УДК 519.24

ВЛИЯНИЕ ОКРУГЛЕНИЯ НА СВОЙСТВА КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

© **Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко**

Новосибирский государственный технический университет,
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru

Приводятся результаты численных исследований влияния ошибок округления на распределения статистик критериев проверки статистических гипотез. Исследуется влияние округления на распределения статистик различных критериев согласия и критериев однородности. Показано, что при соизмеримости ошибок округления в анализируемых выборках со среднеквадратическим отклонением ошибок измерений распределения статистик критериев могут существенно изменяться. В таких условиях применение критериев в системах обработки данных с использованием классических результатов может приводить к неверным выводам. Предлагаются рекомендации по решению данной проблемы.

Ключевые слова: критерии согласия, критерии однородности, статистика критерия, распределение статистики, ошибки округления.

DOI: 10.15372/AUT20200305

Введение. При анализе результатов измерений, поступающих из различных источников, для принятия решения о неизменности или, наоборот, об изменении ранее наблюдаемых закономерностей в системах обработки данных нередко используются статистические методы. В этих целях могут применяться различные критерии проверки статистических гипотез.

Любые измерения сопровождаются погрешностью округления, зависящей от разрешающей способности измерительной системы, в том числе от характеристик используемых датчиков и аналого-цифровых преобразователей. Очевидно, что наличие округления отражается на результатах применения статистических методов, и в некоторых ситуациях влияние таких ошибок может приводить к неверным статистическим выводам.

О возможности появления проблем при применении критериев нормальности, являющихся следствием округления, отмечалось в [1]. В работах [2, 3] на примерах критериев проверки гипотез о равенстве математического ожидания и дисперсии номинальным значениям, а также критериев Стьюдента об однородности средних и Фишера об однородности дисперсий двух выборок показано влияние ошибок округления на реальный уровень значимости, кроме того, отмечено, что с их увеличением снижается мощность критериев. В [4] при анализе множества выборок с повторяющимися наблюдениями отмечено, что в такой ситуации критические значения распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез относительно обобщённого распределения Парето отличаются от представленных в [5]. Но в этих работах не говорится о том, как меняются распределения статистик критериев с ростом ошибок округления.

Большинство существующих критериев предназначено для проверки статистических гипотез относительно непрерывных случайных величин. На этом предположении редко акцентируют внимание, но оно обусловливает корректность применения соответствующих критериев. При выполнении этого предположения в выборках не может быть повторяющихся значений. В реальных ситуациях из-за погрешностей округления это предположение часто нарушается, что типично для медицинских и биологических экспериментов, где в силу специфики ошибки округления бывают очень значительными. Это касается и результатов высокоточных измерений, в которых, изменяется только последний десятичный знак, что связано с разрешающей способностью используемой измерительной системы. В автоматизированных системах обработки данных, как правило, имеют дело с округлёнными результатами измерений, поступающими от различных датчиков.

Поясним, к чему приводит применение, например, критерия согласия, в котором статистика учитывает отклонение эмпирического распределения от теоретического, если результаты измерений округляются с некоторым Δ.

Допустим, для проверки простой гипотезы H_0: $F_n(x) = F(x)$, где $F_n(x)$ — эмпирическое распределение, построенное по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объёма n, применяется критерий согласия со статистикой S. Пусть для этого критерия существует предельное распределение $G(S \mid H_0)$ статистики. При справедливости H_0 эмпирическое распределение $F_n(x)$, соответствующее выборке непрерывных случайных величин (без округления), при $n \to \infty$ сходится к функции распределения $F(x)$ этой случайной величины. Эмпирическое распределение $G_N(S_n \mid H_0)$ статистики, строящееся по выборкам, при $n \to \infty$ и числе экспериментов $N \to \infty$ будет сходиться к предельному распределению $G(S \mid H_0)$ этой статистики.

Если нарушается предположение о непрерывности наблюдаемой случайной величины и результаты измерений округляются (фиксируются) с некоторым Δ, то, начиная с некоторого n (зависящего от вида $F(x)$, от области определения случайной величины и от Δ), $\max |F_n(x) - F(x)|$ перестаёт уменьшаться, а распределение $G_N(S_n \mid H_0)$ с ростом n будет отклоняться от предельного $G(S \mid H_0)$ (чем больше Δ, тем при меньшем n такое отклонение становится существенным).

Как отклоняются распределения статистик критериев согласия Колмогорова, Крамера — Мизеса — Смирнова и Андерсона — Дарлинга от соответствующих предельных распределений в зависимости от Δ с ростом n, исследовалось в [6] при проверке простых и сложных гипотез. Картина, подобная [6] (в случае больших выборок), наблюдается для широкого множества критериев. Чтобы в условиях больших выборок, применяя статистические критерии, можно было воспользоваться классическими результатами, в [6] рекомендовано ограничивать объёмы извлекаемых выборок величиной $n_{\max}$, при которой реальное распределение статистики $G(S_{n_{\max}} \mid H_0)$ ещё практически не отличается от $G(S \mid H_0)$. Оценка величины $n_{\max}$ для применяемого критерия в конкретной ситуации проблемы не представляет.

Во многих приложениях типична ситуация, когда из-за округления в анализируемых выборках оказывается относительно много повторяющихся наблюдений. Это объясняется тем, что погрешность округления соизмерима со среднеквадратическим отклонением закона распределения ошибки измерения. В таких ситуациях реальные распределения $G(S_n \mid H_0)$ статистик критериев (при погрешности округления Δ) могут существенно отличаться от предельных распределений $G(S \mid H_0)$ или от $G(S_n \mid H_0)$, имеющих место в случае без округления измерений.

В [7–10] представлены результаты исследований реальных свойств различных групп критериев без учёта влияния на эти свойства ошибок округления. В данном случае на примере различных критериев с использованием методов статистического моделирования покажем, как погрешность округления может влиять на распределения статистик критериев проверки различных гипотез при относительно небольших объёмах выборок и что надо делать, чтобы, применяя критерии в этих условиях, обеспечить корректность статистических выводов. Для обеспечения исследований в вычислительной системе [11], в которой представлен перечень критериев, несколько превышающий множество критериев, охваченных в [7–10], реализована возможность применения этого перечня и моделирования распределений статистик соответствующих критериев в условиях нарушения стандартного предположения о непрерывности (при заданной погрешности округления Δ).

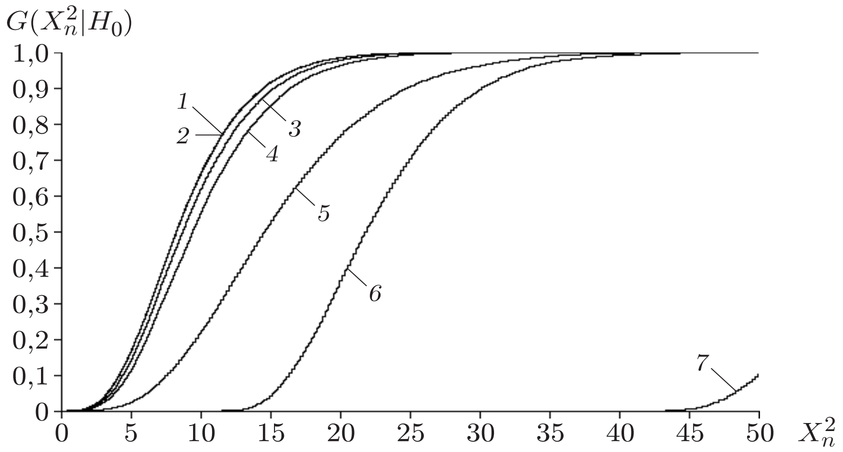

Рис. 1. Зависимость распределений статистики (1) от Δ при $n = 100$: *1* — без округления, совпадает с χ^2_9-распределением; *2* — при $\Delta = 0{,}01\sigma$; *3* — $\Delta = 0{,}05\sigma$; *4* — $\Delta = 0{,}1\sigma$; *5* — $\Delta = 0{,}2\sigma$; *6* — $\Delta = 0{,}3\sigma$; *7* — $\Delta = 0{,}5\sigma$

Предлагаемая работа преследует две цели. Во-первых, показать, что наличие ошибок округления нередко приводит к ситуациям, в которых использование классических результатов, касающихся критериев проверки статистических гипотез, оказывается абсолютно невозможным. Во-вторых, продемонстрировать возможность корректного применения критериев и в таких ситуациях.

В ходе проведённых исследований для определённости (и без потери общности) авторы опирались на выборки, моделируемые в соответствии со стандартным нормальным законом $N(0,1)$, но при различной погрешности округления. При округлении $\Delta = 1$ в выборках, принадлежащих $N(0,1)$, может появляться 9 уникальных значений, при округлении с $\Delta = 0{,}1$ — порядка 86 уникальных значений, при $\Delta = 0{,}01$ — порядка 956, при $\Delta = 0{,}001$ — порядка 9830. В случае принадлежности выборок закону $N(\mu,\sigma)$ демонстрируемые далее зависимости будут иметь тот же вид при ошибках округления $\Delta\sigma$. Качественно картина не меняется при законах, отличных от нормального.

Влияние округления на изменение свойств критериев согласия. Статистика критерия согласия χ^2 Пирсона имеет вид

$$X_n^2 = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i/n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}, \tag{1}$$

где n_i — количество наблюдений, попавших в i-й интервал; $P_i(\theta) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\theta)\,dx$ — вероятности попадания в интервал, соответствующие теоретическому закону с функцией плотности $f(x,\theta)$. При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 (при известном θ) асимптотическим распределением статистики является χ^2_{k-1}-распределение.

На рис. 1 показано, как меняется распределение статистики (1) критерия Пирсона в зависимости от степени округления Δ при проверке простой гипотезы о согласии с нормальным законом при $n = 100$ и при числе равновероятных интервалов $k = 10$.

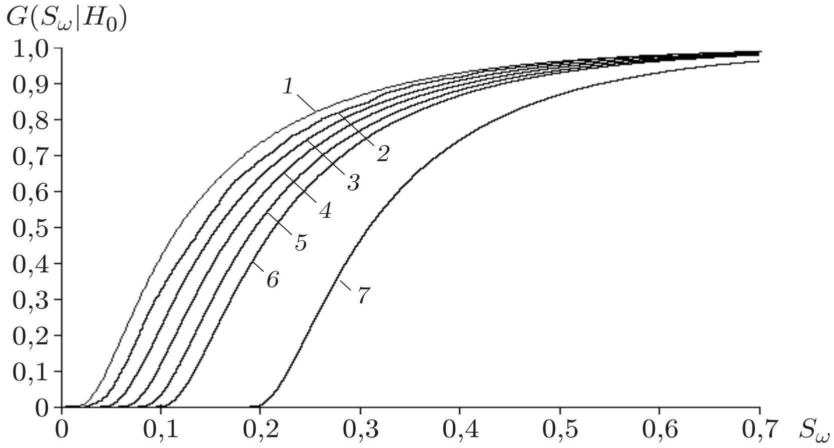

Рис. 2. Зависимость распределений статистики (2) от n при $\Delta = 0{,}5\sigma$: *1* — распределение $a1(S)$; *2* — для $n = 10$; *3* — $n = 20$; *4* — $n = 30$; *5* — $n = 40$; *6* — $n = 50$; *7* — $n = 100$

При таком объёме выборок и $\Delta = 0{,}01\sigma$ распределение статистики X_n^2 практически не отличается от χ_9^2-распределения, но уже при $\Delta = 0{,}05\sigma$ это отличие становится существенным. С ростом n картина, представленная на рисунке, растягивается от χ_9^2-распределения и сжимается к χ_9^2-распределению с уменьшением n.

Подобным же образом в зависимости от степени округления изменяются распределения статистик непараметрических критериев согласия [12] Колмогорова (K) [13], Крамера — Мизеса — Смирнова (CMS) [14], Андерсона — Дарлинга (AD) [15, 16], Купера (Ku) [17], Ватсона (W) [18, 19], а также распределения статистик критериев Жанга [20], зависящие от объёмов выборок. Покажем это на примере критерия Крамера — Мизеса — Смирнова, статистика которого имеет вид

$$S_\omega = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2. \tag{2}$$

При справедливости простой гипотезы в ситуации, когда ошибками округления можно пренебречь, распределение статистики (2) быстро сходится к предельному распределению $a1(s)$ [14] (отклонением от предельного можно пренебречь уже при $n > 25$ [7]).

При наличии округления с ростом n распределение статистики начинает отклоняться от $a1(s)$ [6]. Отклонение распределения статистики (2) от $a1(s)$ в зависимости от величины погрешности округления при $n = 1000$ показано в [12]. При существенной степени округления Δ распределение статистики (2) может значительно отличаться от $a1(s)$ и при достаточно малых n. В качестве подтверждения на рис. 2 представлены предельное распределение $a1(s)$ статистики (2) и полученные в результате моделирования эмпирические распределения $G(S_\omega \mid H_0)$ этой статистики для различных объёмов выборок n при $\Delta = 0{,}5\sigma$.

Пример. Покажем, как при учёте погрешности округления меняются результаты проверки простой гипотезы о принадлежности выборки 1,05; 1,10; 0,95; 0,90; 0,95; 1,05; 0,95; 0,95; 1,00; 1,05; 1,05; 0,90; 1,00; 1,10; 0,85; 1,10; 1,00; 1,00; 0,95; 1,00; 0,85; 0,95; 0,95; 1,10; 1,10; 1,05; 1,15; 1,10; 0,80; 0,85; 0,95; 1,00; 1,05; 1,00; 1,05; 1,05; 0,95; 1,15; 1,00; 1,15; 0,95; 0,90; 0,95; 0,90; 1,00; 1,20; 1,10; 1,05; 1,00; 1,05 нормальному закону с параметрами $\mu = 1$ и $\sigma = 0{,}1$. Выборка представляет собой результаты моделирования по этому закону, зафиксированные с погрешностью округления $\Delta = 0{,}5\sigma$.

Таблица 1

Результаты проверки гипотезы

№ п/п	Критерий	Статистика	Оценки p_{value}	
			по асимптотическому распределению статистики	по реальному распределению статистики
1	K	1,073889	0,19903	0,721
2	CMS	0,156638	0,36997	0,776
3	AD	0,876389	0,4291	0,847
4	Ku	1,7235144	0,05723	0,791
5	W	0,1430680	0,1187	0,672
6	χ^2	5,8310722	0,21212	0,497

Результаты проверки гипотезы по совокупности непараметрических критериев согласия и критерию χ^2 Пирсона представлены в табл. 1, где приведены значения статистик, а также оценки достигнутых уровней значимости p_{value}, вычисленные соответственно по асимптотическим и реальным распределениям статистик, имеющим место при погрешности округления $\Delta = 0{,}5\sigma$. В случае критерия χ^2 Пирсона использовалось 5 равновероятных интервалов. Как можно видеть, оценки p_{value} по реальным распределениям статистик существенно отличаются от значений, полученных по асимптотическим распределениям.

Если на самом деле справедлива конкурирующая гипотеза H_1 о принадлежности выборки некоторому другому закону, то условные распределения статистики $G(S_n \mid H_1)$, имеющие место при проверке гипотезы H_0, также меняются в зависимости от Δ. При этом с ростом Δ мощность критерия может снижаться, а может и возрастать.

В качестве примера в табл. 2 приведены оценки мощности критериев согласия при проверке простой и сложной (с оценкой двух параметров закона методом максимального правдоподобия) гипотез о принадлежности выборок нормальному закону. В качестве конкурирующей гипотезы H_1, относительно которой оценивалась мощность, рассмотрен логистический закон с плотностью

$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}\,\theta_1} \frac{\mathrm{e}^{-\pi(x-\theta_0)/(\sqrt{3}\,\theta_1)}}{[1 + \mathrm{e}^{-\pi(x-\theta_0)/(\sqrt{3}\,\theta_1)}]^2},$$

очень близкий к нормальному.

Оценки мощности $1 - \beta$, где β — вероятность ошибки 2-го рода (неотклонения гипотезы H_0 при справедливости конкурирующей гипотезы H_1), приведены при $n = 100$ для вероятности ошибки 1-го рода $\alpha = 0{,}1$. Они получены при числе имитационных экспериментов $N = 10^6$, что обеспечивает оценки мощности с точностью порядка $\pm 10^{-3}$.

Как можно заметить, с ростом погрешности округления Δ снижается мощность критерия χ^2, но может возрастать мощность непараметрических критериев согласия.

Подчеркнём, что аналогичным образом ошибки округления могут сказываться на распределениях статистик множества специальных критериев, ориентированных на проверку принадлежности случайных величин конкретному закону распределения (нормальному [8], равномерному [9], показательному и т. п.). В работах [21, 22] сконцентрировано внимание на ошибках и неверных действиях, которые могут приводить к некорректным выводам при использовании критериев согласия. В свете изложенного очевидно, что следует обращать внимание и на возможное влияние на выводы погрешностей округления.

Таблица 2

Оценки мощности критериев согласия в зависимости от Δ

№ п/п	Критерий	Оценки мощности					
		$\Delta = 0$	$\Delta = 0{,}05\sigma$	$\Delta = 0{,}1\sigma$	$\Delta = 0{,}2\sigma$	$\Delta = 0{,}5\sigma$	$\Delta = \sigma$
При проверке простой гипотезы							
1	K	0,127	0,126	0,133	0,131	0,150	0,240
2	Ku	0,199	0,202	0,209	0,224	0,265	0,340
3	CMS	0,113	0,113	0,114	0,116	0,134	0,211
4	W	0,208	0,209	0,211	0,218	0,254	0,318
5	AD	0,124	0,124	0,124	0,125	0,129	0,148
6	χ^2	0,150	0,149	0,146	0,128	0,078	0,068
При проверке сложной гипотезы							
1	K	0,240	0,238	0,233	0,228	0,230	0,333
2	Ku	0,273	0,274	0,274	0,280	0,303	0,340
3	CMS	0,294	0,295	0,297	0,307	0,339	0,318
4	W	0,294	0,295	0,298	0,308	0,340	0,317
5	AD	0,327	0,327	0,328	0,328	0,320	0,256
6	χ^2	0,117	0,118	0,117	0,112	0,091	0,136

Влияние округления на распределения статистик критериев однородности. В k-выборочных критериях одновременно анализируется две и более выборок. На распределения $G(S \mid H_0)$ статистик критериев однородности законов, в которых проверяется гипотеза вида H_0: $F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x)$, влияют степени округления и их различие в анализируемых выборках. Влияние ошибок округления на распределения статистик критериев однородности рассмотрим на примере двухвыборочных критериев Лемана — Розенблатта (LR) и Смирнова (Sm).

Статистика критерия Лемана — Розенблатта, рассмотренного в [23, 24], определяется выражением

$$S_{\mathrm{LR}} = \frac{1}{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} \Big[n_1 \sum_{j=1}^{n_1} (s_j - j)^2 + n_2 \sum_{i=1}^{n_2} (r_i - i)^2 \Big] - \frac{4 n_1 n_2 - 1}{6(n_1 + n_2)}, \tag{3}$$

где s_j — порядковый номер (ранг) x_{1j}; r_i — порядковый номер (ранг) x_{2i} в объединённом вариационном ряде двух выборок объёмов n_1 и n_2.

Предельным распределением статистики (3) при справедливости проверяемой гипотезы H_0: $F_1(x) = F_2(x)$ является то же самое распределение $a1(s)$ [24], которое становится предельным для статистики критерия согласия CMS.

Влияние погрешности округления на распределения статистик критериев однородности законов при справедливости H_0 рассмотрим (без потери общности) в случае принадлежности анализируемых выборок стандартному нормальному закону.

При $\Delta_1 = \Delta_2$, объёмах выборок $n_i = 100$ и $\Delta_i \leqslant 0{,}5\sigma$ распределения $G(S_{\mathrm{LR}} \mid H_0)$ практически не отклоняются от распределения $a1(s)$, но отклоняются при неравных Δ_i.

На рис. 3 распределения $G(S_{\mathrm{LR}} \mid H_0)$ статистики (3) критерия при $n_i = 100$ показаны в зависимости от Δ_2 при $\Delta_1 = 0{,}01\sigma$. В этом случае отклонение распределения $G(S_{\mathrm{LR}} \mid H_0)$ от $a1(s)$ при $\Delta_1 = 0{,}05\sigma$ пока практически несущественно. При тех же Δ_i с ростом n_i отклонения $G(S_{\mathrm{LR}} \mid H_0)$ от $a1(s)$ увеличиваются.

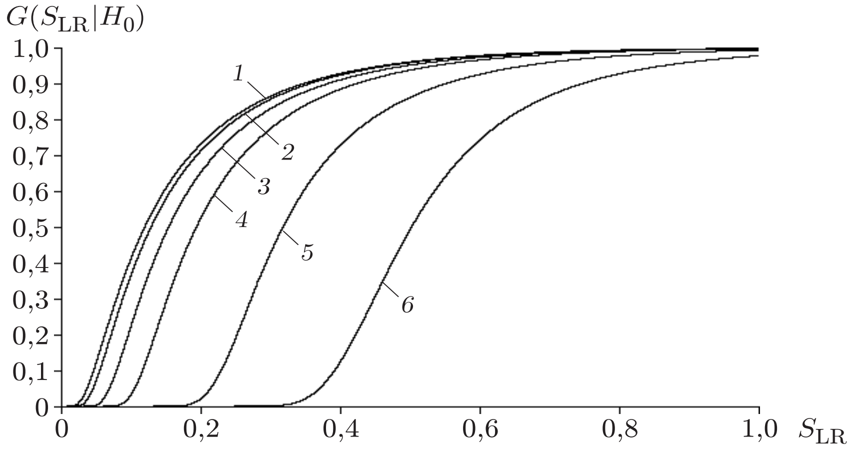

Рис. 3. Зависимость распределений статистики (3) от Δ_2 при $\Delta_1 = 0{,}01\sigma$: *1* — при $\Delta_2 = \Delta_1$ совпадает с $a1(s)$; *2* — при $\Delta_2 = 0{,}1\sigma$; *3* — $\Delta_2 = 0{,}2\sigma$; *4* — $\Delta_2 = 0{,}3\sigma$; *5* — $\Delta_2 = 0{,}5\sigma$; *6* — $\Delta_2 = 0{,}7\sigma$

Критерий однородности Смирнова предложен в работе [25]. В отличие от оригинальной версии [14] будем рассматривать критерий с модифицированной статистикой следующего вида [26]:

$$S_{\mathrm{Sm}} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\left(D_{n_1,n_2} + \frac{n_1 + n_2}{4{,}6 n_1 n_2}\right), \tag{4}$$

где $D_{n_1,n_2} = \max\left(D^{+}_{n_1,n_2}, D^{-}_{n_1,n_2}\right)$;

$$D^{+}_{n_1,n_2} = \max_{1\leqslant r\leqslant n_1}\left[\frac{r}{n_1} - F_{n_2}(x_r)\right] = \max_{1\leqslant s\leqslant n_2}\left[G_{n_1}(y_s) - \frac{s-1}{n_2}\right];$$

$$D^{-}_{n_1,n_2} = \max_{1\leqslant r\leqslant n_1}\left[F_{n_2}(x_r) - \frac{r-1}{n_1}\right] = \max_{1\leqslant s\leqslant n_2}\left[\frac{s}{n_2} - G_{n_1}(y_s)\right].$$

Дискретное распределение статистики (4), отличающейся от оригинальной [14] наличием второго слагаемого в скобках, быстрее сходится к асимптотическому распределению Колмогорова $\mathrm{K}(S)$ [26]. Множество возможных значений статистики представляет собой решётку с шагом $1/k$, где k — наименьшее общее кратное n_1 и n_2 [14]. Поэтому предпочтительнее применять критерий, когда объёмы выборок n_1 и n_2 не равны и представляют собой взаимно простые числа.

Как можно видеть на рис. 4, распределения $G(S_{\mathrm{Sm}} \mid H_0)$ статистики (4) в зависимости от степени округления меняются совершенно по-другому. На рисунке показаны распределения $G(S_{\mathrm{Sm}} \mid H_0)$ при $\Delta_1 = \Delta_2$ и объёмах выборок $n_1 = 101$, $n_2 = 103$. С ростом погрешности округления распределения $G(S_{\mathrm{Sm}} \mid H_0)$ сдвигаются в область меньших значений.

В данном случае распределение статистики без ошибок округления результатов практически совпадает с распределением Колмогорова. При погрешности округления $\Delta_i = 0,01\sigma$ отклонение от $\mathrm{K}(S)$ уже заметно, а при $\Delta_i = 0{,}05\sigma$ его уже нельзя не учитывать.

Исследование зависимости мощности критериев со статистиками (3) и (4) от степени округления Δ_i (при $0 \leqslant \Delta_i \leqslant 0{,}7\sigma$ и $\Delta_1 = \Delta_2$) показало, что рост ошибок округления Δ_i не влияет существенно на оценки мощности.

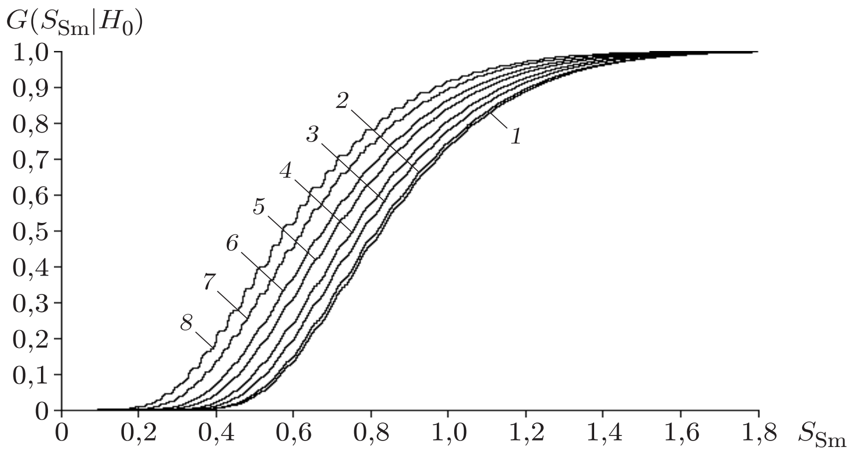

Рис. 4. Зависимость распределений статистики (4) от Δ_i: *1* — при $\Delta_i = 0$; *2* — $\Delta_i = 0{,}01\sigma$; *3* — $\Delta_i = 0{,}05\sigma$; *4* — $\Delta_i = 0{,}1\sigma$; *5* — $\Delta_i = 0{,}2\sigma$; *6* — $\Delta_i = 0{,}3\sigma$; *7* — $\Delta_i = 0{,}5\sigma$; *8* — $\Delta_i = 0{,}7\sigma$

Естественно, погрешности округления сказываются на распределениях статистики двухвыборочного критерия однородности законов Андерсона — Дарлинга — Петита [27], а также статистик k-выборочных критериев однородности законов Андерсона — Дарлинга [28], Жанга [29] и k-выборочных критериев, опирающихся на использование двухвыборочных [30].

Исследование распределений статистик двух и k-выборочных параметрических критериев однородности средних, используемых для проверки гипотезы H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ или критерия для проверки гипотезы H_0: $\mu = \mu_0$ о равенстве математического ожидания номинальному значению, показало, что ошибки округления результатов измерений не оказывают на них какого-либо заметного влияния.

В то же время на распределения статистик параметрических критериев, применяемых для проверки аналогичных гипотез относительно дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ и H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, ошибки округления могут оказывать существенное влияние. В частности, распределения $G(S \mid H_0)$ статистик параметрических критериев Бартлетта [31] и Кохрена [32] изменяются, если ошибки округления Δ_i сравниваемых выборок различаются. А мощность этих критериев, так же, например, как и мощность непараметрического критерия Клотца [33], с ростом Δ_i снижается даже при равных Δ_i [12].

Заключение. В ситуациях, когда погрешность округления Δ_i оказывается соизмерима со среднеквадратическим отклонением σ закона распределения ошибки измерения, реальные распределения $G(S_n \mid |H_0)$ статистик критериев проверки статистических гипотез при ограниченных объёмах выборок могут существенно отличаться от предельных распределений $G(S \mid H_0)$ этих статистик или от $G(S_n \mid H_0)$, имеющих место в классическом случае (где ошибками округления можно пренебречь). В таких ситуациях классические результаты (асимптотические распределения статистик и таблицы критических значений), связанные со свойствами критериев, использовать нельзя. Игнорирование этого факта будет приводить (чаще) к увеличению ошибок 1-го рода (отклонению справедливой гипотезы H_0) или (реже, см. критерий однородности Смирнова) к увеличению ошибок 2-го рода (не отклонению H_0 при справедливости некоторой конкурирующей гипотезы).

Возможное влияние погрешностей округления на распределения статистик критериев необходимо учитывать при использовании конкретных критериев в приложениях, а также в автоматизированных системах обработки данных, где статистические методы могут использоваться для отслеживания неизменности закономерностей (или обнаружения их изменения).

Изменение свойств критерия под влиянием погрешностей округления не исключает возможности его корректного применения. Надо лишь знать распределение $G(S_n \mid H_0)$ статистики критерия при тех же погрешностях округления Δ_i и тех же объёмах выборок n_i, которые соответствуют анализируемым выборкам. Для этого лучше всего воспользоваться методами статистического моделирования. Для моделирования $G_N(S_n \mid H_0)$ рассмотренных в [7–10] множеств критериев можно использовать программную систему ISW [11], с применением которой проведены представленные исследования и в которую встроены соответствующие средства интерактивного моделирования. Аналогичные возможности могут быть встроены в любую систему обработки данных.

В заключение подчеркнём, что сигналом к осторожности применения классических результатов относительно используемых критериев является наличие в анализируемых выборках слишком большого количества повторяющихся значений. Если этого нет, можно опираться на классические результаты. В противном случае, необходимо следовать приведённым рекомендациям или воздержаться от применения соответствующего критерия.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части (№ 1.1009.2017/4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pearson E. S., D'Agostino R. B., Bowman K. O.** Tests for departure from normality: Comparison of powers // Biometrika. 1977. **64**. P. 231–246. DOI: 10.1093/biomet/64.2.427-a.
2. **Tricker A. R.** The effect of rounding on the significance level of certain normal test statistics // Journ. Appl. Statistics. 1990. **17**, N 1. P. 31–38. DOI: 10.1080/757582644.
3. **Tricker A. R.** The effect of rounding on the power level of certain normal test statistics // Journ. Appl. Statistics. 1990. **17**, N 2. P. 219–228. DOI: 10.1080/757582833.
4. **Deidda R., Puliga M.** Sensitivity of goodness-of-fit statistics to rainfall data rounding off // Phys. and Chem. Earth. 2006. **31**. P. 1240–1251. DOI: 10.1016/j.pce.2006.04.041.
5. **Choulakian V., Stephens M. A.** Goodness-of-Fit Tests for the Generalized Pareto Distribution // Technometrics. 2001. **43**. P. 478–484. DOI: 10.1198/00401700152672573.
6. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Семёнова М. А.** К вопросу статистического анализа больших данных // Вестн. Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 44. С. 40–49. DOI: 10.17223/19988605/44/5.
7. **Лемешко Б. Ю.** Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2014. 163 с. DOI: 10.12737/11873.
8. **Лемешко Б. Ю.** Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 160 с. DOI: 10.12737/6086.
9. **Лемешко Б. Ю., Блинов П. Ю.** Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2015. 183 с. DOI: 10.12737/11304.
10. **Лемешко Б. Ю.** Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2017. 208 с. DOI: 10.12737/22368.
11. **ISW** — Программная система статистического анализа одномерных наблюдений. URL: https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm (дата обращения: 11.02.2019).

12. **Lemeshko B., Lemeshko S., Semenova M.** Features of testing statistical hypotheses under big data analysis // Proc. of the Intern. Workshop «Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation» (AMSA 2019). Novosibirsk, Russia, 18–20 September, 2019. P. 122–137.

13. **Kolmogoroff A. N.** Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione // Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari. 1933. **4**, N 1. P. 83–91.

14. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416 с.

15. **Anderson T. W., Darling D. A.** A test of goodness of fit // Journ. American Statistical Association. 1954. **29**. P. 765–769.

16. **Anderson T. W., Darling D. A.** Asymptotic theory of certain "Goodness of fit" criteria based on stochastic processes // Ann. Math. Statist. 1952. **23**. P. 193–212.

17. **Kuiper N. H.** Tests concerning random points on a circle // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Van Wettenschappen. 1960. Ser. A. **63**. P. 38-47.

18. **Watson G. S.** Goodness-of-fit tests on a circle. I // Biometrika. 1961. **48**, N 1–2. P. 109–114.

19. **Watson G. S.** Goodness-of-fit tests on a circle. II // Biometrika. 1962. **49**, N 1–2. P. 57–63.

20. **Zhang J.** Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests. PhD Thesis. York University, Toronto. 2001. 113 p. URL: http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/ NQ66371.pdf (дата обращения: 03.12.2019).

21. **Лемешко Б. Ю., Чимитова Е. В.** Об ошибках и неверных действиях, совершаемых при использовании критериев согласия типа χ^2 // Измерительная техника. 2002. № 6. С. 5–11.

22. **Лемешко Б. Ю.** Об ошибках, совершаемых при использовании непараметрических критериев согласия // Измерительная техника. 2004. № 2. С. 15–20.

23. **Lehmann E. L.** Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests // Ann. Math. Statist. 1951. **22**, N 1. P. 165–179.

24. **Rosenblatt M.** Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic // Ann. Math. Statist. 1952. **23**. P. 617–623.

25. **Смирнов Н. В.** Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках // Бюл. МГУ. Сер. А. 1939. **2**, № 2. С. 3–14.

26. **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B.** Statistical distribution convergence and homogeneity test power for Smirnov and Lehmann— Rosenblatt tests // Measurement Techniques. 2005. **48**, N 12. P. 1159–1166.

27. **Pettitt A. N.** A two-sample Anderson — Darling rank statistic // Biometrika. 1976. **63**, N 1. P. 161–168.

28. **Scholz F. W., Stephens M. A.** K-Sample Anderson — Darling Tests // Journ. American Statistical Association. 1987. **82**, N 399. P. 918–924.

29. **Zhang J., Wu Y.** k-Sample tests based on the likelihood ratio // Computational Statistics & Data Analysis. 2007. **51**, N 9. P. 4682–4691.

30. **Лемешко Б. Ю., Веретельникова И. В.** Мощность k-выборочных критериев проверки однородности законов // Измерительная техника. 2018. № 7. С. 3–7. DOI: 10.32446/0368-1025it-2018-7-3-7.

31. **Bartlett M. S.** Properties of sufficiency of statistical tests // Proceedings of the Royal Society A. 1937. **160**, N 901. P. 268–282.

32. **Cochran W. G.** The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total // Ann. Eugenics. 1941. **11**. P. 47–52.

33. **Klotz J.** Nonparametric tests for scale // Ann. Math. Statist. 1962. **33**. P. 498–512.

Поступила в редакцию 17.12.2019
После доработки 20.03.2020
Принята к публикации 20.03.2020