

УДК 621.394

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕМЕЙСТВА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ОПОРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ

© Ю. Г. Булычев<sup>1</sup>, А. Г. Кондрашов<sup>2</sup>, П. Ю. Радугин<sup>3</sup>

<sup>1</sup>АО «Всероссийский научно-исследовательский институт «Градиент»»,  
344000, г. Ростов-на-Дону, просп. Соколова, 96

<sup>2</sup>АО «Научно-производственное объединение «Квант»»,  
173001, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 73

<sup>3</sup>АО «Калужский научно-исследовательский радиотехнический институт»,  
249192, г. Жуков Калужской области, ул. Ленина, 2  
E-mail: ProfBulychev@yandex.ru

На основе специально спланированного эксперимента, состоящего в получении необходимого семейства оценок опорных интегральных кривых (описываемых приближённо в заданной конечной системе базисных функций), решается задача активной идентификации динамического объекта, который соответствует априорно неизвестному дифференциальному уравнению. С учётом того что экспериментальные данные могут содержать флуктуационную и сингулярную помеху, развит метод оптимального несмещённого оценивания линейных числовых характеристик поведения объекта и приближённого аналитического решения (дифференциального уравнения), справедливого для заданного множества допустимости значений времени и начального условия. Дано обоснование базовых характеристик метода, приведены результаты вычислительного эксперимента.

*Ключевые слова:* динамический объект, активная идентификация, сингулярная помеха, семейство опорных интегральных кривых, метод множителей Лагранжа, числовые характеристики поведения динамического объекта.

DOI: 10.15372/AUT20190113

**Введение.** Известно [1–5], что наиболее важными задачами анализа динамических объектов (ДО) являются активная идентификация математических моделей и оценивание числовых характеристик (ЧХ) поведения данных объектов по результатам специально спланированного эксперимента. В качестве ЧХ могут рассматриваться сглаженные значения вектора состояния в фиксированных точках интервала наблюдения (например, начальные условия, которые по правилам эксперимента могут быть заданы как точно, так и приближённо), а также оценки производных различных порядков, определённых интегралов и спектральных коэффициентов (речь идёт об оптимальном оценивании значений некоторых линейных функционалов [6–8]).

В работах [1–8] описываются подходы к решению указанных задач при разных уровнях априорной неопределённости, но при этом все факторы неопределённости учитываются заданием компактных множеств допустимости (например, в виде эллипсоидов) в рамках вероятностных и невероятностных критериев. Гораздо более сложную задачу представляет случай, когда экспериментальные данные (наблюдения), помимо традиционной флуктуационной погрешности, содержат и сингулярную помеху [5], структура которой характеризуется заданным с точностью до параметров семейством возможных функциональных базисов. Помеха может принимать любые большие значения, а также иметь разрывы первого рода с неизвестными моментами времени их появления. В этих условиях, когда отсутствует эффективный инструмент описания множеств допустимости, может быть применён известный метод обобщённого инвариантно-несмещённого оценивания (ОИНО) линейных

функционалов [6–8]. Достоинство данного метода состоит в том, что он позволяет решать задачу вычисления значений таких функционалов без традиционного расширения пространства состояний и ориентирован не только на гладкие, но и кусочно-непрерывные помехи с известными [6, 7] и неизвестными [8] точками разрыва первого рода. На участке непрерывности помеха описывается одним базисом, принадлежащим конечному семейству допустимых (для данной помехи) функциональных базисов.

В предлагаемом исследовании ставится задача разработки метода активной идентификации ДО (с использованием ОИНО), позволяющего вычислять оптимальные ЧХ поведения ДО (как для линейных, так и нелинейных объектов) и идентифицировать математическую модель ДО по результатам наблюдений (это набор оценок конечного семейства опорных интегральных кривых (ОИК)), содержащих шумовую и сингулярную помехи. Для решения задачи идентификации предлагается использовать известную идею построения приближённого аналитического решения векторного дифференциального уравнения (в форме Коши)  $dx/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  (где начальное условие  $\mathbf{x}_0$  может принимать произвольное значение из соответствующего множества допустимости  $G_{\mathbf{x}_0}$ ) с применением семейства ОИК и принципа непрерывной зависимости (как правило, гладкой) общего решения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  от  $\mathbf{x}_0$  [9, 10]. Благодаря такой зависимости появляется возможность адекватного описания ДО в заданном множестве допустимости на базе обычных или специализированных ЭВМ путём несложной (в вычислительном плане) векторно-матричной реализации.

В данной работе полагается неизвестным вид правой части дифференциального уравнения, указано множество допустимости  $G_{\mathbf{x}_0}$  и для конечного набора узлов, покрывающих это множество, считается сформированным набор оценок конечного семейства ОИК. По условию эксперимента начальные условия, соответствующие узлам, задаются либо точно, либо приближённо (например, на основе обработки массива первичных измерений [2, 4, 5]). В отличие от работ [9, 10] мы учитываем возможность наличия в оценках семейства ОИК не только флуктуационных, но и сингулярных помех. Помимо традиционной задачи идентификации динамической модели рассматривается не менее актуальная задача оценивания набора ЧХ поведения ДО (при использовании этого объекта по своему основному назначению) по единственной наблюдаемой интегральной кривой. Данная кривая, соответствующая некоторому фиксированному начальному условию  $\mathbf{x}_0$ , задана с точностью до указанных помех, что требует построения оптимальных оценок  $\mathbf{x}_0^*$ ,  $\mathbf{x}^*$  для  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}$  и для числовой характеристики.

Поскольку рассмотрение векторного дифференциального уравнения не является принципиальным и лишь приведёт к громоздким записям, то в дальнейшем ограничимся рассмотрением скалярного ДО. Однако по ходу изложения материала будут сделаны обобщения и на многомерный случай, когда правая часть  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$  дифференциального уравнения содержит вектор  $\boldsymbol{\eta}$  постоянных параметров, принимающих значения из множества допустимости  $G_{\boldsymbol{\eta}}$ .

Разрабатываемый метод идентификации ДО, не требующий расширения пространства состояний, должен удовлетворять условиям оптимальности, а именно обеспечивать несмещённость формируемых оценок, их инвариантность к сингулярной помехе и минимизацию дисперсии погрешностей оценивания.

**Постановка задачи.** Пусть скалярный ДО описывается неизвестным дифференциальным уравнением в форме Коши:

$$dx/dt = f(t, x), \quad t \in G_t = [t_0, t_0 + T], \quad x = x(t, x_0) \in W[G_t], \quad (1)$$

где  $x = x(t, x_0)$  — решение уравнения (1), зависящее от временной координаты  $t$  и начального условия  $x_0 = x(t_0, x_0) \in G_{x_0} = [c, d]$ ;  $f(t, x)$  — функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения уравнения (1) с постоянной Липшица  $L_x$

(приближённую оценку константы  $L_x$  несложно получить в результате анализа экспериментальных данных с учётом физической сущности ДО).

Множество  $G = G_{x_0} \times G_t$  будем называть рабочей областью, в пределах которой должна быть обеспечена требуемая точность идентификации и расчёта ЧХ.

С учётом планируемого эксперимента введём на  $G_t$  измерительную сетку  $\{t_n\}_{n=0}^N$  (полагая  $t_N = t_0 + T$ ) для времени  $t$  и две вычислительные (интерполяционные) сетки:  $\{\bar{x}_{0(m)}\}_{m=1}^{M_x}$  — для начального условия  $x_0$  и  $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$  — для времени  $t$  (малого объёма по отношению к сетке  $\{t_n\}_{n=0}^N$ ). При этом  $\bar{x}_{0(m)}$  рассматривается в качестве расчётного значения начального условия (для «запуска» ДО), соответствующего  $m$ -й ОИК. Обеспечим также выполнение условия  $G \subseteq \bar{G} = [x_{0(1)}, x_{0(M_x)}] \times [t_{(1)}, t_{(M_t)}]$ , при этом множество  $\bar{G}$  будем называть областью интерполяции. Нестрогое включение  $G \subseteq \bar{G}$  позволяет избежать отрицательных вычислительных краевых эффектов, которые свойственны процедурам интерполяции (это обсуждается в результатах моделирования). Полагаем, что по отношению к ДО можно сформировать массив экспериментальных данных в виде выборок семейства из  $M_x$  экспериментальных ОИК  $y_{(m)}(t)$  уравнения (1):

$$y_{(m)n} = x_n(x_{0(m)}) + h_{(m)n} + \xi_{(m)n}, \quad m \in \overline{1, M_x}, \quad n = \overline{0, N}, \quad (2)$$

где  $y_{(m)n} = y_{(m)}(t_n)$ ;  $h_{(m)n} = h_{(m)}(t_n)$ ;  $\xi_{(m)n} = \xi_{(m)}(t_n)$ ;  $x_n(x_{0(m)}) = x(t_n, x_{0(m)})$ ;  $x_0(x_{0(m)}) = x(t_0, x_{0(m)}) = x_{0(m)}$ ;  $\{x_{0(m)}\}_{m=1}^{M_x}$  — истинные начальные условия;  $h_{(m)}(t)$  и  $\xi_{(m)}(t)$  — сингулярная и шумовая помехи соответственно.

По условию эксперимента величины  $\{x_{0(m)}\}_{m=1}^{M_x}$  могут быть заданы точно или измерены с контролируемой точностью  $\varepsilon_0$ . В первом случае  $|\Delta x_{0(m)}| = |x_{0(m)} - \bar{x}_{0(m)}| = 0$ , а во втором возникает невязка  $|\Delta x_{0(m)}| = |x_{0(m)} - \bar{x}_{0(m)}| \leq \varepsilon_0$ . Кроме того, потребуем, чтобы объёма  $M_x$  выборки было достаточно для применения метода ОИК и построения приближённого аналитического решения уравнения (1) с допустимой погрешностью [9, 10].

Центрированная шумовая помеха  $\xi_{(m)}(t)$ , задаваемая на сетке  $\{t_n\}_{n=0}^N$  вектором  $\Xi_{(m)} = [\xi_{(m)n} = \xi_{(m)}(t_n), n = \overline{0, N}]^\top$ , характеризуется соответствующей корреляционной матрицей  $\mathbf{K}_{\Xi_{(m)}}$  (в частном случае  $\mathbf{K}_{\Xi_{(m)}} = \mathbf{K}_{\Xi}$ ), а для описания сингулярной помехи воспользуемся представлением

$$h_{(m)}(t) = \mathbf{Z}_{(m)}^\top \Theta(t), \quad m \in \overline{1, M_x}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{Z}_{(m)} = [z_{(m)p}, p = \overline{1, M_h}]^\top$  — вектор неизвестных коэффициентов;  $\Theta(t) = [\theta_p(t), p = \overline{1, M_h}]^\top$  — вектор заданных базисных функций;  $\top$  — символ транспонирования.

Введём векторные обозначения:  $\mathbf{Y}_{(m)} = [y_{(m)n}, n = \overline{0, N}]^\top$ ,  $\mathbf{X}_{(m)} = [x_n(x_{0(m)}), n = \overline{0, N}]^\top$  и  $\mathbf{H}_{(m)} = [h_{(m)n}, n = \overline{0, N}]^\top$ . Это позволяет перейти от (2) к векторному представлению экспериментальных данных

$$\mathbf{Y}_{(m)} = \mathbf{X}_{(m)} + \mathbf{H}_{(m)} + \Xi_{(m)}, \quad m \in \overline{1, M_x}. \quad (4)$$

На множестве всех интегральных кривых  $W[t_0, t_0 + T]$  уравнения (1) вводится семейство  $\Omega$  линейных функционалов  $\omega \in \Omega$ , которые определяют интересующие нас ЧХ поведения рассматриваемого ДО в области  $G = G_{x_0} \times G_t$ . Выберем произвольный функционал  $\omega \in \Omega$ , применяемый к интегральной кривой  $x(t, x_{0(m)})$  (т. е.  $\omega_{0(m)} = \omega\{x(t, x_{0(m)})\}$ ) и задающий интересующую нас ЧХ. На основе  $\mathbf{Y}_{(m)}$  мы должны дать оценку  $\omega_{Y_{(m)}}^*$  значения  $\omega_{0(m)}$ , т. е. вычислить ЧХ, соответствующую  $m$ -й ОИК  $x(t, x_{0(m)})$  и функционалу  $\omega \in \Omega$ . Данную оценку будем искать в виде

$$\omega_{Y_{(m)}}^* = \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{Y}_{(m)} = \mathbf{P}_{(m)}^\top (\mathbf{X}_{(m)} + \mathbf{H}_{(m)} + \Xi_{(m)}) =$$

$$= \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{X}_{(m)} + \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{H}_{(m)} + \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{\Xi}_{(m)} = \omega_{0(m)}^* + \omega_{\mathbf{H}(m)}^* + \omega_{\mathbf{\Xi}(m)}^*, \quad m \in \overline{1, M_x}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{P}_{(m)} = [p_{(m)n}, n = \overline{0, N}]^\top$  — вектор искомых весовых коэффициентов.

В силу линейности процедуры оценивания (5) при фиксированном  $\mathbf{P}_{(m)}$  дисперсия ошибки вычисления характеристики  $\omega_{0(m)}$  находится как

$$\sigma_{\omega_{\mathbf{Y}(m)}}^2 = \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{K}_{\mathbf{\Xi}(m)} \mathbf{P}_{(m)}, \quad m \in \overline{1, M_x}. \quad (6)$$

При выборе оптимальной оценки для вектора  $\mathbf{P}_{(m)}$  необходимо обеспечить минимум величины  $\sigma_{\omega_{\mathbf{Y}(m)}}^2$ , одновременно гарантируя выполнение условий несмещённости

$$\mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{X}_{(m)} = \omega \{x(t, x_{0(m)})\} = \omega_{0(m)}, \quad m \in \overline{1, M_x} \quad (7)$$

и инвариантности к помехе

$$\mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{H}_{(m)} = 0, \quad m \in \overline{1, M_x}. \quad (8)$$

Для массива  $\{\mathbf{Y}_{(m)}\}_{m=1}^{M_x}$ , соответствующего области  $G = G_{x_0} \times G_t$ , справедлива постановка задачи приближённого вычисления линейных функционалов  $\omega \{x(t, x_0)\} = \omega_0$  не только для конечного семейства ОИК  $\{x(t, x_{0(m)})\}_{m=1}^{M_x}$ , но и для любых ОИК  $x(t, x_0)$  с произвольным начальным условием  $x_0 \in G_{x_0}$ . Такая задача актуальна также для случая (не связанного с проведением эксперимента), когда ДО используется по назначению и по результатам измерений необходимо оценить его ЧХ.

Требуется с учётом (1)–(8):

— построить в детерминированной постановке (без учёта ошибок наблюдений) адекватное приближённое аналитическое решение  $\tilde{x}(t, x_0)$  неизвестного дифференциального уравнения, описывающего ДО в области  $G$ ;

— сформировать алгоритм нахождения оптимального вектора  $\mathbf{P}_{(m)}^*$  весовых коэффициентов и линейной оценки  $\omega_{\mathbf{Y}(m)}^*$  (с учётом (4)), обеспечивающих выполнение критерия (6) при условиях (7) и (8), и рассмотреть вопрос оптимизации выбора основных параметров данного алгоритма;

— сформировать алгоритм оптимального оценивания ОИК (с учётом (4)), инвариантный к сингулярной помехе, и на базе полученных оценок найти приближённое решение  $x^*(t, x_0)$  уравнения (1), обеспечивающее требуемую точность идентификации ДО для всех  $(x_0, t) \in G$ ;

— сформировать алгоритм оценивания линейных ЧХ (в том числе и начального условия) по наблюдениям, относящимся к одной интегральной кривой с произвольным начальным условием (когда ДО используется по своему основному назначению);

— исследовать возникающие методические погрешности, определить условия и границы применимости развиваемого метода.

**Построение модели поведения объекта без учёта ошибок измерений.** Введём теперь вычислительную сетку  $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$  малого (по отношению к  $\{t_n\}_{n=0}^N$ ) объёма (не забывая, что  $[t_0, t_N] \subseteq [t_{(1)}, t_{(M_t)}]$ ), необходимую для реализации метода ОИК [9, 10]. Рассмотрим задачу построения приближённого решения  $\tilde{x}(t, x_0)$  уравнения (1) первоначально в детерминированной постановке, полагая, что нам известен массив чисел  $\{x_{(mk)}\}$ ,  $m = \overline{1, M_x}$ ,  $k = \overline{1, M_t}$ . Для этого воспользуемся приближением

$$\tilde{x}(t, x_0) = \mathbf{A}^\top(x_0) \mathbf{\Psi}(t), \quad (x_0, t) \in G, \quad (9)$$

где  $\mathbf{A}(x_0) = [a_j(x_0), j = \overline{1, M_t}]^\top = [\mathbf{B}_j^\top \mathbf{\Lambda}(x_0), j = \overline{1, M_t}]^\top$  — вектор функций, характеризующих зависимость решения  $\tilde{x}(t, x_0)$  от начального условия  $x_0$ ;  $\mathbf{B}_j = [b_{jl}, l = \overline{1, M_x}]^\top$  — вектор неизвестных коэффициентов;  $\mathbf{\Lambda}(x_0) = [\lambda_l(x_0), l = \overline{1, M_x}]^\top$  и  $\mathbf{\Psi}(t) = [\psi_j(t), j = \overline{1, M_t}]^\top$  — векторы заданных базисных функций.

Полагаем, что при  $M_t \rightarrow \infty$  и  $M_x \rightarrow \infty$  формула (9) описывает точное решение уравнения (1) в области  $G$ . При конечных значениях  $M_t$  и  $M_x$  может возникнуть невязка, учёт которой мы проведём в дальнейшем. Формула (9) также показывает, что в общем случае между начальными условиями  $x_0 = x(t, x_0)$  и  $\tilde{x}_0 = \tilde{x}(t_0, x_0)$  может иметь место некоторое отклонение.

Если воспользоваться условиями двумерной интерполяции  $\tilde{x}(t_{(k)}, x_{0(m)}) = x_{(mk)}$  для всех  $m = \overline{1, M_x}$  и  $k = \overline{1, M_t}$ , то можно найти искомые коэффициенты  $b_{jl}$  и получить приближённое аналитическое решение уравнения (1) (по аналогии с [9, 10]):

$$\tilde{x}(t, x_0) = \sum_{j=1}^{M_t} a_j(x_0) \psi_j(t) = \sum_{j=1}^{M_t} \sum_{l=1}^{M_x} b_{jl} \lambda_l(x_0) \psi_j(t) = \mathbf{\Psi}^\top(t) \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}(x_0), \quad (10)$$

где  $\mathbf{\Psi}^\top(t_{(k)}) \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}(x_{0(m)}) = x_{(mk)}$  — характеристические условия интерполяции.

Параметры  $M_t$  и  $M_x$  выбираются таким образом, чтобы данное решение описывало с требуемой точностью поведение ДУ в области  $G$ . Следует помнить, для многих ДУ зависимость точного решения  $x(t, x_0)$  от  $x_0 \in G_{x_0}$  является слабо выраженной (достаточно гладкой), что существенно снижает объём ( $M_x$ ) сетки интерполяции по  $x_0$  и упрощает процедуру отыскания коэффициентов  $b_{jl}$ , а соответственно и приближённого решения  $\tilde{x}(t, x_0)$ . Для минимизации погрешности данного алгоритма узлы интерполяции  $x_{0(m)}$  и  $t_{(k)}$  можно выбирать таким образом, чтобы они совпадали с корнями многочленов Чебышева [11–13]:

$$\begin{cases} x_{0(m)} = 2^{-1} \{d + c - (d - c) \cos [(2M_x)^{-1}(2m - 1)\pi]\}, & m = \overline{1, M_x}, \\ t_{(k)} = 2^{-1} \{2t_0 + T(1 - \cos [(2M_t)^{-1}(2k - 1)\pi])\}, & k = \overline{1, M_t}. \end{cases} \quad (11)$$

Если при построении решения использовать интерполяцию на основе многочленов Лагранжа, то формула (10) принимает вид

$$\tilde{x}(t, x_0) = \sum_{m=1}^{M_x} \sum_{k=1}^{M_t} x_{(mk)} L_m(x_0) L_k(t), \quad (12)$$

где  $L_m(x_0) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq m}}^{M_x} (x_0 - x_{0(r)}) (x_{0(m)} - x_{0(r)})^{-1}$ ,  $L_k(t) = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{M_t} (t - t_{(s)}) (t_{(k)} - t_{(s)})^{-1}$ .

Формула (12) соответствует двумерной интерполяции, что приводит к следующей оценке для невязки (максимума отклонения в области  $G$ ) между точным и приближённым решениями (для детерминированного случая, когда величины  $x_{(mk)}$  заданы точно):

$$\varepsilon = \max_{t, x_0} |x(t, x_0) - \tilde{x}(t, x_0)| \leq \frac{D_t}{M_t!} \zeta_t + \frac{D_x}{M_x!} \zeta_x + \frac{D_{tx}}{M_t! M_x!} \zeta_{tx}, \quad (13)$$

где

$$D_t = \max_{t, x_0} \left| \frac{\partial^{M_t}}{\partial t^{M_t}} x(t, x_0) \right|, \quad D_x = \max_{t, x_0} \left| \frac{\partial^{M_x}}{\partial x_0^{M_x}} x(t, x_0) \right|, \quad D_{tx} = \max_{t, x_0} \left| \frac{\partial^{M_t + M_x}}{\partial t^{M_t} \partial x_0^{M_x}} x(t, x_0) \right|,$$

$$\zeta_t = \max_t \left| \prod_{k=1}^{M_t} (t - t_{(k)}) \right|, \quad \zeta_x = \max_{x_0} \left| \prod_{m=1}^{M_x} (x_0 - x_{0(m)}) \right|,$$

$$\zeta_{tx} = \max_{t, x_0} \left| \left[ \prod_{k=1}^{M_t} (t - t_{(k)}) \right] \left[ \prod_{m=1}^{M_x} (x_0 - x_{0(m)}) \right] \right|.$$

В общем случае (когда величины  $x_{(mk)}$  заданы с некоторой погрешностью) оценка величины  $\varepsilon$  осуществляется из следующих соображений. Пусть невязка правой части уравнения (1) в области  $G$  на точном и приближённом решениях не превышает заданного  $\mu > 0$  (это можно установить из физических соображений и по экспериментальным данным). Кроме того, полагаем, что для любого  $x_0 \in G_{x_0}$ , не совпадающего ни с одним из узлов интерполяции  $\{x_{0(m)}\}_{m=1}^{M_x}$ , точное  $x(t, x_0)$  и приближённое  $\tilde{x}(t, x_0)$  решения имеют при  $t_0$  невязку  $|\tilde{x}(t_0, x_0) - x(t_0, x_0)| = |\tilde{x}_0 - x_0| \leq \varepsilon_0$ . Тогда для искомой невязки  $\varepsilon$  на всём множестве  $G$  справедлива оценка

$$\varepsilon = \max_{t, x_0} |x(t, x_0) - \tilde{x}(t, x_0)| \leq \frac{\mu}{L_x} [q_0(T) - 1] + |\Delta x_0| q_0(T) \leq \left( \frac{\mu}{L_x} + \varepsilon_0 \right) q_0(T) - \frac{\mu}{L_x}, \quad (14)$$

где  $q_0(T) = \exp(L_x T)$ .

Соотношения (13) и (14) позволяют оптимизировать выбор параметров сеток при построении приближённого аналитического решения уравнения (1), описывающего поведение ДО в области  $G = G_{x_0} \times G_t$ , и организации эксперимента для его активной идентификации. Опираясь на работы [11–13], можно также оценить вклад наследственной погрешности и погрешности округлений в результирующую ошибку построения этого решения.

Для идентификации ДО по измерениям (4) (общий случай) сначала необходимо сформировать алгоритм оптимального оценивания ОИК и ЧХ с учётом (6)–(8).

**Оценивание числовых характеристик на опорных интегральных кривых с учётом ошибок измерений.** Оценим ЧХ по измерениям (4), относящимся к  $m$ -й ОИК без привлечения информации о начальном условии  $x_{0(m)}$ . С учётом (10) имеем  $\mathbf{X}_{(m)} = \mathbf{\Psi}^\top \mathbf{B}_{(m)} \mathbf{\Lambda}(x_{0(m)})$ , где  $\mathbf{\Psi} = [\psi_{jn}, j = \overline{1, M_t}, n = \overline{0, N}]$  — матрица отсчётов  $\psi_{jn} = \psi_j(t_n)$ . В силу линейности функционала  $\omega \in \Omega$  условие несмещённости (7) теперь можно представить так:

$$\mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{X}_{(m)} = \omega\{x(t, x_{0(m)})\} = [\omega\{\mathbf{\Psi}(t)\}]^\top \mathbf{B}_{(m)} \mathbf{\Lambda}(x_{0(m)}) = \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{\Psi}^\top \mathbf{B}_{(m)} \mathbf{\Lambda}(x_{0(m)}) = \omega_{0(m)},$$

$$m \in \overline{1, M_x}, \quad (15)$$

где  $\omega\{\mathbf{\Psi}(t)\} = [\omega\{\psi_j(t)\}, j = \overline{1, M_t}]^\top$  — вектор значений функционала  $\omega$  на базисных функциях  $\psi_j(t)$  интегральной кривой.

Из (15) вытекает окончательное условие несмещённости

$$\mathbf{\Psi} \mathbf{P}_{(m)} = \omega\{\mathbf{\Psi}(t)\}, \quad m \in \overline{1, M_x}. \quad (16)$$

Поскольку необходимо, чтобы  $\omega\{h_{(m)}(t)\} = \omega\{\mathbf{Z}_{(m)}^\top \mathbf{\Theta}(t)\} = \mathbf{Z}_{(m)}^\top \omega\{\mathbf{\Theta}(t)\} = \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{H}_{(m)} = 0$ , то условие инвариантности (8) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{\Theta} \mathbf{P}_{(m)} = [\mathbf{0}]_{M_h \times 1}, \quad m \in \overline{1, M_x}, \quad (17)$$

где  $[\mathbf{0}]_{M_h \times 1}$  — нулевой вектор-столбец размерности  $M_h \times 1$ ,  $\Theta = [\theta_{pn}, p = \overline{1, M_h}, n = \overline{0, N}]$  — матрица отсчётов базисных функций сингулярной помехи.

Задача нахождения оптимальной оценки  $\mathbf{P}_{(m)}^*$  вектора  $\mathbf{P}_{(m)}$  решается методом условной оптимизации Лагранжа, при этом достигается минимум апостериорной дисперсии (6) с учётом ограничений (7) и (8). В итоге получаем алгоритм ОИНО применительно к ДО:

$$\mathbf{P}_{(m)}^* = \chi_{1(m)}^{-1} \Psi^\top (\Psi \chi_{1(m)}^{-1} \Psi^\top)^{-1} \omega \{ \Psi(t) \}, \quad (18)$$

$$\omega_{\mathbf{Y}(m)}^* = [\mathbf{P}_{(m)}^*]^\top \mathbf{Y}_{(m)} = \mathbf{Y}_{(m)}^\top \mathbf{P}_{(m)}^*, \quad (19)$$

где  $\chi_{1(m)}^{-1} = \chi_{2(m)} \mathbf{K}_{\Xi(m)}^{-1}$ ,  $\chi_{2(m)} = \mathbf{E} - \mathbf{K}_{\Xi(m)}^{-1} \Theta^\top (\Theta \mathbf{K}_{\Xi(m)}^{-1} \Theta^\top)^{-1}$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(N+1) \times (N+1)}$  — единичная матрица размерности  $(N+1) \times (N+1)$ .

Для апостериорной дисперсии оптимальной оценки  $\omega_{\mathbf{Y}(m)}^*$  ЧХ  $\omega_{0(m)}$  имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_{\omega_{\mathbf{Y}(m)}^*}^2 &= [\mathbf{P}_{(m)}^*]^\top \mathbf{K}_{\Xi(m)} \mathbf{P}_{(m)}^* = \\ &= [\omega \{ \Psi(t) \}]^\top \mathbf{W}_{1(m)} \Psi (\chi_{1(m)}^{-1})^\top \mathbf{K}_{\Xi(m)} \chi_{1(m)}^{-1} \Psi^\top \mathbf{W}_{2(m)} \omega \{ \Psi(t) \}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\mathbf{W}_{1(m)} = [\Psi (\chi_{1(m)}^{-1})^\top \Psi^\top]^{-1}$ ,  $\mathbf{W}_{2(m)} = [\Psi \chi_{1(m)}^{-1} \Psi^\top]^{-1}$ .

Усреднённая методическая погрешность  $\Delta_{\omega(m)}$  оценивания ЧХ  $\omega_{0(m)}$ , обусловленная тем, что в (10) не учитывается «хвост»  $\Delta(t, x_{0(m)}) = x(t, x_{0(m)}) - \Psi^\top(t) \mathbf{B}_{(m)} \Lambda(x_{0(m)})$  бесконечного ряда, равна

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega(m)} &= M [\omega_{0(m)} - \omega_{\mathbf{Y}(m)}^*] = M [\omega \{ \Psi^\top(t) \mathbf{B}_{(m)} \Lambda(x_{0(m)}) \} + \\ &+ \omega \{ \Delta(t, x_{0(m)}) \} - \omega_{\mathbf{X}(m)}^* - \omega_{\Delta(x_{0(m)})}^* - \omega_{\mathbf{H}(m)}^* - \omega_{\Xi(m)}^*], \end{aligned}$$

где  $\omega_{\mathbf{X}(m)}^* = \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{X}_{(m)}$ ,  $\Delta(x_{0(m)}) = [\Delta(t_n, x_{0(m)})]$ ,  $n = \overline{0, N}]^\top$ ,  $\omega_{\mathbf{H}(m)}^* = \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{H}_{(m)}$ ,  $\omega_{\Xi(m)}^* = \mathbf{P}_{(m)}^\top \Xi_{(m)}$ ,  $M[\cdot]$  — символ математического ожидания.

Поскольку  $\omega \{ \Psi^\top(t) \mathbf{B}_{(m)} \Lambda(x_{0(m)}) \} = \omega_{\mathbf{X}(m)}^*$  (условие несмещённости),  $\omega_{\mathbf{H}(m)}^* = \mathbf{P}_{(m)}^\top \mathbf{H}_{(m)} = 0$  (условие инвариантности) и  $M[\Xi_{(m)}] = [\mathbf{0}]_{(N+1) \times 1}$  (шум является центрированным), то имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega(m)} &= M [\omega \{ \Delta(t, x_{0(m)}) \} - \mathbf{P}_{(m)}^\top \Delta(x_{0(m)}) - \mathbf{P}_{(m)}^\top \Xi_{(m)}] = \\ &= \omega \{ \Delta(t, x_{0(m)}) \} - \mathbf{P}_{(m)}^\top \Delta(x_{0(m)}). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, методическая погрешность оценивания в среднем определяется значением функционала на «хвосте» бесконечного ряда и линейной оценкой этого значения.

Необходимые и достаточные условия существования и единственности решения (18), (19) таковы: наличие ненулевых матриц в правой части (18); существование обратных матриц  $\mathbf{K}_{\Xi(m)}^{-1}$ ,  $(\Theta \mathbf{K}_{\Xi(m)}^{-1} \Theta^\top)^{-1}$  и  $(\Psi \chi_{1(m)}^{-1} \Psi^\top)^{-1}$ ; совместность условий несмещённости и инвариантности при максимальном ранге  $M_t + M_h$ ; выполнение неравенства  $N+1 > M_t + M_h$ ,

что обеспечивает появление эффекта сглаживания первичных измерений. Выполнение данных условий на практике обеспечивается рациональным выбором базисов  $\{\psi_j(t)\}_{j=1}^{M_t}$  и  $\{\theta_p(t)\}_{p=1}^{M_h}$ , вычислительной  $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$  и измерительных  $\{\bar{x}_{0(m)}\}_{m=1}^{M_x}$ ,  $\{t_n\}_{n=0}^N$  сеток.

Для нахождения оптимальной оценки  $x_{0(m)}^*$  начального условия  $x_{0(m)}$  воспользуемся следующим приёмом. Если  $x_{0(m)}$  рассматривать как значение некоторого функционала  $\omega$  на решении  $x(t, x_{0(m)})$ , т. е.  $x_{0(m)} = \omega\{x(t, x_{0(m)})\}$ , то для формирования оценки  $x_{0(m)}^*$  можно воспользоваться выражениями (18), (19), положив в них  $\omega\{\Psi(t)\} = [\psi_j(t_0), j = \overline{1, M_t}]^\top$  (так, при  $t_0 = 0$  и степенном базисе  $\Psi(t) = [t^{j-1}, j = \overline{1, M_t}]^\top$  получим  $\omega\{\Psi(t)\} = [1, 0, \dots, 0]^\top$ ). В итоге,

$$\omega_{\mathbf{Y}(m)}^* = x_{0(m)}^* = [\mathbf{P}^*_{(m)}]^\top \mathbf{Y}(m) = \mathbf{Y}(m)^\top \mathbf{P}^*_{(m)}.$$

Следует заметить, что традиционно оценивание начального условия для нелинейного ДО осуществляется с привлечением процедур линеаризации нелинейных функций [2, 3]. В нашем случае такая процедура отсутствует, что является несомненным достоинством развиваемого метода. Для получения сглаженного значения  $x^*(t', x_{0(m)})$  точного решения  $x(t, x_{0(m)})$  в произвольный момент времени  $t' \in G_t$  достаточно в формуле (18) принять  $\omega\{\Psi(t)\} = \Psi(t') = [\psi_j(t'), j = \overline{1, M_t}]^\top$ .

**Идентификация и вычисление числовых характеристик по экспериментальным данным.** Далее оперируем с измерительной сеткой  $\{t_n\}_{n=0}^N$ , полагая, что её объёма достаточно для получения соответствующего сглаживающего эффекта и компенсации сингулярной помехи. Необходимо сформировать оценку  $\mathbf{B}^*$  матрицы  $\mathbf{B}$ , фигурирующей в решении (10), обеспечив выполнение характеристических условий  $\Psi^\top(t_{(k)})\mathbf{B}^*\mathbf{\Lambda}(x_{0(m)}) = x^*_{(mk)}$ , где  $x^*_{(mk)}$  — оптимальные оценки отсчётов  $x_{(mk)} = x(t_{(k)}, x_{0(m)})$  семейства ОИК. Для вычисления  $x^*_{(mk)}$  в процедуре (18), (19) достаточно положить  $\omega\{\Psi(t)\} = [\psi_j(t_{(k)}), j = \overline{1, M_t}]^\top$ . С учётом этого получим

$$x^*_{(mk)} = [\mathbf{P}^*_{(m)}]^\top \mathbf{Y}(m) = \mathbf{Y}(m)^\top \chi_{1(m)}^{-1} \Psi^\top (\Psi \chi_{1(m)}^{-1} \Psi^\top)^{-1} \Psi(t_{(k)}). \quad (22)$$

После того как найдены все оценки  $x^*_{(mk)}$ , из системы линейных алгебраических уравнений, описывающих характеристические условия, вычислим матрицу  $\mathbf{B}^*$ . Принимая во внимание (10), формируем оптимальное приближение к решению уравнения (1):

$$x^*(t, x_0) = \Psi^\top(t)\mathbf{B}^*\mathbf{\Lambda}(x_0), \quad x^*(t_0, x_0) = x_0^*. \quad (23)$$

На базе этого решения несложно построить дифференциальное уравнение  $dx^*/dt = f^*(t, x^*)$ , описывающее с заданной точностью поведение ДО в области  $G = G_{x_0} \times G_t$ . Близость точного и приближённого решений в этой области можно характеризовать невязкой  $\varepsilon = \max_{t, x_0} |x(t, x_0) - x^*(t, x_0)|$  (соответственно для оценки близости производных будем использовать обозначение  $\varepsilon^{(1)}$ ). Зная  $x^*(t, x_0)$ , можно также находить приближённые ЧХ  $\omega\{x^*(t, x_0)\} = \omega_0^*$  для области  $G$ .

Таким образом, мы добились идентификации рассматриваемого ДО, качество которой зависит от размера области  $G = G_{x_0} \times G_t$ , характеристик сеток  $\{t_n\}_{n=0}^N$ ,  $\{\bar{x}_{0(m)}\}_{m=1}^{M_x}$  и  $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$ , а также от значений корреляционных матриц  $\{\mathbf{K}_{\Xi(m)}\}_{m=1}^{M_x}$ . Для обоснования оптимальных параметров идентификации достаточно воспользоваться соотношениями (11), (13), (14), (20) и (21).



Полученные результаты могут быть использованы и тогда, когда ДО применяется по назначению. Пусть имеется выборка  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{H} + \mathbf{\Xi}$ , относящаяся к интегральной кривой  $x(t, x_0)$  с произвольным начальным условием  $x_0$ , и необходимо оценить некоторую ЧХ рассматриваемого ДО. Тогда с учётом (18) и (19) оптимальный весовой вектор, составляющий основу линейного оценивания ЧХ, находится по формуле  $\mathbf{P}^* = \mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{\Psi}^\top (\mathbf{\Psi} \mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{\Psi}^\top)^{-1} \omega \{ \mathbf{\Psi}(t) \}$ , а соответствующая оценка ЧХ определяется выражением  $\omega_{\mathbf{Y}}^* = [\mathbf{P}^*]^\top \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{P}^*$ .

**Некоторые обобщения.** Воспользовавшись результатами работ [9, 10], предложенный метод активной идентификации скалярного ДО можно обобщить и на многомерный случай, когда ДО описывается системой уравнений общего вида  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ , где  $\mathbf{x} = [x_l, l = \overline{1, L}]^\top$  — вектор фазовых координат ДО,  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_q, q = \overline{1, Q}]^\top$  — вектор произвольных постоянных параметров, принимающих значения из заданного множества допустимости  $G_\eta$ . Требуется на основе экспериментального семейства ОИК найти оценку  $\mathbf{x}^*(t, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta})$  точного решения  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta})$  этой системы уравнений, полагая, что выполняются ограничения:  $t \in G_t$ ,  $\mathbf{x}_0 \in G_{\mathbf{x}_0} = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_L, d_L]$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in G_\eta = [r_1, p_1] \times [r_2, p_2] \times \dots \times [r_Q, p_Q]$ , где  $[c_l, d_l], l = \overline{1, L}, [r_q, p_q], q = \overline{1, Q}$ . В области  $G_{\mathbf{x}_0} \times G_\eta$  считается заданной многомерная вычислительная сетка, число узлов которой соответствует количеству используемых ОИК. Наблюдения семейства ОИК фиксируются на измерительной сетке  $\{t_n\}_{n=0}^N$ .

По аналогии с [9] полагаем, что каждому узлу из сетки  $G_{\mathbf{x}_0} \times G_\eta$  соответствует своя ОИК, которую с помощью процедуры многомерной интерполяции можно описать с требуемой точностью на вычислительной временной сетке  $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$ . Общий объём узлов (по  $t, \mathbf{x}_0$  и  $\boldsymbol{\eta}$ ) должен быть достаточен для оценивания ЧХ и идентификации модели многомерного ДО на множестве  $G = G_{\mathbf{x}_0} \times G_t \times G_\eta$ .

Для детерминированного случая (пренебрегая ошибками измерений) с учётом гладкой зависимости точного решения  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta})$  от параметров  $\mathbf{x}_0$  и  $\boldsymbol{\eta}$  реализуется процедура многомерной интерполяции (по аналогии с (10)), которая позволяет построить приближённое аналитическое решение  $\tilde{x}_l(t, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta}) = \varphi_l(t, t_0, T, \alpha(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta}))$ ,  $l = \overline{1, L}$ , где  $\varphi_l(\cdot)$  — скалярная гладкая функция,  $\alpha(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta})$  — векторная функция, удовлетворяющая соответствующим характеристическим условиям интерполяции по параметрам  $\mathbf{x}_0$  и  $\boldsymbol{\eta}$ . По аналогии с (11)–(14) несложно оценить невязку точного и приближённого решений для области  $G = G_{\mathbf{x}_0} \times G_t \times G_\eta$  [11–13].

Для идентификации ДО на основе массива экспериментальных ОИК (общий случай) необходимо с помощью процедуры ОИНО найти оценки многомерных отсчётов всех ОИК для каждого узла вычислительной сетки  $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$ . Далее, по аналогии с (23) данные отсчёты используются при построении оптимального решения  $x_l^*(t, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta}) = \varphi_l^*(t, t_0, T, \alpha^*(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta}))$ ,  $l = \overline{1, L}$ . Применяя математический аппарат многомерной интерполяции [11–13], можно оценить потенциальные возможности идентификации ДО в области  $G = G_{\mathbf{x}_0} \times G_t \times G_\eta$ .

**Результаты моделирования.** Для оценки эффективности предлагаемого метода ограничимся ДО, описываемым уравнением Риккати специального вида. Известно, что уравнения Риккати широко используются на практике для тестирования различных методов, аналитического конструирования регуляторов, оценивания параметров и состояния различных систем и решения других задач [1, 14, 15].

Рассмотрим гипотетический ДО (пример выбран достаточно простым, чтобы иметь точное решение для последующего сравнительного анализа), описываемый уравнением (1), в котором  $f(t, x) = 4^{-1}(\cos^{-2} t - 32x^2) \sin t$ . Точное решение данного уравнения Риккати имеет вид  $x(t, x_0) = 8^{-1} \cos^{-1} t \{1 + 3(\tau_0 - 1) \cos^3 t [(\tau_0 + 2) \cos^3 t_0 - (\tau_0 - 1) \cos^3 t]^{-1}\}$ ,

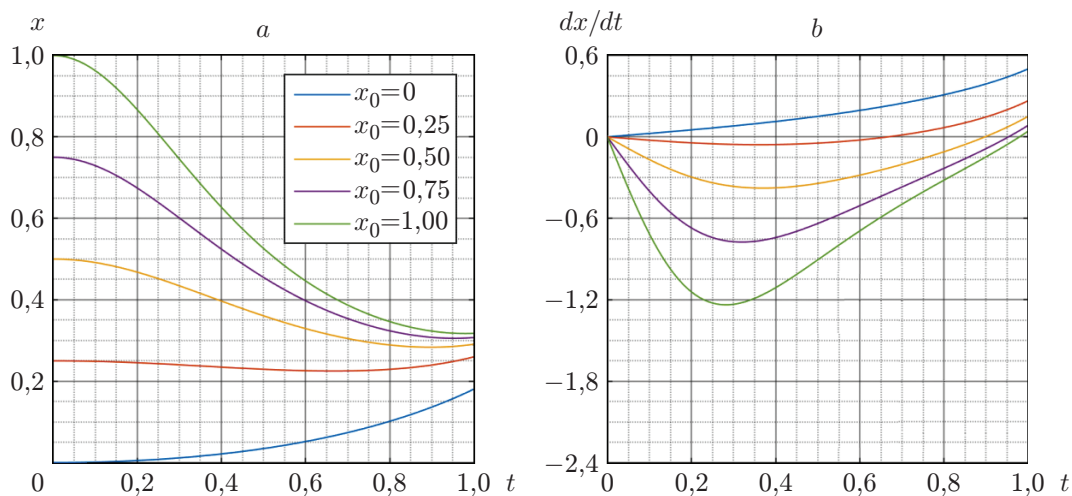


Рис. 1

где  $\tau_0 = 8x_0 \cos t_0$ . Эксперимент был реализован на пяти ОИК. Параметры эксперимента:  $c = 0$ ,  $d = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $T = 1$ ,  $M_x = 5$ ,  $M_t = 6$ ,  $M_h = 2$ ,  $N = 29$ ,  $\mathbf{K}_{\Xi(m)} = \mathbf{K}_{\Xi} = \sigma^2 \mathbf{E}_{30 \times 30}$ ,  $\sigma = 13 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mathbf{\Lambda}(x_0) = [x_0^{l-1}, l = \overline{1, 4}]^\top$ ,  $\mathbf{\Psi}(t) = [t^{j-1}, j = \overline{1, 5}]^\top$ ,  $\mathbf{\Theta}(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t)]^\top$ ,  $\theta_1(t) = \sin(\gamma t)$ ,  $\gamma = 19$ ,  $\theta_2(t) = \exp(\alpha t)$ ,  $\alpha = -7$ ,  $z_1 = 2, 3$ ,  $z_2 = 5$ . Все используемые сетки полагались равномерными.

На рис. 1 представлены зависимости, характеризующие ДО, а именно семейства ОИК (рис. 1, а) и их производных (рис. 1, б). Для рассматриваемого примера была построена матрица  $\mathbf{B}$ , фигурирующая в выражении (10):

$$\mathbf{B} = 10^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0,022 & 1,020 & 0,824 & -0,693 & 0,634 \\ 1,250 & -0,013 & 0,038 & 0,465 & -2,626 & 1,491 \\ 0 & -0,005 & -0,478 & -1,089 & 2,732 & -1,292 \\ 0 & 0,011 & -0,143 & 0,648 & -0,816 & 0,315 \\ 0 & -0,001 & 0,010 & -0,036 & 0,042 & -0,015 \end{bmatrix}.$$

Невязка точного  $x(t, x_0)$  и приближённого  $\tilde{x}(t, x_0)$  (построенного с учётом (10) и матрицы  $\mathbf{B}$ ) решений в рабочей области  $G = [0, 1] \times [0, 1]$  составляет  $\varepsilon = 3,8 \cdot 10^{-3}$  (или  $\varepsilon = 0,3885\%$ ). Соответственно в усечённой области интерполяции  $\bar{G} = [1/4, 3/4] \times [1/5, 4/5]$  имеем  $\varepsilon = 5,439 \cdot 10^{-4}$  (или  $\varepsilon = 0,2112\%$ ). Для невязки производных от точного и приближённого решений в области  $G$  получаем  $\varepsilon^{(1)} = 1,646 \cdot 10^{-1}$  (проценты вычислить нельзя, поскольку точное значение производной в точке  $(t = 0, x_0 = 1)$  равно нулю). Переходя к области  $\bar{G}$  имеем  $\varepsilon^{(1)} = 1,117 \cdot 10^{-2}$  (или  $\varepsilon^{(1)} = 1,705\%$ ). Эта невязка соответствует точке  $(t = 0,21, x_0 = 0,75)$ . Видим, что усечение области  $G$  существенно повышает точность расчётов.

Зависимости невязки  $\varepsilon$  от  $x_0$  (для ряда фиксированных значений  $t$ ) в области  $G$  представлены на рис. 2 (для детерминированного случая). Наблюдаем некоторый рост погрешности на краях сетки по  $x_0$ , что обусловлено известным в вычислительной математике эффектом Гиббса. Это необходимо учитывать при практической реализации предлагаемого метода.

Для построения решения  $x^*(t, x_0)$  были конкретизированы уравнения наблюдений (4) для всех ОИК, в которых флуктуационные помехи формировались датчиком случайных чисел (при  $\sigma = 13 \cdot 10^{-4}$ ), а сингулярная помеха, соответствующая двум базисным функ-

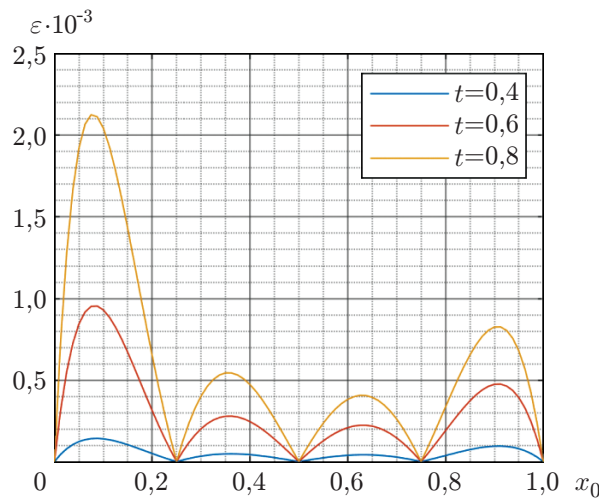


Рис. 2

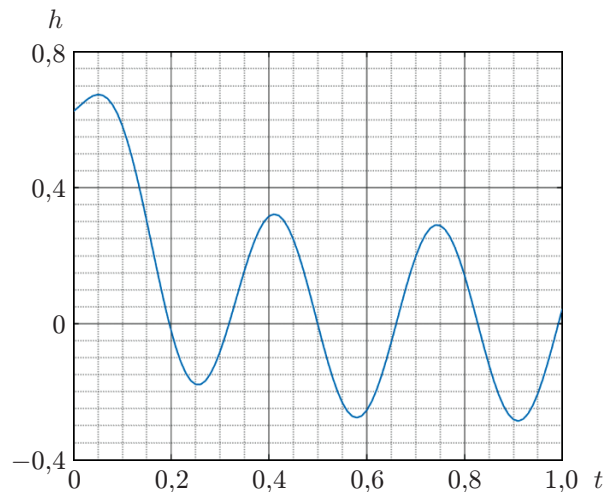


Рис. 3

циям, задавалась в виде кривой, представленной на рис. 3. Матрица  $\mathbf{B}^*$ , фигурирующая в оптимальном решении (23), приняла следующий вид:

$$\mathbf{B}^* = 10^{-1} \begin{bmatrix} 0,014 & -0,337 & 3,671 & -6,097 & 6,830 & -2,281 \\ 1,255 & 0,141 & -2,992 & 11,386 & -16,805 & 7,625 \\ -0,010 & -0,019 & 0,951 & -6,841 & 10,503 & -4,716 \\ 0,002 & 0,012 & -0,416 & 1,766 & -2,333 & 0,984 \\ 0 & -0,001 & 0,028 & -0,107 & 0,138 & -0,058 \end{bmatrix}.$$

Невязка между точным  $x(t, x_0)$  и оптимальным  $x^*(t, x_0)$  решениями в области  $G$  составляет  $\varepsilon = 3,1 \cdot 10^{-3}$  (или  $\varepsilon = 0,352\%$ ). Для усечённой области  $\bar{G}$  имеем меньшую невязку  $\varepsilon = 7,073 \cdot 10^{-4}$  (или  $\varepsilon = 0,212\%$ ).

На рис. 4 представлены зависимости невязок  $\varepsilon$  (рис. 4, а) и  $\varepsilon^{(1)}$  (рис. 4, б) от  $x_0$  (при использовании экспериментальных данных), которые характеризуют влияние флуктуационных помех на точность идентификации. Кроме того, показано, что увеличение числа узлов интерполяции по  $x_0$  нецелесообразно. Оптимальным для параметра  $x_0$  является число  $M_x \in [5, 6]$ , а для параметра  $t$  — число  $M_t \in [6, 7]$ .

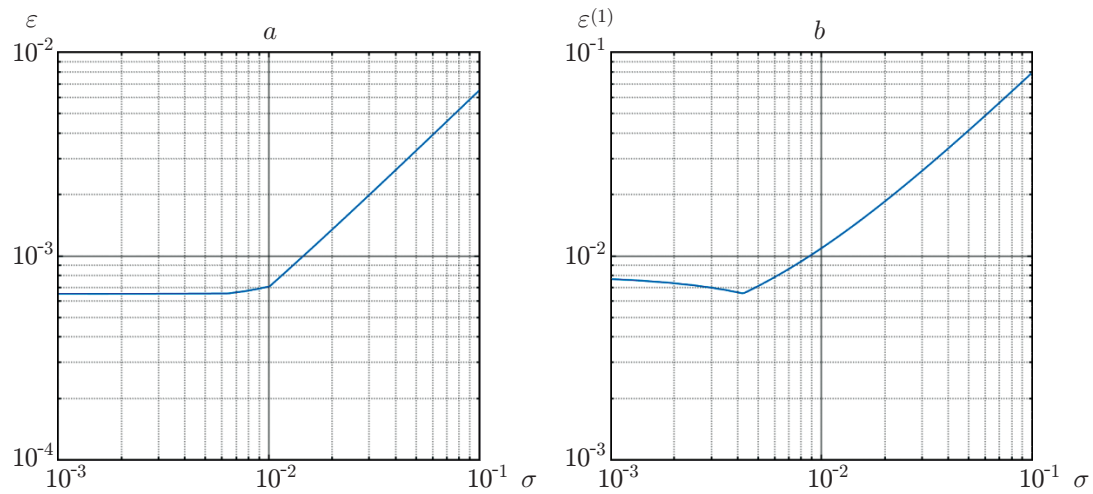


Рис. 4

Сформированы наблюдения (с учётом сингулярных и флуктуационных помех, а также принятых исходных данных), относящиеся к интегральной кривой с начальным условием  $x_0 = 0,475$ . Поставлена задача оценивания ЧХ, а именно производной от этой кривой, по результатам наблюдений при  $t = 0,5$  с учётом того, что точное значение производной равно  $-0,3126$ . С помощью алгоритма  $\omega_{\mathbf{Y}}^* = [\mathbf{P}^*]^\top \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{P}^*$  была получена оценка производной  $-0,3153$ , что соответствует невязке  $\varepsilon^{(1)} = 0,0027$  (или  $\varepsilon^{(1)} = 0,8710\%$ ). Кроме того, невязка, возникающая при оценивании производных на всей области  $\bar{G} \subset G$ , равна  $\varepsilon^{(1)} = 0,0109$  (или  $\varepsilon^{(1)} = 1,5701\%$ ).

Данный пример подтверждает возможность получения удовлетворительных результатов при решении задач идентификации модели ДО и вычисления его ЧХ на базе предлагаемого метода даже при малых объёмах интерполяционных сеток.

**Заключение.** Предлагаемый метод идентификации ДО по результатам экспериментальных данных (при наличии шумовых и сингулярных помех) позволяет построить приближённое аналитическое решение заранее неизвестного дифференциального уравнения, сформировать вектор-столбец или матрицу весовых коэффициентов процедуры ОИНО, учитывающих спектральный состав ОИК и сингулярной помехи, а также статистические характеристики флуктуационных погрешностей измерений. Метод не предполагает выполнения традиционных процедур линеаризации (даже если ДО является нелинейным), не требует расширения пространства состояний и не связан с необходимостью самостоятельного расчёта спектральных коэффициентов в линейных комбинациях ОИК и сингулярной помехи. Допускается возможность комбинирования данного метода с традиционными подходами к решению прикладных задач, связанных с идентификацией, оцениванием, фильтрацией, синтезом управлений и радиолокацией [1–5, 16, 17]. В последнем случае использование аналитического решения (на основе ОИК) дифференциального уравнения, соответствующего модели свободного движения управляемого ДО, позволит синтезировать квазиоптимальное управление этим объектом в реальном времени (в [1] показаны возможности метода ОИК).

Основными направлениями развития предлагаемого метода являются рассмотрение его применения к многомерным параметрическим ДО с оценкой вычислительных затрат и сходимости используемых алгоритмов, более строгое описание условий организации активного эксперимента и создание методики расчёта оптимальных параметров идентификации и оценивания ЧХ для ДО различного типа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский А. А.** Науковедение и состояние теории процессов управления. Обзор // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 3–19.
2. **Брандин В. Н., Васильев А. А., Худяков С. Т.** Основы экспериментальной космической баллистики. М.: Машиностроение, 1974. 340 с.
3. **Льюнг Л.** О точности модели в идентификации систем // Техническая кибернетика. 1992. № 6. С. 55–64.
4. **Булычев Ю. Г., Манин А. П.** Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000. 256 с.
5. **Булычев Ю. Г., Васильев В. В., Джуган Р. В. и др.** Информационно-измерительное обеспечение натуральных испытаний сложных технических комплексов /Под ред. А. П. Манина и В. В. Васильева. М.: Машиностроение-Полет, 2016. 440 с.
6. **Леонов В. А., Поплавский Б. К.** Фильтрация ошибок измерений при оценивании линейного преобразования полезного сигнала // Техническая кибернетика. 1992. № 1. С. 163–170.
7. **Булычев Ю. Г., Елисеев А. В.** Обработка измерений в условиях мультиструктурных помех // Автометрия. 2007. 43, № 5. С. 26–38.
8. **Булычев Ю. Г., Бородин Л. И., Головской В. А. и др.** Обработка данных измерений при случайной смене структур динамической помехи // Автометрия. 2009. 45, № 2. С. 14–21.
9. **Булычев Ю. Г.** Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. 31, № 9. С. 1305–1319.
10. **Булычев Ю. Г., Манин А. А., Жуковский А. Г.** Экспериментально-аналитический метод синтеза математических моделей неуправляемого движения космических аппаратов // Космические исследования. 1999. 37, № 3. С. 312–321.
11. **Иванов В. В.** Методы вычислений на ЭВМ. Киев.: Наук. думка, 1986. 584 с.
12. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
13. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.** Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
14. **Егоров А. И.** Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
15. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
16. **Булычев Ю. Г., Чепель Е. Н.** Квазиоптимальный метод решения задачи триангуляции в условиях априорной неопределённости // Автометрия. 2017. 53, № 6. С. 83–91.
17. **Булычев Ю. Г., Насенков И. Г., Ячменёв А. В.** Амплитудно-гиперболический метод пассивной локации источника излучения // Автометрия. 2018. 54, № 4. С. 43–50.

*Поступила в редакцию 04.10.2018*

*После доработки 11.11.2018*

*Принята к публикации 12.12.2018*