}\psi_{0,-\bar{p}+1}(n_a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1\psi_{\bar{i},\bar{p}-1}(1) & K_2\psi_{\bar{i},\bar{p}-1}(2) & \dots & K_{n_a}\psi_{\bar{i},\bar{p}-1}(n_a) \\ K_1\psi_{\bar{i},\bar{p}}(1) & K_2\psi_{\bar{i},\bar{p}}(2) & \dots & K_{n_a}\psi_{\bar{i},\bar{p}}(n_a) \end{pmatrix};$$

используя обозначение

$$\Delta_{i0,p0}(i,p) \equiv \delta_{i,i0}\delta_{p,p0} \left(\frac{\lambda_{i,p}}{a}\right)^4 \pi a^2 D,$$

запишем

$$DL_{\bar{l} \times \bar{l}} = \begin{pmatrix} \Delta_{0,-\bar{p}}(0,-\bar{p}) & \Delta_{0,-\bar{p}}(0,-\bar{p}+1) & \dots & \Delta_{0,-\bar{p}}(\bar{i},\bar{p}-1) & \Delta_{0,-\bar{p}}(\bar{i},\bar{p}) \\ \Delta_{0,-\bar{p}+1}(0,-\bar{p}) & \Delta_{0,-\bar{p}+1}(0,-\bar{p}+1) & \dots & \Delta_{0,-\bar{p}+1}(\bar{i},\bar{p}-1) & \Delta_{0,-\bar{p}+1}(\bar{i},\bar{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{\bar{i},\bar{p}-1}(0,-\bar{p}) & \Delta_{\bar{i},\bar{p}-1}(0,-\bar{p}+1) & \dots & \Delta_{\bar{i},\bar{p}-1}(\bar{i},\bar{p}-1) & \Delta_{\bar{i},\bar{p}-1}(\bar{i},\bar{p}) \\ \Delta_{\bar{i},\bar{p}}(0,-\bar{p}) & \Delta_{\bar{i},\bar{p}}(0,-\bar{p}+1) & \dots & \Delta_{\bar{i},\bar{p}}(\bar{i},\bar{p}-1) & \Delta_{\bar{i},\bar{p}}(\bar{i},\bar{p}) \end{pmatrix};$$

Θ_{n_a} — нулевой столбец длины n_a ;

$$FD2_{\bar{l}} = F_0(\psi_{0,-\bar{p}}(j_0), \psi_{0,-\bar{p}+1}(j_0), \dots, \psi_{\bar{i},\bar{p}-1}(j_0), \psi_{\bar{i},\bar{p}}(j_0))^T.$$

Решение системы (13) имеет вид

$$WA = MA^{-1} \cdot FD.$$

4. Сравнение аналитического решения с решением по методу конечных элементов. Для примера рассмотрим пластину и приводы со следующими значениями параметров: $a = 50$ мм, $h = 2,5$ мм, $E = 150$ ГПа, $\nu = 0,3$, $n_a = 31$, $K_j = 2 \cdot 10^7$ Н/м, $F_0 = 400$ Н. Сумма ряда (4) взята до максимальных значений индексов $i = 12$ и $\bar{p} = 15$. План расположения приводов показан на рис. 1, *b*. Единицы измерения по осям — миллиметры. Один привод расположен в центре круглой пластины; другие приводы находятся на одном из трёх колец (не изображены на рисунке) на расстояниях от центра: 14, 28 и 42 мм.

На рис. 2 изображены характерные аналитически рассчитанные функции влияния приводов. По горизонтальным осям указаны номера точек дискретизации. Единицы измерения по вертикальной оси — микрометры.

Для сравнения с решением по МКЭ поставленная задача была смоделирована в системе конечно-элементного анализа ANSYS. Пластина моделировалась объектом типа Surface Body, имеющим заданные толщину и значения физических констант (использовались оболочечные конечные элементы типа SHELL181). Приводы моделировались упругими пружинами, абсолютно жёстко упирающимися в некоторое основание (не показано на рисунке) и расположены согласно выбранному плану. В первом случае численного расчёта они имеют точечный контакт с пластиной, а во втором — контакт через площадки малого радиуса. Сгенерирована конечно-элементная сетка достаточно высокой плотности со сгущением в районе контакта пластины и пружин (во втором случае). На рис. 3 изображён

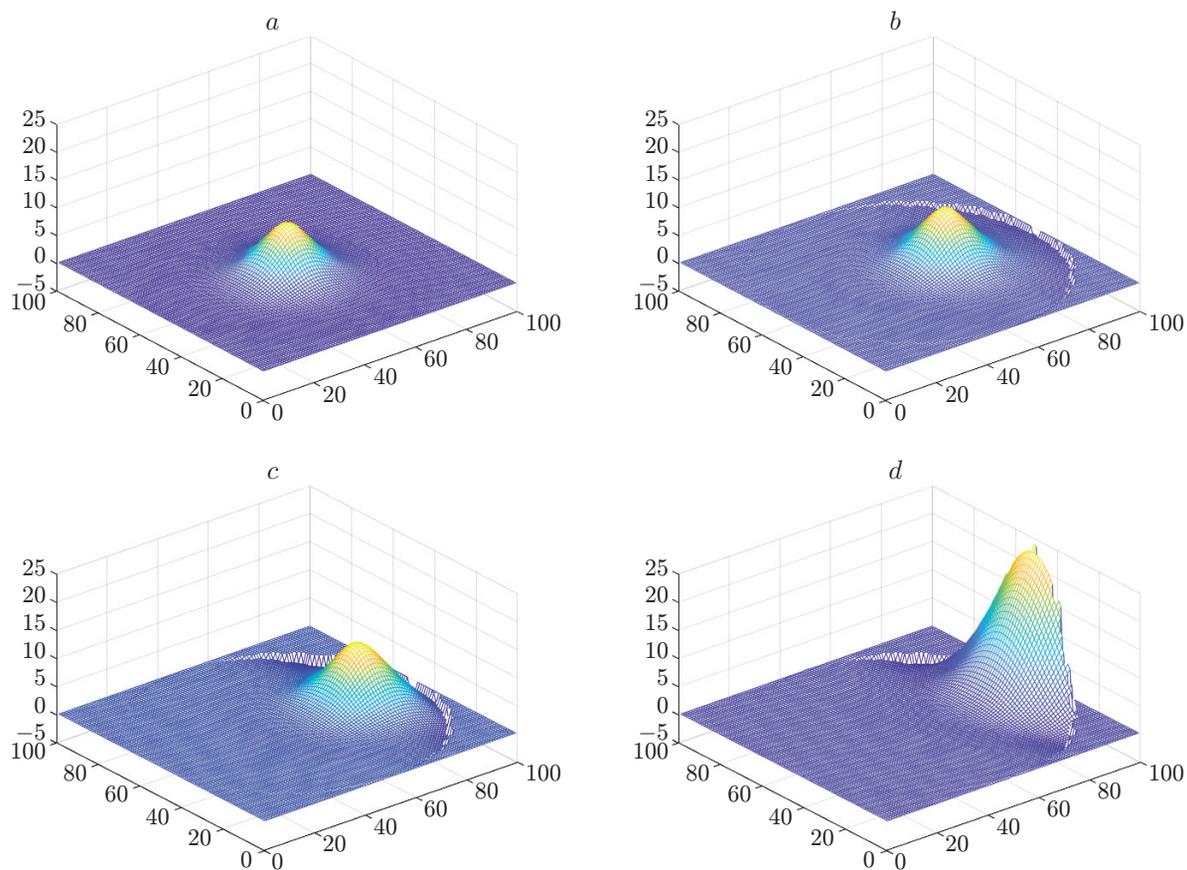


Рис. 2. Характерные функции влияния приводов зеркала: *a* — центральный привод, *b* — привод первого кольца, *c* — привод второго кольца, *d* — привод третьего кольца

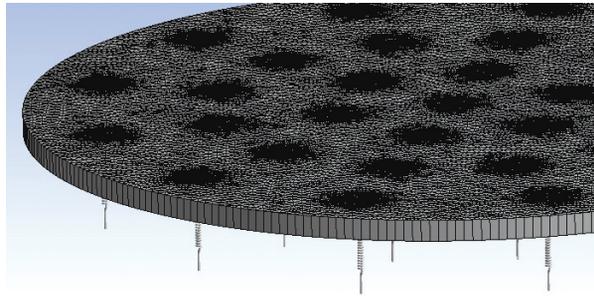


Рис. 3. Фрагмент конечно-элементной модели круглой пластины и приводов в ANSYS

Таблица 1

Привод	СКО _{Analyt} , мкм	СКО _{Delta} , мкм	Уклонение	Отличие
			$\frac{\text{СКО}_{\text{Delta}}}{\text{СКО}_{\text{Analyt}}} \cdot 100 \%$	$\frac{\text{PV}_{\text{Delta}}}{\text{PV}_{\text{Analyt}}} \cdot 100 \%$
Центральный	1,38	0,019	1,4 %	3,5 %
Первого кольца	1,54	0,020	1,3 %	0,6 %
Второго кольца	1,70	0,031	1,8 %	0,6 %
Третьего кольца	3,38	0,027	0,8 %	0,22 %

фрагмент конечно-элементной модели круглой пластины.

В результате расчёта по МКЭ были получены функции влияния характерных приводов. Различие между аналитическим и численным решениями может быть оценено как уклонение — отношение среднеквадратического отклонения (СКО) разности между аналитически и численно рассчитанными профилями к СКО аналитически рассчитанного профиля. В табл. 1 во второй и третьей колонках даны значения СКО профиля прогиба для аналитического решения (СКО_{Analyt}) и для разности между профилями аналитического и численного решений (СКО_{Delta}) соответственно. Для полноты сравнения в последней колонке приведены отличия в размахах профилей PV.

Из четвёртой колонки таблицы видно, что несоответствие между численным и аналитическим решениями составляет примерно 0,8–1,8 %, что можно считать очень хорошим совпадением. Такой результат получился во втором случае, когда при численном моделировании задавался не точечный контакт между концами пружин и пластиной, а контакт по площадке малого радиуса; сетка в районе контакта была более густая. Если же рассматривать первый случай моделирования с точечными контактами, то из-за эффекта сингулярности наблюдается «протыкание» пластины и ошибка в расчёте увеличивается. На рис. 4 на примере функции влияния центрального привода в более крупном по вертикальной оси масштабе приведены отклонения аналитического решения от численного для двух случаев моделирования. Ошибка численного расчёта во втором случае уменьшается более чем в 4 раза.

Близость численного решения при заданном неточечном контакте к аналитически рассчитанной функции влияния свидетельствует о том, что решённая идеализированная задача с высокой точностью описывает реальные функции влияния приводов круглого зеркала с малым, но технически достижимым поперечным размером толкателя. Таким образом, решённая задача позволяет с хорошей точностью моделировать работу деформируемых зеркал в задачах адаптивной оптики, в том числе в различных алгоритмах управления [21, 22]. Добавим к вышесказанному, что разница между аналитическим и численным решениями

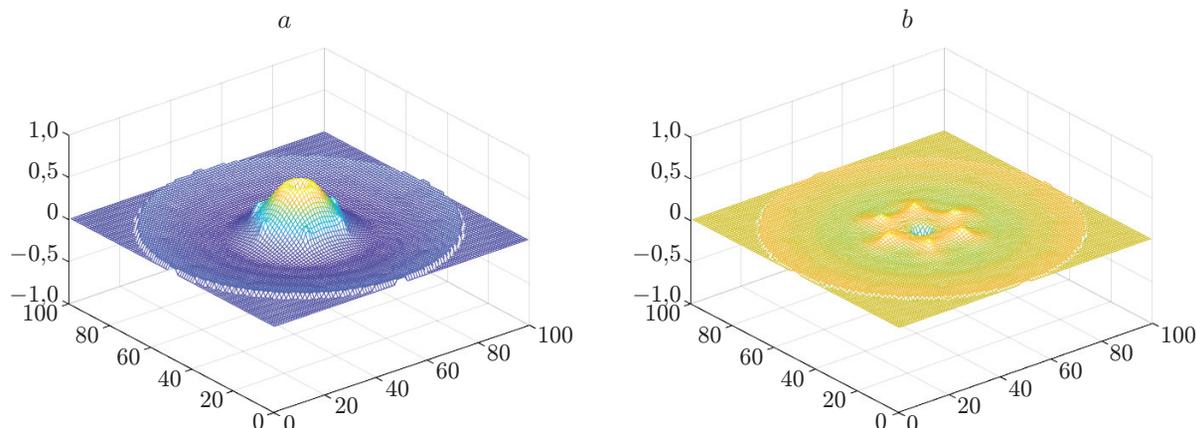


Рис. 4. Отклонение аналитически рассчитанной функции влияния от численно рассчитанной функции влияния (центральный привод): *a* — численное моделирование с точечным контактом; *b* — численное моделирование с контактом через площадку радиусом 1 мм

становится ещё меньше при уменьшении коэффициента Пуассона материала пластины.

5. Обобщение аналитического решения. Для воспроизведения целевой формы волнового фронта оптической поверхностью ДЗ используется суперпозиция функций влияния всех приводов. Предварительно решается задача наилучшей аппроксимации фронта по базису функций влияния. В результате определяются соответствующие электрические напряжения, вызывающие при подаче на приводы внутренние силы на растяжение F_j . Прогиб ДЗ вычисляется суммированием всех функций влияния $w_{\langle j \rangle}$ с соответствующими коэффициентами $A_{\langle j \rangle}$, пропорциональными F_j :

$$M(r, \theta) = \sum_{j=1}^{n_a} A_{\langle j \rangle} w_{\langle j \rangle}(r, \theta). \quad (14)$$

Альтернативно суммированию в расчёте можно сразу получить решение для случая, когда на все приводы подаются напряжения, вызывающие соответствующие внутренние усилия F_j в каждом приводе. Для этого при постановке задачи формулу (3) нужно видоизменить:

$$q(r, \theta) = \sum_{j=1}^{n_a} (F_j - K_j w_j) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j).$$

После преобразований правая часть формулы (11) изменится:

$$\sum_{j=1}^{n_a} K_j \psi_{i_0, p_0}(j) w_j + \sum_{i=0}^{\bar{i}} \sum_{p=-\bar{p}}^{\bar{p}} \delta_{i, i_0} \delta_{p, p_0} \left(\frac{\lambda_{i, p}}{a} \right)^4 \pi a^2 D \alpha_{i, p} = \sum_{j=1}^{n_a} F_j \psi_{i_0, p_0}(j).$$

В формуле (13) поменяется вторая часть столбца свободных членов — $FD2$:

$$FD2_{\bar{i}} = \left(\sum_{j=1}^{n_a} F_j \psi_{0, -\bar{p}}(j), \sum_{j=1}^{n_a} F_j \psi_{0, -\bar{p}+1}(j), \dots, \sum_{j=1}^{n_a} F_j \psi_{0, \bar{p}-1}(j), \sum_{j=1}^{n_a} F_j \psi_{0, \bar{p}}(j) \right)^{\top}.$$

Далее решение определится по тем же формулам, как и для отдельных функций влияния. Таким образом, при необходимости можно сразу рассчитывать профиль поверхности зеркала, рассмотрев общий случай одновременного срабатывания всех приводов.

Заключение. В данной работе получено аналитическое решение задачи прогиба тонкой круглой пластины со свободным краем при сосредоточенном воздействии приводов, деформация которых подчиняется закону Гука. Проверено, что для рассчитанных функций влияния отсутствует «ошибка совместного действия» (*pinning error* [1]). Если жёсткости всех приводов одинаковы и в каждом из них в отдельности развивается одинаковая растягивающая сила, то суперпозиция всех их функций влияния даст прогиб в виде параллельного сдвига пластины на величину, получающуюся из закона Гука для деформации одного привода под действием этой внутренней растягивающей силы.

Несмотря на то что для получения результата в качестве уравнений не использовались условия равновесия, выражающиеся в равенстве нулю суммы сил, а также моментов сил относительно осей x и y , действующих на пластину (см. например, [7, 8]), тем не менее эти соотношения выполняются с высокой точностью. Среди всех рассмотренных случаев в разд. 3 максимальная численная ошибка была менее 0,07 %.

С помощью сравнения с расчётом по МКЭ произведена верификация полученного результата. Показано, что найденное аналитическое решение с хорошей точностью подходит для расчёта функций влияния приводов круглого деформируемого зеркала. При этом контакт должен быть не точечным, а осуществляться через небольшую круглую площадку. В противном случае при проверочном численном расчёте будут получены неверные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tyson R. K.** Principles of Adaptive Optics. Boca Raton — London — New York: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2015. 360 p.
2. **Lemaitre G. R.** Astronomical Optics and Elasticity Theory – Active Optics Methods. Berlin — Heidelberg: Springer, 2009. 575 p.
3. **Ляхов Д. М.** Оптимальное размещение приводов для квадратных зеркал со свободными краями // Автометрия. 2016. **52**, № 1. С. 70–78. DOI: 10.15372/AUT20160109.
4. **Канев Ф. Ю., Лукин В. П.** Адаптивная оптика. Численные и экспериментальные исследования. Томск: Изд-во Ин-та оптики атмосферы СО РАН, 2005. 250 с.
5. **Лавринова Л. Н., Лукин В. П.** Адаптивная коррекция тепловых и турбулентных искажений лазерного излучения деформируемым зеркалом. Томск: Изд-во Ин-та оптики атмосферы СО РАН, 2008. 152 с.
6. **Ellerbroek B. L., Vogel C. R.** Inverse problems in astronomical adaptive optics // Inverse Problems. 2009. **25**, N 6. 063001.
7. **Menikoff A.** Actuator influence functions of active mirrors // Appl. Opt. 1991. **30**, N 7. P. 833–838.
8. **Vdovin G., Soloviev O., Loktev M., Patlan V.** OKO Guide to Adaptive Optics. Delft: Flexible Optical BV, 2013. 174 p.
9. **Hoffman O., Pütsch O., Stollenwerk J., Loosen P.** Model-based analysis of highly dynamic laser beam shaping using deformable mirrors // Procedia CIRP. 2018. **74**. P. 602–606.
10. **Чесноков С. С.** Исследование колебаний и устойчивости пластин методом конечных элементов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1972. 144 с.

11. **Федосеев В. Н., Ягнятинский Д. А.** Прогиб тонкой прямоугольной пластины со свободными краями при сосредоточенных воздействиях // Прикладная математика и механика. 2019. **83**, N 4. С. 653–659.
12. **Hardy J. W.** Adaptive Optics for Astronomical Telescopes. New York — Oxford: Oxford University Press, 1998. 438 p.
13. **Handbook of optics.** New York: McGraw-Hill, 2010. Vol. V. 1280 p.
14. **Никифоров В. Г.** Многослойные пьезоэлектрические актюаторы: теория и практика. М.: ОАО “НИИ “ЭЛПА”, 2010. 68 с.
15. **Лурье А. И.** Некоторые задачи об изгибе круглой пластинки // Прикладная математика и механика. 1940. **IV**, вып. I. С. 93–102.
16. **Bassali W. A.** The transverse flexure of thin elastic plates supported at several points // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1957. **53**, Iss. 3. P. 728–743.
17. **Галиньш А. К., Гурьянов Н. Г.** Изгиб круглой пластины под действием локальной нагрузки // Теория пластин и оболочек. 1971. Вып. 1. С. 144–151.
18. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М: Наука, 1966. 636 с.
19. **Itao K., Crandall S. H.** Natural modes and natural frequencies of uniform, circular, free-edge plates // Journ. Appl. Mechanics. 1979. **46**. P. 448–453.
20. **Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.** Table of Integrals, Series, and Products. Amsterdam: Academic Press, 2007. 1171 p.
21. **Боршевников А. Н., Дементьев Д. А., Леонов Е. В. и др.** Управление адаптивной оптической системой с деформируемыми зеркалами низкого и высокого пространственных разрешений // Автометрия. 2018. **54**, № 3. С. 119–125. DOI: 10.15372/AUT20180315.
22. **Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И.** Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 336 с.

Поступила в редакцию 13.08.2020

После доработки 11.09.2020

Принята к публикации 09.11.2020
