УДК 621.391.01

ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПРОТЯЖЁННЫХ ОБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЁННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

© **В. М. Артюшенко[1], В. И. Волович[2]**

[1]*Технологический университет,*
141070, г. Королёв Московской обл., ул. Гагарина, 42
[2]*Поволжский государственный университет сервиса,*
445017, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4
E-mail: artuschenko@mail.ru
volovach.vi@mail.ru

Рассмотрена и проанализирована оценка параметра масштаба обобщённой плотности распределения вероятностей Вейбулла по критерию минимума условного риска. Получены оптимальные оценки интенсивности огибающей отражённых от протяжённых объектов сигналов при условии, что интервалы в движении названных объектов являются независимыми случайными величинами. Проведено сравнение названных оценок с наилучшей несмещённой оценкой при различных функциях потерь. Показано, что сходимость риска наилучшей несмещённой оценки с риском оптимальной оценки для функции потерь, равной модулю ошибки, более быстрая по сравнению с квадратичной функцией потерь. Отмечается, что оптимальные оценки для инвариантной и степенно́й функций потерь совпадают. Получены нижние и верхние ε-доверительные границы и определены условия, при которых данные оценки соответствуют оцениванию параметра распределения Вейбулла.

Ключевые слова: плотность распределения вероятностей, протяжённый объект, огибающая отражённого сигнала, критерий минимума условного риска, оценка параметра распределения.

DOI: 10.15372/AUT20200307

Введение. Во многих прикладных задачах значительный интерес представляет определение величины интенсивности случайных потоков, интервалы между событиями в которых являются независимыми случайными величинами. В частности, такая задача актуальна для систем автоматизированного регулирования скорости движения железнодорожных отцепов [1, 2], связанная с определением интенсивности движения последних при их скатывании на сортировочной горке. Отметим, что обычно интенсивность движения на сортировочной горке определяется на основе интервалов между сигналами, отражёнными от отцепов при заполнении подгорочных путей, поступающих от радиолокационных измерителей скорости [3].

Проведённые исследования показывают, что сигнал, отражённый от отцепа (протяжённого объекта), хорошо описывается многолучевой моделью [4, 5] и имеет вид амплитудно-модулированного колебания. При этом глубина модуляции сигнала изменяется в больших пределах и может достигать 100 % [6, 7].

Для определения вероятностных характеристик интенсивности интервалов между скатывающимися по сортировочной горке отцепами более удобно использовать не сам отражённый сигнал, а его огибающую $U(t)$. В этом случае при статистической обработке экспериментальных данных огибающей отражённого от протяжённого объекта сигнала для описания вероятностных моделей можно использовать так называемый обобщённый закон

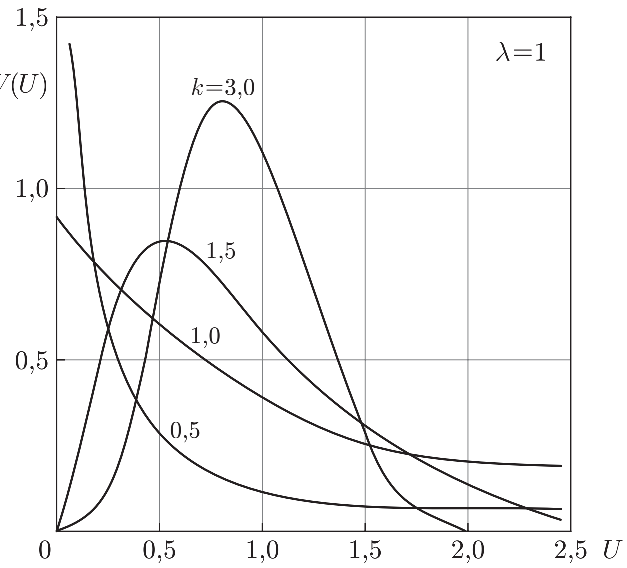

Рис. 1. Плотность распределения вероятности Вейбулла для различных значений k

распределения Вейбулла:

$$W_\theta(U_i) = \begin{cases} \Gamma(\gamma_i)^{-1}(\theta\mu_i)^{\lambda\gamma_i}\lambda U_i^{\lambda\gamma_i}\mathbf{e}^{-(\theta\mu_i U_i)^\lambda}, & U_i \geqslant 0; \\ 0, & U_i < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mu_i = \Gamma(\gamma_i + \lambda^{-1})/\Gamma(\gamma_i)$; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; $\lambda > 0$, $\gamma_i > 0$ — известные константы, параметры распределения; $\theta > 0$ — параметр масштаба; U_i — полезный сигнал, отражённый от i-го протяжённого объекта.

Заметим, что при $\gamma_i = 1$ распределение (1) переходит в плотности распределения вероятностей (ПРВ) Вейбулла с параметром масштаба λ (рис. 1) [8]:

$$W(U) = \begin{cases} (k/\lambda)(U/\lambda)^{k-1}\mathbf{e}^{(-U/\lambda)^k}, & U \geqslant 0; \\ 0, & U < 0, \end{cases}$$

где $k > 0$ — параметр распределения, характеризующий форму ПРВ.

При $\lambda = 1$ распределение (1) переходит в гамма-распределение с γ_i степенями свободы.

Целью данной работы является определение величины интенсивности движения протяжённых объектов с помощью обобщённого распределения Вейбулла в условиях, когда интервалы в движении названных объектов представляют собой независимые случайные величины.

Рассмотрим и проанализируем оптимальное оценивание параметра масштаба θ обобщённой ПРВ Вейбулла (1).

Точечное оценивание. Пусть наблюдению доступно n независимых неотрицательных случайных величин U_i, $i = \overline{1,n}$, имеющих условную при фиксированном значении параметра θ ПРВ, в свою очередь, описывающуюся выражением (1). Необходимо оценить неизвестный параметр $\theta > 0$ относительно меры Лебега на прямой [8].

Примем, что $U_{s.1}, \ldots, U_{s.n}$ — интервалы между событиями некоторого случайного потока U_s, где $U_{s.i}$ — огибающая сигнала, отражённого от i-го протяжённого объекта. Тогда задача состоит в оценке интенсивности этого потока по наблюдению интервалов времени между событиями, поскольку $M_\theta U_{s.i} = \theta^{-1}$, где M_θ — символ математического ожидания, соответствующего ПРВ $W_\theta(U^n) = \sum_{i=1}^n W_\theta(U_i)$, где $W_\theta(U_i)$ определено выражением (1).

Введём оценку параметра θ: $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(U^n)$, полученную после наблюдения выборки $U^n = (U_1, \ldots, U_n)$, где $U_1, \ldots, U_n$ — наблюдаемые значения $U_{s.i}$.

Считаем, что функция потерь имеет вид

$$f_n(\hat{\theta}_n, \theta) = g_n(\hat{\theta}_n/\theta - 1), \tag{2}$$

т. е. к масштабным преобразованиям она является инвариантной.

Введём условный риск оценки параметра θ:

$$r_\theta(\hat{\theta}_n) = M_\theta f_n(\hat{\theta}_n, \theta).$$

Необходимо найти такую оценку $\hat{\theta}_n^0$, которая минимизирует $r_\theta(\hat{\theta}_n)$ равномерно по параметру $\theta > 0$. Однако, учитывая, что в классе всевозможных оценок такой оценки не существует, нужно сузить класс рассматриваемых оценок.

В качестве предварительных оценок рассмотрим класс оценок Ψ, удовлетворяющих свойству

$$\hat{\theta}_n(U^n c) = \hat{\theta}_n(U^n)/c \tag{3}$$

для всех $c > 0$; $cU^n = (cU_1, \ldots, cU_n)$.

В классе оценок Ψ может существовать оптимальная оценка.

С учётом выражений (1)–(3) запишем

$$r_\theta(\hat{\theta}_n) = M_\theta g_n[\hat{\theta}_n(\theta U^n) - 1] = M_1 g_n[\hat{\theta}_n(U^n) - 1] = r_1(\hat{\theta}_n), \qquad \hat{\theta}_n \in \Psi.$$

Следовательно,

$$r_\theta(\hat{\theta}_n^0) = \inf_{\hat{\theta}_n \in \Psi} r_1(\hat{\theta}_n), \qquad \theta > 0, \tag{4}$$

где inf — знак, обозначающий внутреннюю точку множества.

Из выражения (4) следует, что для существования в классе Ψ оптимальной оценки достаточно, чтобы в Ψ была хотя бы одна такая оценка $\hat{\theta}_n$, для которой выполнялось неравенство

$$r_1(\hat{\theta}_n) < \infty.$$

Как известно [9], оценки, имеющие постоянный условный риск, принято называть эквивариантными, поэтому при инвариантной функции потерь (2) лучшая оценка является лучшей эквивариантной оценкой.

Заметим, что оптимальная оценка может существовать не только при инвариантных функциях потерь (2), но и при функции потерь, имеющей следующий вид:

$$f_n(\hat{\theta}_n, \theta) = A_n|\hat{\theta}_n - \theta|^\alpha/\theta^{\alpha-\beta} + c_n, \qquad \alpha > 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad 0 < A_n < \infty, \quad 0 \leqslant c_n < \infty. \tag{5}$$

Воспользовавшись выражениями (4) и (5), можно убедиться, что

$$r_\theta(\hat{\theta}_n) = A_n\theta^\beta M_1|\hat{\theta}_n(U^n) - 1|^\alpha + c_n = \theta^\beta r_1(\hat{\theta}_n) + c_n(1 - \theta^\beta), \qquad \hat{\theta}_n \in \Psi.$$

Следовательно,

$$\hat{\theta}_n^0(U^n) = \arg \inf_{\hat{\theta}_n \in \Psi} r_1(\hat{\theta}_n). \tag{6}$$

Таким образом, при функции потерь (5) оценка, оптимальная в классе Ψ, совпадает с оптимальной эквивариантной оценкой при функции потерь

$$f_n(\hat{\theta}_n, \theta) = A_n|\hat{\theta}_n - \theta|^\alpha/\theta^\alpha + c_n,$$

соответствующей, в свою очередь, (5) при $\beta = 0$.

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем полагать, что $A_n = 1$, $c_n = 0$.

Введём априорное несобственное распределение θ с ПРВ $W_0^{(\beta)}(\theta) = \theta^{-(\beta+1)}$. Для произвольной инвариантной функции потерь (2), частным случаем которой является (5) при $\beta = 0$, необходимо использовать $W_0^{(\beta)}(\theta) = \theta^{-1}$ [10].

С учётом (1) и независимости наблюдений n априорная ПРВ θ в этом случае будет определяться равенством

$$W_0^{(\beta)}(\theta) = \frac{\lambda y_n^{\vartheta_n-\beta/\lambda}\theta^{\lambda\vartheta_n-\beta-1}\mathbf{e}^{-\theta^\lambda y_n}}{\Gamma(\vartheta_n - \beta/\lambda)}, \qquad \theta > 0, \tag{7}$$

где $\vartheta_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i > \alpha/\lambda$; $y_n = \sum_{i=1}^n (\mu_i U_i)^\lambda$.

Тогда, как следует из [10], условный риск может быть найден из выражения

$$r_\theta(\hat{\theta}_n) = \theta^\beta \mathbf{M}_1 R_n^{(\beta)}(\hat{\theta}_n, Y_n), \qquad \hat{\theta}_n \in \Psi, \tag{8}$$

где $Y_n = \sum_{i=1}^n (\mu_i U_{s.i})^\lambda$;

$$R_n^{(\beta)}(\hat{\theta}_n, Y_n) = \int\limits_0^\infty |\hat{\theta}_n - \theta|^\alpha \theta^{\beta-\alpha} W_0^{(\beta)}(\theta) d\theta \tag{9}$$

— функция апостериорного риска, причём при $\beta = 0$ она не зависит от наблюдения [10].

Таким образом, оптимальная оценка (6) будет определяться, исходя из условия

$$R_n^{(\beta)}(\hat{\theta}_n^0, y_n) = \inf_{z>0} R_n^{(\beta)}(z, y_n). \tag{10}$$

Рассмотрим и проанализируем различные функции потерь.

Квадратичная функция потерь. Если функция потерь имеет вид

$$f_n(\hat{\theta}_n, \theta) = (\hat{\theta}_n - \theta)^2, \tag{11}$$

то из (9)–(11) следует, что оптимальная оценка (в смысле (6)) при $\beta = 2$ совпадает с апостериорным средним ПРВ (7).

Используя выражение (7) и сделав замену переменных $\theta^\lambda = q$, нетрудно видеть, что m-й момент ПРВ (7) будет иметь вид

$$\nu_m^{(\beta)}(y_n) = \frac{\Gamma(\vartheta_n - (\beta - m)/\lambda) y_n^{-m/\lambda}}{\Gamma(\vartheta_n - \beta/\lambda)}. \tag{12}$$

Полагая в (12) $\beta = 2$, $m = 1$, получим

$$\hat{\theta}_n^0(y_n) = \frac{\Gamma(\vartheta_n - 1/\lambda) y_n^{-1/\lambda}}{\Gamma(\vartheta_n - 2/\lambda)}. \tag{13}$$

Воспользовавшись выражениями (12) и (13), можно показать, что апостериорный риск оценки $\hat{\theta}_n^0$ будет равен

$$R_n^{(2)}(\hat{\theta}_n^0, y_n) = \frac{[\Gamma(\vartheta_n)\Gamma(\vartheta_n - 2/\lambda) - \Gamma^2(\vartheta_n - 1/\lambda)]y_n^{-2/\lambda}}{\Gamma^2(\vartheta_n - 2/\lambda)}. \qquad (14)$$

Очевидно, что статистика Y_n имеет гамма-распределение с параметрами $(\theta^\lambda, \vartheta_n)$:

$$W_\theta(y_n) = \Gamma(\vartheta_n)^{-1}\theta^{\lambda\vartheta_n} y_n^{\vartheta_n - 1}\mathbf{e}^{-\theta^\lambda y_n}, \qquad y_n \quad \geqslant 0. \qquad (15)$$

Используя выражения (8), (13)–(15), получим

$$M_\theta\hat{\theta}_n^0(Y_n) = \frac{\Gamma^2(\vartheta_n - 1/\lambda)\theta}{\Gamma(\vartheta_n)\Gamma(\vartheta_n - 2/\lambda)}, \qquad (16)$$

$$r_\theta(\hat{\theta}_n^0) = \theta^2\Big[1 - \frac{\Gamma^2(\vartheta_n - 1/\lambda)}{\Gamma(\vartheta_n)\Gamma(\vartheta_n - 2/\lambda)}\Big]. \qquad (17)$$

Причём $\vartheta_n > 2/\lambda$ — условие существования оптимальной оценки.

Из выражений (13) и (16) следует, что несмещённая оценка имеет вид

$$\theta_n^*(y_n) = \frac{\Gamma(\vartheta_n/\lambda)y_n^{-1/\lambda}}{\Gamma(\vartheta_n - 1/\lambda)}. \qquad (18)$$

Если Y_n является достаточной статистикой для семейства ПРВ $\{W_\theta(U^n)\}$, порождённых (1), и семейство (15) полное согласно [9], то оценка (18) в классе несмещённых оценок оказывается оптимальной [9, 11]. Её риск можно определить из выражения

$$r_\theta(\theta_n^*) = \theta^2\Big[\frac{\Gamma(\vartheta_n)\Gamma(\vartheta_n - 2/\lambda)}{\Gamma^2(\vartheta_n - 1/\lambda)} - 1\Big]. \qquad (19)$$

Риск (19) равномерно при $\theta > 0$ больше риска (17) оптимальной оценки (13). Следовательно, в классе всевозможных оценок наилучшая несмещённая оценка (18) недопустима. Любая оценка, отличная от оценки (13), недопустима в классе Ψ. Однако с увеличением ϑ_n риск (19) стремится к риску (18).

На рис. 2, *a* представлена зависимость относительного различия рисков

$$\Delta(\vartheta_n, \lambda) = \frac{r_\theta(\theta_n^*) - r_\theta(\hat{\theta}_n^0)}{r_\theta(\theta_n^*)} \qquad (20)$$

от ϑ_n при $\lambda = 5$.

Из приведённых зависимостей видно, что при $\vartheta_n \leqslant 20$ эффективность оценки (13) по сравнению с оценкой (18) достаточно высокая. С увеличением $\vartheta_n > 20$ сходимость риска оценки (20) с риском оптимальной оценки (13) становится очень медленной.

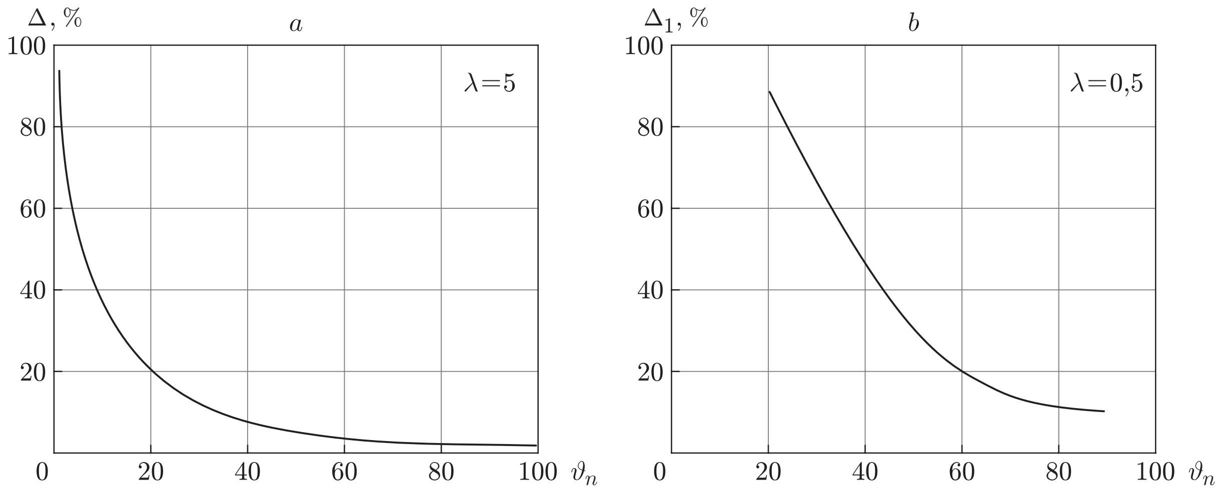

Рис. 2. Зависимости относительного различия рисков Δ от величины ϑ_n для: a — Δ; b — Δ_1

Функция потерь, равная модулю ошибки. Пусть функция потерь

$$f_n(\hat{\theta}_n, \theta) = |\hat{\theta}_n - \theta|.$$

Воспользовавшись выражениями (9) и (10), можно показать, что оптимальной оценкой является медиана апостериорной ПРВ (7), где $\beta = 1$, т. е.

$$\Pi_n(\hat{\theta}_n^0) = \int\limits_0^{\hat{\theta}_n^0} W_n^{(1)}(\theta)\, d\theta = 0{,}5. \tag{21}$$

Используя (7) ($\beta = 1$) и сделав замену переменных $\theta^\lambda = q$, получим

$$\Pi_n(z) = \frac{1}{\Gamma(\vartheta_n - 1/\lambda)}\, z^\lambda \int\limits_0^{y_n} q^{\vartheta_n - 1/\lambda - 1} \mathbf{e}^{-q}\, dq = G_{2(\vartheta_n - 1/\lambda)}(2z^\lambda y_n), \tag{22}$$

где $G_a = \Gamma^{-1}(a/2) \int\limits_0^q \beta^{a/2-1} \mathbf{e}^{-\beta/2}\, d\beta/2^{a/2}$ — функция гамма-распределения с a-степенями свободы.

Из выражений (21) и (22) находим

$$\hat{\theta}_n^0(y_n) = \left\{ \frac{g_{0,5}[2(\vartheta_n - 1/\lambda)]}{2y_n} \right\}^{1/\lambda}, \tag{23}$$

где $g_\varepsilon(a)$ — ε-квантиль гамма-распределения с a-степенями свободы.

Можно показать, что апостериорный риск оценки (23) будет определяться выражением

$$R_n^{(1)}(\hat{\theta}_n^0, y_n) = \frac{\Gamma(\vartheta_n) y_n^{-1/\lambda} [1 - G_{2\vartheta_n}\{g_{0,5}[2(\vartheta_n - 1/\lambda)]\}]}{\Gamma(\vartheta_n - 1/\lambda)}. \tag{24}$$

Воспользовавшись (15), будем полагать, что

$$M_\theta Y_n^{-\alpha/\lambda} = \frac{\theta^\alpha \Gamma^2(\vartheta_n - \alpha/\lambda)}{\Gamma(\vartheta_n)}. \tag{25}$$

С учётом выражений (23)–(25) запишем:

$$M_\theta \hat{\theta}_n^0(Y_n) = \frac{\theta g_{0,5}^{1/\lambda}[2(\vartheta_n - 1/\lambda)]\Gamma(\vartheta_n - 1/\lambda)}{\Gamma(\vartheta_n)},$$

$$r_\theta(\hat{\theta}_n^0) = \theta[1 - G_{2\vartheta_n}\{g_{0,5}[2(\vartheta_n - 1/\lambda)]\}]. \tag{26}$$

Таким образом, из вышепроведённых вычислений видно, что оптимальная оценка (23), как и (13), смещённая. В данном случае апостериорное среднее, как это следует из выражения (12) при $\beta = 1$, $m = 1$ совпадает с лучшей несмещённой оценкой (18). Следовательно, она оказывается равномерно хуже оценки (23). Однако при увеличении ϑ_n различия между рисками этих оценок стираются.

Произведём оценку эффективности оптимальной оценки (23) по сравнению с лучшей несмещённой оценкой (18) при конечных значениях ϑ_n.

Риск оценки (18) будет равен:

$$r_\theta(\theta_n^*) = 2\theta[G_{2(\vartheta_n - 1/\lambda)}(\rho_n) - G_{2\vartheta_n}(\rho_n)], \tag{27}$$

где $\rho_n = 2[\Gamma(\vartheta_n)/\Gamma(\vartheta_n - 1/\lambda)]^\lambda$.

Определим эффективность, как и ранее, с помощью соотношения (20), обозначив её как Δ_1.

Воспользовавшись выражениями (26) и (27), найдём значения Δ_1 в зависимости от λ и ϑ_n. Зависимость $\Delta_1 = f(\vartheta_n)$ при $\lambda = 0{,}5$ приведена на рис. 2, *b*. Из представленной зависимости видно, что в отличие от квадратичной функции потерь в данном случае сходимость риска наилучшей несмещённой оценки (18) к риску оптимальной оценки очень быстрая. Например, если $\gamma_i = 1$, $i = \overline{1, n}$, то для достижения относительного различия в рисках менее 10 % требуется всего лишь 6 наблюдений ($n \geqslant 3$), в то время как при квадратурных потерях требуется 50 наблюдений.

Инвариантная функция потерь. Если функция потерь инвариантна к масштабным преобразованиям (см. выражение (2)), то в соответствии с вышеизложенным в качестве апостериорной ПРВ необходимо выбрать ПРВ (7), полагая $\beta = 0$.

Оптимальная оценка в классе оценок (3) является эквивариантной, т. е.

$$r_\theta(\hat{\theta}_n^0) = \text{const}, \qquad \theta > 0.$$

При соблюдении равенства

$$g_n(|\hat{\theta}_n - \theta|/\theta) = \theta^{-\alpha}|\hat{\theta}_n - \theta|^\alpha \tag{28}$$

оптимальные оценки будут такими же, что и при степенно́й функции потерь $|\hat{\theta}_n - \theta|^\alpha$ [10]. Например, при $\alpha = 1$ в выражении (28) оптимальная оценка будет определяться выражением (23), а при $\alpha = 2$ — выражением (13).

Можно показать, что апостериорные риски оценок (23) и (11) при этом не зависят от наблюдений. Они совпадают с условными рисками и будут определяться следующими соотношениями:

$$R_n^{(1)}(\hat{\theta}_n^0) = r_\theta^{(1)}(\hat{\theta}_n^0) = [1 - G_{2\vartheta_n}\{g_{0,5}[2(\vartheta_n - 1/\lambda)]\}];$$

$$R_n^{(2)}(\hat{\theta}_n^0) = r_\theta^{(2)}(\hat{\theta}_n^0) = \Big[1 - \frac{\Gamma^2(\vartheta_n - 1/\lambda)}{\Gamma(\vartheta_n)\Gamma(\vartheta_n - 2/\lambda)}\Big]. \tag{29}$$

Доверительное оценивание. Так как Y_n — полная достаточная статистика [9], то из [10] следует, что нижняя $\theta^0_{\text{н}.n}$ и верхняя $\theta^0_{\text{в}.n}$ ε-доверительные границы могут быть найдены соответственно из равенств:

$$\int\limits_{\theta^0_{\text{н}.n}}^{\infty} W_n^{(0)}(\theta)\, d\theta = \varepsilon, \qquad \int\limits_{0}^{\theta^0_{\text{в}.n}} W_n^{(0)}(\theta)\, d\theta = \varepsilon.$$

Используя выражения (7) и (29) и полагая $\beta = 0$, получим

$$G_{2\vartheta_n}(2(\theta^0_{\text{н}.n})^\lambda y_n) = 1 - \varepsilon, \qquad G_{2\vartheta_n}(2(\theta^0_{\text{в}.n})^\lambda y_n) = 1 - \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\theta^0_{\text{н}.n} = \Big[\frac{g_{1-\varepsilon}(2\vartheta_n)}{2y_n}\Big]^{1/\lambda}; \qquad \theta^0_{\text{в}.n} = \Big[\frac{g_{\varepsilon}(2\vartheta_n)}{2y_n}\Big]^{1/\lambda}. \tag{30}$$

Учитывая, что совместное распределение независимых случайных величин $U_{s.1}, \ldots, U_{s.n}$ с ПРВ, описывающихся выражением (3), имеет относительно статистик Y_n монотонное отношение правдоподобия. Используя результаты [12], можно показать, что оценки (30) являются равномерно наиболее точными доверительными границами уровня ε. В свою очередь, это означает, что они оптимальные в смысле [12]:

$$r_\theta(\theta^0_{\text{н}.n}) = M_\theta g_n^{(1)}(\theta^0_{\text{н}.n}, \theta) = \inf_{\theta_{\text{н}.n}} M_\theta g_n^{(1)}(\theta_{\text{н}.n}, \theta), \qquad \theta > 0;$$

$$r_\theta(\theta^0_{\text{в}.n}) = M_\theta g_n^{(2)}(\theta^0_{\text{в}.n}, \theta) = \inf_{\theta_{\text{в}.n}} M_\theta g_n^{(2)}(\theta_{\text{в}.n}, \theta), \qquad \theta > 0,$$

где функция $g_n^{(1)}(\theta^0_{\text{н}.n}, \theta) = 0$ при $\theta_{\text{н}.n} \geqslant \theta$ и не возрастает по $\theta_{\text{н}.n}$ в области $\theta_{\text{н}.n} < 0$; $g_n^{(2)}(\theta_{\text{в}.n}, \theta) = 0$ при $\theta_{\text{в}.n} \leqslant 0$ и не убывает по $\theta_{\text{в}.n}$ в области $\theta_{\text{в}.n} > 0$, а инфимумы $\inf_{(\cdot)}$ выбирают по классам всевозможных оценок, удовлетворяющих соответственно условиям

$$P_\theta(\theta_{\text{н}.n}(U^n) < \theta) \geqslant \varepsilon; \qquad P_\theta(\theta_{\text{в}.n}(U^n) < \theta) \geqslant \varepsilon.$$

Таким образом, найденные с помощью байесовского формализма ε-доверительные границы оказываются оптимальными при весьма общих функциях потерь, причём необязательно удовлетворяющих свойствам, описанным выражениями (2) и (5), в классах всевозможных оценок уровней, не меньших ε.

В качестве функций $g_n^{(1)}(\cdot)$, $g_n^{(2)}(\cdot)$ целесообразно выбрать:

$$g_n^{(1)}(\theta_{\text{н}.n}, \theta) = \begin{cases} g_n(\theta - \theta_{\text{н}.n}), & \theta_{\text{н}.n} < \theta; \\ 0, & \theta_{\text{н}.n} \geqslant \theta, \end{cases} \qquad g_n^{(2)}(\theta_{\text{в}.n}, \theta) = \begin{cases} g_n(\theta_{\text{в}.n} - \theta), & \theta_{\text{в}.n} > \theta; \\ 0, & \theta_{\text{в}.n} \leqslant \theta, \end{cases}$$

где $g_n(y)$ — некоторая убывающая функция y.

При этом, если $g_n(y) = y$, то риски $r_\theta(\theta^0_{\text{н}.n})$ и $r_\theta(\theta^0_{\text{в}.n})$ будут равны соответственно ошибкам недооценивания и переоценивания, которые определяются следующими соотношениями:

$$r_\theta(\theta^0_{\text{н}.n}) = \theta\Big\{\varepsilon - \Gamma\Big(\vartheta_n - \frac{1}{\lambda}\Big) g^{1/\lambda}_{1-\varepsilon}(2\vartheta_n) \frac{[1 - G_{2(\vartheta_n - 1/\lambda)}\{2g_{1-\varepsilon}2(\vartheta_n)\}]}{\Gamma(\vartheta_n)}\Big\},$$

$$r_\theta(\theta^0_{\text{в}.n}) = \theta\Big\{\Gamma\Big(\vartheta_n - \frac{1}{\lambda}\Big) g^{1/\lambda}_{\varepsilon}(2\vartheta_n) \frac{[G_{2(\vartheta_n - 1/\lambda)}\{2g_{\varepsilon}2(\vartheta_n)\}}{\Gamma(\vartheta_n) - \varepsilon}\Big\}.$$

В частном случае, если $\gamma_i = 1$, $i = \overline{1, n}$, то вышеполученные оценки будут соответствовать оцениванию параметра ПРВ Вейбулла. Если при этом $\lambda = 1$, то полученные оценки будут являться оптимальными оценками интенсивности пуассоновского потока.

Заключение. Показано, что для описания вероятностных характеристик интенсивности движения протяжённых объектов может быть использован обобщённый закон распределения Вейбулла. Произведено оптимальное оценивание параметра масштаба обобщённой плотности распределения вероятностей Вейбулла по критерию минимума условного риска. Получены оптимальные оценки интенсивности неоднородного процесса (огибающей отражённого от протяжённого объекта сигнала) с обобщённым распределением Вейбулла интервалов времени между событиями (интервалов между появлением на входе измерителя скорости огибающих сигналов, отражённых от протяжённых объектов), включая определение эквивариантных оценок для инвариантных функций потерь. Проведён их сравнительный анализ с наилучшей несмещённой оценкой при различных функциях потерь: квадратичной, равной модулю ошибки, инвариантной, а также при доверительном оценивании. Определён условный риск оценки параметра масштаба и условия его минимизации, включая случай использования функции апостериорного риска. Показано, что оптимальная оценка параметра для квадратичной функции потерь и функции потерь, равной модулю ошибки, является смещённой. Вместе с тем для функции потерь, равной модулю ошибки, сходимость риска наилучшей несмещённой оценки с риском оптимальной оценки более быстрая по сравнению с квадратичной функцией потерь, что приводит к значительному уменьшению числа наблюдений. Для инвариантной и степенно́й функций потерь оптимальные оценки совпадают. Получены нижние и верхние ε-доверительные границы, которые оказываются оптимальными при весьма общих функциях потерь; определены условия, при которых полученные оценки соответствуют оцениванию параметра распределения Вейбулла. Отмечается, что рассмотренная задача имеет широкий спектр практических приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лисенков В. М.** Статистическая теория безопасности движения поездов. М.: ВИНИТИ РАН, 1999. 332 с.
2. **Борцев А. В., Штенгель Ю. Ю.** Развитие системы регулирования скорости движения отцепов на сортировочных горках российских железных дорог // Наука и образование транспорту. 2013. № 1. С. 158–161.

3. **Артюшенко В. М.** Исследования и разработка радиолокационного измерителя параметров движения протяжённых объектов. М.: ФГБОУ ВПО ФТА, 2013. 214 с.
4. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Модели плотности распределения вероятности и статистические характеристики сигнала, отражённого от протяжённого объекта // Электротехнические и информационные системы и комплексы. 2018. **14**, № 2. С. 79–88.
5. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Сравнительная оценка параметров распределения Накагами, полученная методами моментов и максимального правдоподобия // Автометрия. 2019. **55**, № 3. С. 31–37. DOI: 10.15372/AUT20190304.
6. **Островитянов Р. В., Басалов Ф. А.** Статистическая теория радиолокации протяжённых целей. М.: Радио и связь, 1982. 232 с.
7. **Тихонов В. И., Кульман Н. К.** Нелинейная фильтрация и квазиоптимальный приём сигналов. М.: Сов. радио, 1975. 704 с.
8. **Кокс Д., Льюис П.** Статистический анализ последовательностей событий. М.: Мир, 1969. 312 с.
9. **Закс Ш.** Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975. 776 с.
10. **Тартаковский А. Г.** Об оптимальном оценивании параметров масштабного типа // Проблемы передачи информации. 1986. **22**, Вып. 3. С. 77–87.
11. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы. М.: Наука, 1968. 548 с.
12. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979. 408 с.

Поступила в редакцию 31.07.2019
После доработки 28.10.2019
Принята к публикации 06.11.2019