ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 535.42

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ РАСЧЁТА МИКРОСТРУКТУРЫ ГАРМОНИЧЕСКОЙ КИНОФОРМНОЙ ЛИНЗЫ

© **А. И. Антонов, Г. И. Грейсух, Е. Г. Ежов, Е. А. Рыжова**

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
440028, Пенза, ул. Германа Титова, 28
E-mail: grey@pguas.ru
subscribing_2002@mail.ru

Представленный в данной работе математический аппарат, базирующийся на требовании сохранения таутохронности в каждом из порядков дифракции гармонической киноформной линзы, положен в основу методики расчёта её микроструктуры. Методика обеспечивает ограничение относительного продольного хроматизма линзы заданным уровнем. Она позволяет также получить исходные параметры, необходимые для лучевого расчёта и оптимизации оптической системы с гармонической киноформной линзой, осуществляемых с помощью известных коммерческих компьютерных программ оптического проектирования.

Ключевые слова: гармоническая киноформная линза, гармоническая зона Френеля, пилообразная рельефно-фазовая микроструктура, условие таутохронности, продольный хроматизм.

DOI: 10.15372/AUT20190101

Введение. Термин «гармоническая» введён для дифракционной линзы, рельефно-фазовая пилообразная микроструктура которой работает в высоких порядках дифракции ($k \gg 1$) и имеет глубину рельефа H, существенно превышающую расчётную длину волны λ_0 [1–3]. Апертура такой киноформной линзы разбита на гармонические зоны Френеля, т. е. кольцевые зоны, расстояния от краёв каждой из которых до точки наблюдения (в данном случае фокальной точки F) различаются на величину, равную произведению целочисленного порядка гармоничности m на расчётную длину волны (рис. 1). При этом глубина рельефа должна обеспечивать равенство оптических длин лучей, проходящих через края каждой зоны. Если линза работает в k-м порядке дифракции, но $k = m$, то для i-й гармонической зоны ($i = 1, 2, 3, \ldots$) это равенство оптических длин имеет вид

$$Hn_{\lambda_0} + (i-1)m\lambda_0 + f_0^{(m)} = H + im\lambda_0 + f_0^{(m)}, \tag{1}$$

где H — глубина рельефа; n_{λ_0} и $f_0^{(m)}$ — показатель преломления материала подложки киноформной линзы и фокусное расстояние линзы в m-м дифракционном порядке на расчётной длине волны λ_0. Из уравнения (1) следует, что

$$H = m\lambda_0/(n_{\lambda_0} - 1). \tag{2}$$

Если таутохронность обеспечивается не только для краёв, но и для каждой зоны в целом, т. е. лучи, идущие через неё от нормально падающего волнового фронта до точки наблюдения, имеют одинаковую оптическую длину, то вся падающая на линзу энергия концентрируется в единственном фокусе F (дифракционная эффективность (ДЭ) равна

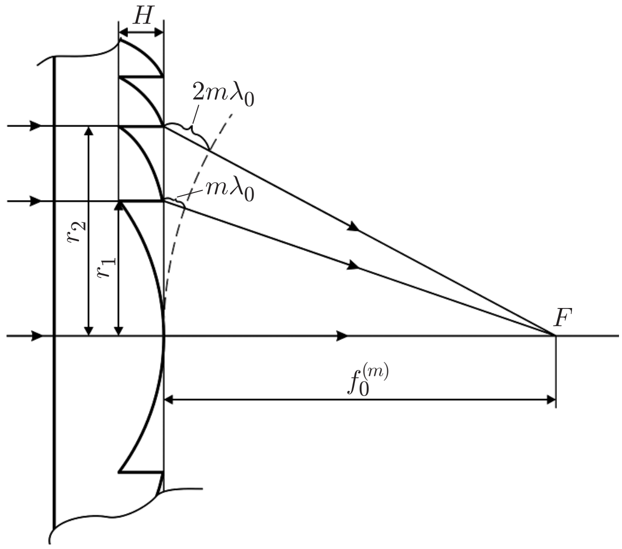

Рис. 1. Приосевой фрагмент микроструктуры гармонической киноформной линзы (r_i — расстояние от центра микроструктуры линзы до внешнего края i-й зоны)

единице). Требуемое равенство оптических длин лучей внутри каждой зоны обеспечивается за счёт так называемого согласованного, или коррелированного, профиля пилообразного микрорельефа, впервые предложенного в работе [4]. Сегодня технология прецизионного прессования позволяет массово тиражировать как пластмассовые, так и стеклянные дифракционные линзы с таким микрорельефом [5].

В [6] представлены результаты исследования гармонических киноформных линз, выполненные в рамках скалярной и строгой теорий дифракции. Показана возможность сохранения высокой ДЭ независимо от ширины рабочего спектрального диапазона и при значительных углах падения излучения на линзу, а также отмечено, что хроматизм линз управляем в весьма широких пределах и может оказаться меньшим, чем у самых лёгких кронов. При этом управление хроматизмом осуществляется путём разбиения рабочего спектрального диапазона на интервалы, ограниченные длинами волн λ_k, на которых расфокусировка в k-х дифракционных порядках отсутствует ($f_\lambda^{(k)} = f_0^{(m)}$), а ДЭ равна единице:

$$\lambda_k = \lambda_0 \frac{m}{k} \frac{n_{\lambda_k} - 1}{n_{\lambda_0} - 1}, \tag{3}$$

где n_{λ_0} и n_{λ_k} — показатели преломления материала подложки киноформной линзы на соответствующей длине волны. Формула (3) в [6] получена в оптико-геометрическом приближении из условия сохранения таутохронности в каждом из порядков дифракции. Её достоверность подтверждена расчётами в рамках строгой теории дифракции, основанной на решении системы уравнений Максвелла. Расчёты выполнялись с использованием компьютерной программы, реализующей строгий метод связанных волн RCWA (rigorous coupled-wave analysis) [7] и представленной в [8].

Опираясь на результаты [6], авторы разработали и предложили в данном исследовании необходимый математический аппарат и методику расчёта микроструктуры гармонической киноформной линзы, обеспечивающую, в частности, ограничение продольного хроматизма заданным уровнем.

1. Математический аппарат. Обратившись к (3), для крайних длин волн рабочего спектрального диапазона запишем

$$\lambda_{\max} = \lambda_0 \frac{m}{k} \frac{n_{\lambda_{\max}} - 1}{n_{\lambda_0} - 1}, \tag{4}$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_0 \frac{m}{k+N} \frac{n_{\lambda_{\min}} - 1}{n_{\lambda_0} - 1}. \tag{5}$$

В формуле (5) N — число интервалов, на которые длины волн единичной ДЭ (λ_k, λ_{k+1}, $\lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_{k+N}$) разбивают рабочий спектральный диапазон. В результате указанный диапазон перекрывается порядками дифракции от k до $k+N$, т. е. $\lambda_k = \lambda_{\max}$, $\lambda_{k+N} = \lambda_{\min}$.

Полагая параметры $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$, $n_{\lambda_{\max}}$, $n_{\lambda_{\min}}$ и N заданными, из выражений (4) и (5) получим

$$c = \frac{kB}{k+N}, \tag{6}$$

$$k = \frac{c}{B-c} N, \tag{7}$$

где c — отношение крайних длин волн рабочего спектрального диапазона:

$$c = \lambda_{\min}/\lambda_{\min}, \tag{8}$$

а B характеризует дисперсионные свойства материала подложки гармонической киноформной линзы:

$$B = \frac{n_{\lambda_{\min}} - 1}{n_{\lambda_{\max}} - 1}. \tag{9}$$

Наконец, из (4), положив $\lambda_0 = \lambda_{\max}$, найдём $m = k$. В общем случае расчётная длина волны может быть выбрана иной ($\lambda_0 \neq \lambda_{\max}$) и тогда выражение (4) даст обобщённую формулу для m:

$$m = \frac{\lambda_{\max} k (n_{\lambda_0} - 1)}{\lambda_0 (n_{\lambda_{\max}} - 1)}. \tag{10}$$

Что касается рабочего спектрального диапазона, то он, как при $\lambda_0 = \lambda_{\max}$ ($m = k$), так и при $\lambda_0 \neq \lambda_{\max}$ ($m \neq k$), будет перекрываться теми же порядками дифракции от k до $k+N$.

Далее обратимся к глубине рельефа. Комбинируя формулы (10) и (2), получим

$$H = \frac{\lambda_{\max} k}{n_{\lambda_{\max}} - 1}, \tag{11}$$

т. е. глубина рельефа от выбора расчётной длины волны гармонической киноформной линзы λ_0 не зависит, а определяется в конечном счёте максимальной длиной волны рабочего спектрального диапазона, номером низшего рабочего порядка дифракции и дисперсионными свойствами материала подложки. Таким образом, произвол в выборе λ_0 вполне допустим.

Что касается номера низшего рабочего порядка дифракции k и количества интервалов, на которые требуется разбить рабочий спектральный диапазон N, то эти параметры могут быть получены исходя, например, из максимально допустимого относительного продольного хроматизма гармонической киноформной линзы: $Q = \Delta f_{\max}/f_0^{(m)}$. Здесь, как и ранее, $f_0^{(m)}$ — фокусное расстояние линзы на расчётной длине волны при $k = m$, а $\Delta f_{\max}$ — максимально допустимое приращение фокусного расстояния, обусловленное отклонением рабочей длины волны от ближайшей к ней длины волны единичной ДЭ. Для того чтобы связать искомые параметры с относительным продольным хроматизмом, прежде всего, необходима формула для фокусного расстояния гармонической линзы на промежуточной длине волны $\lambda \neq \lambda_k$. Получим её в общем виде, опираясь на рис. 1 и используя формулу тонкой пропускающей дифракционной решётки.

На рис. 1 легко увидеть, что у i-й зоны расстояние от центра микроструктуры линзы до внешнего края зоны составляет

$$r_i = \sqrt{2if_0^{(m)}m\lambda_0 + (im\lambda_0)^2}\,. \tag{12}$$

Пусть луч на рабочей длине волны λ, идущий слева направо параллельно оптической оси, пересекает микроструктуру на высоте середины второго кольца $r = (r_1+r_2)/2$. Локальный период дифракционной решётки здесь $d = r_2 - r_1$. Синус угла дифракции в k-м дифракционном порядке $\sin\alpha = k\lambda/d$, а $\tan\alpha = r/f_\lambda^{(k)}$. Параксиальное приближение позволяет приравнять синус к тангенсу, и в результате получаем $r/f_\lambda^{(k)} = k\lambda/d$ или

$$f_\lambda^{(k)} = \frac{rd}{k\lambda} = \frac{(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}{2k\lambda} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2k\lambda}. \tag{13}$$

Комбинируя выражения (13) и (12) и пренебрегая слагаемым $(im\lambda_0)^2$, окончательно запишем

$$f_\lambda^{(k)} = \frac{2f_0^{(m)}m\lambda_0}{2k\lambda} = \frac{m}{k}\,\frac{\lambda_0}{\lambda}\,f_0^{(m)}. \tag{14}$$

Сразу же заметим, что формула (14), полученная исходя из несколько других соображений, впервые была опубликована в [9]. Данная формула позволяет дополнить результаты анализа коэффициента дисперсии гармонической линзы, приведённые в [6], и на этом основании достоверно связать номер низшего рабочего порядка дифракции и требуемое количество интервалов с относительным продольным хроматизмом.

В [6] отмечалось, что в обобщённом виде, не зависящем от типа оптического элемента, коэффициент дисперсии можно записать как

$$\nu = \frac{\Phi_{\lambda^*}}{\Phi_{\lambda 1} - \Phi_{\lambda 2}}, \tag{15}$$

где Φ_{λ^*}, $\Phi_{\lambda 1}$ и $\Phi_{\lambda 2}$ — значения оптической силы элемента (величины, обратной фокусному расстоянию) на соответствующей длине волны, причём $\lambda_1 < \lambda_2$. В знаменателе формулы (15) должна быть максимальная по модулю разность оптических сил элемента в пределах рабочего спектрального диапазона, а интервал между двумя идеально фокусируемыми длинами волн $\Delta\lambda$ растёт, что следует из формулы (3), от коротковолнового края рабочего спектрального диапазона к длинноволновому. Поэтому за максимальную и минимальную длины волн, приводящие к максимальной разнице оптических сил, следует принять

$$\lambda 2 = \lambda_{\max} = \lambda_k; \qquad \lambda 1 = \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}. \tag{16}$$

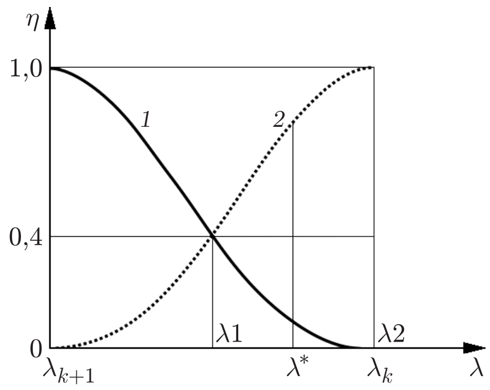

Рис. 2. Зависимости ДЭ от длины волны в $(k+1)$-м (*1*) и k-м (*2*) дифракционных порядках

Тогда центральной длиной волны в соответствии с рис. 2 окажется

$$\lambda^* = \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2} = \frac{1,5\lambda_k + 0,5\lambda_{k+1}}{2}. \tag{17}$$

Учитывая, что на длине волны λ_1 вклад в формируемое гармонической киноформной линзой изображение k-го и $(k+1)$-го дифракционных порядков одинаков (одинаковы ДЭ в этих порядках), коэффициент дисперсии следует оценить для обоих порядков дифракции. Используя формулы (14), (16) и (17), соответствующие оптические силы запишем в виде

$$\Phi_{\lambda_2} = \frac{k\lambda_k}{R}; \quad \Phi_{\lambda^*} = \frac{k(1,5\lambda_k + 0,5\lambda_{k+1})}{2R}, \quad \Phi^{(P)}_{\lambda 1} = \frac{(k+P)(\lambda_k + \lambda_{k+1})}{2R}. \tag{18}$$

Здесь $R = m\lambda_0 f_0^{(m)}$, $P = 0$ для дифракционного порядка k и $P = 1$ для следующего за ним дифракционного порядка $k+1$. В результате в соответствии с формулой (15) для дисперсий гармонической киноформной линзы (HKL) получим

$$\nu^{(P)}_{\text{HKL}} = \frac{\Phi_{\lambda^*}}{\Phi^{(P)}_{\lambda_1} - \Phi_{\lambda_2}} = \frac{1}{2}\,\frac{k(3\lambda_k + \lambda_{k+1})}{(k+P)\lambda_{k+1} - (k-P)\lambda_k}. \tag{19}$$

При $P = 0$ формула (19) совпадает с соответствующей формулой, представленной в [6], и сам коэффициент дисперсии $\nu^{(0)}_{\text{HKL}} < 0$. При $P = 1$ дисперсия $\nu^{(1)}_{\text{HKL}} > 0$, а модуль $\nu^{(0)}_{\text{HKL}}$ незначительно отличается от $\nu^{(1)}_{\text{HKL}}$. Два равноценных и противоположных по знаку коэффициента дисперсии, присущие одной и той же гармонической киноформной линзе, — ещё одно свойство, принципиально отличающее эту линзу от оптических элементов всех других типов.

Указанное свойство легко объяснимо, так как приращения фокусного расстояния, обусловленные отклонением длины волны λ_1 от λ_2 в k-м и $(k+1)$-м порядках ($\Delta f^{(0)}$ и $\Delta f^{(1)}$), противоположны по знаку. Действительно, используя формулы (18) для максимального относительного продольного хроматизма, нетрудно получить

$$\frac{\Delta f^{(P)}}{f_0^{(m)}} = m\lambda_0\Big(\frac{2}{(k+P)(\lambda_k + \lambda_{k+1})} - \frac{1}{k\lambda_k}\Big). \tag{20}$$

Анализ этого выражения показывает, что $\Delta f^{(0)}$ и $\Delta f^{(1)}$ не только противоположны по знаку, но и равны по модулю. Поэтому для вывода формулы связи номера низшего рабочего порядка дифракции с допустимым относительным продольным хроматизмом можно использовать выражение (20) при $P = 0$:

$$Q = \frac{\Delta f^{(0)}}{f_0^{(m)}} = m\lambda_0\Big(\frac{1}{0,5k(\lambda_k + \lambda_{k+1})} - \frac{1}{k\lambda_k}\Big). \tag{21}$$

Учитывая допустимость произвольного выбора расчётной длины волны для упрощения формулы (21), положим $\lambda_0 = \lambda_k$, $m = k$ и в результате будем иметь

$$Q = \frac{\lambda_k}{0,5(\lambda_k + \lambda_{k+1})} - 1. \tag{22}$$

Далее, выражая с помощью формулы (3) λ_{k+1} через λ_k и учитывая, что эти длины волн при $k \gg 1$ различаются незначительно, т. е. полагая $n_{\lambda_{k+1}} - 1 \approx n_{\lambda_k} - 1$, приведём (22) к виду $Q \approx 1/(2k + 1)$ и получим

$$k \approx \frac{1 - Q}{2Q}. \tag{23}$$

Что касается количества интервалов, на которые требуется разбить рабочий спектральный диапазон, то в соответствии с выражением (7)

$$N = \frac{k(B - c)}{c}. \tag{24}$$

2. Методика расчёта. Опираясь на вышеприведённый математический аппарат, можно предложить следующий порядок расчёта микроструктуры гармонического киноформного элемента.

В качестве исходных параметров должны быть заданы крайние длины волн рабочего спектрального диапазона, показатель преломления используемого оптического материала на крайних длинах волн и максимально допустимый относительный продольный хроматизм киноформной линзы: $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\min}$, $n_{\lambda_{\max}}$, $n_{\lambda_{\min}}$, Q.

Расчёт микроструктуры целесообразно осуществлять в последовательности:

— с использованием выражения (23) найти отправное значение номера низшего рабочего порядка дифракции;

— отправное значение k может оказаться нецелым, и тогда его следует округлить к ближайшему целому:

$$k_R = \text{Round}\left(\frac{1 - Q}{2Q}\right);$$

— используя полученное значение k_R, найти в соответствии с выражением (24) количество интервалов, на которое следует разбить весь рабочий спектральный диапазон:

$$N_R = \text{Round}\left(\frac{k_R(B - c)}{c}\right);$$

— далее, с помощью выражений (6) и (8) нетрудно найти уточнённые значения (индекс А) параметра c и минимальной длины волны рабочего спектрального диапазона $\lambda_{\min}^{(\mathrm{A})}$:

$$c_{\mathrm{A}} = \frac{k_R B}{k_R + N_R}, \qquad \lambda_{\min}^{(\mathrm{A})} = c_{\mathrm{A}} \lambda_{\max};$$

— завершается расчёт микроструктуры определением глубины её пилообразного рельефа по формуле (11) с соответствующей заменой номера дифракционного порядка:

$$H = \frac{\lambda_{\max} k_R}{n_{\lambda_{\max}} - 1}.$$

Лучевой расчёт и оптимизация оптической системы, включающей дифракционный оптический элемент того или иного типа, проводятся, как правило, с использованием одной из коммерческих компьютерных программ оптического проектирования. Практически во всех из них дифракционный элемент описывается в рамках модели бесконечно тонкого фазового транспаранта, вносящего фазовую задержку в падающий на него волновой фронт. Одним из вариантов представления фазовой задержки, вносимой элементом с кольцевой микроструктурой, является применяемый в программе Zemax степенной ряд вида [10]

$$\psi(\rho) = M \sum_{j=1} A_j \rho^{2j}, \tag{25}$$

где M — номер рабочего дифракционного порядка; ρ — расстояние, отсчитываемое от оптической оси.

Оптическая сила элемента определяется коэффициентом A_1:

$$\Phi = -\frac{M \lambda_Z A_1}{\pi}, \tag{26}$$

а коэффициенты A_j при $j > 1$ являются коэффициентами асферических добавок. В выражении (26) λ_Z — расчётная длина волны, на которой задаются все коэффициенты A_j. За неё автоматически принимается так называемая главная длина волны, устанавливаемая пользователем для вычисления большинства параксиальных или фактических параметров оптической системы в целом, таких как положения зрачков, плоскости параксиального изображения и других. Это, как правило, не крайняя, а центральная длина волны рабочего спектрального диапазона.

В рассматриваемом случае гармонической киноформной линзы задача существенно облегчается показанной в разд. 1 допустимостью произвольного выбора её расчётной длины волны λ_0. При моделировании гармонической линзы бесконечно тонким транспарантом следует обратиться к выражению (10), заменив в нём k величиной k_R, а λ_0 ориентировочным значением главной длины волны λ_Z. Кроме того, необходимо принять во внимание, что в рамках модели бесконечно тонкого транспаранта дисперсионные свойства материала микроструктуры на фокусирующие и аберрационные свойства элемента не влияют, т. е. $(n_{\lambda_0} - 1)/(n_{\lambda_{\max}} - 1) = 1$. В результате можно найти входящий в выражение (25) номер рабочего дифракционного порядка, а по нему уточнить значение главной длины волны:

$$M = \mathrm{Round}\left(\frac{\lambda_{\max} k_R}{\lambda_Z}\right), \qquad \lambda_Z = \frac{\lambda_{\max} k_R}{M}.$$

Эти параметры совместно с найденным из габаритного расчёта оптической системы фокусным расстоянием гармонической киноформной линзы $f_{\lambda_Z}^{(M)}$ используются для получения первого коэффициента ряда фазовой задержки

$$A_1 = -\frac{\pi}{M\lambda_Z f_{\lambda_Z}^{(M)}}.$$

После оптимизации, направленной, в частности, на определение коэффициентов A_j при $j > 1$, могут быть найдены радиусы зон Френеля гармонической микроструктуры, которые являются действительными и положительными корнями уравнения $|\Psi(\rho)| = 2\pi i$. Заметим, что оптимизацию следует производить в режиме, позволяющем закреплять за дискретными длинами волн заданного спектрального диапазона соответствующие номера рабочих дифракционных порядков. Это даст возможность учитывать одновременно дисперсионные свойства всех элементов оптической системы, включая и гармонический киноформный элемент.

Заключение. Одно из важнейших позитивных свойств, отличающее гармоническую киноформную линзу от обычной киноформной, заключается в управляемом и существенно меньшем продольном хроматизме. Снижение относительного продольного хроматизма до требуемого уровня достигается выбором номера низшего рабочего порядка дифракции и связанного с ним количества интервалов, на которые разбивается рабочий спектральный диапазон гармонической линзы. Каждый из интервалов ограничен длинами волн, на которых расфокусировка (в соответствующих дифракционных порядках) отсутствует. В результате хроматизм определяется не шириной всего рабочего спектрального диапазона, как у обычного киноформа, а полушириной только одного интервала, примыкающего к длинноволновому краю рабочего спектрального диапазона.

Предложенный в данной работе математический аппарат, базирующийся на требовании сохранения таутохронности в каждом из рабочих порядков дифракции, положен в основу методики расчёта микроструктуры гармонической киноформной линзы, обеспечивающей ограничение относительного продольного хроматизма заданным уровнем. Кроме того, эта методика позволяет легко получить исходные параметры, необходимые для лучевого расчёта и оптимизации оптической системы с гармонической киноформной линзой, осуществляемых с использованием известных коммерческих компьютерных программ оптического проектирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sweeney D. W.** Harmonic diffractive lenses // Appl. Opt. 1995. **34**, N 14. P. 2469–2475.
2. **Харитонов С. И.** Геометрооптический расчёт фокального пятна гармонической дифракционной линзы // Компьютерная оптика. 2016. **40**, № 3. С. 331–337.
3. **Хонина С. Н.** Анализ фокусировки гармонической дифракционной линзой с учётом дисперсии показателя преломления // Компьютерная оптика. 2017. **41**, № 3. С. 338–347.
4. **Слюсарев Г. Г.** Оптические системы с фазовыми слоями // ДАН СССР. 1957. **113**, № 4. С. 780–782.
5. **Антонов А. И.** Дифракционные элементы для изображающих оптических систем // Автометрия. 2017. **53**, № 5. С. 4–16.
6. **Грейсух Г. И.** Гармоническая киноформная линза: дифракционная эффективность и хроматизм // Оптика и спектроскопия. 2018. **125**, № 2. С. 223–228.

7. **Moharam M. G.** Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings // JOSA. 1982. **72**, N 10. P. 1385–1392.
8. **Lyndin N. M.** Modal and C methods grating design and analysis software. URL: http://www.mcgrating.co (дата обращения: 15.10.2018).
9. **Kovatchev M.** Aberration characteristics of optical elements // Proc. SPIE. 1989, **1183**. P. 643–652.
10. **Geary J. M.** Introduction to Lens Design: With Practical ZEMAX Examples. Richmond: Willmann-Bell, Inc., 2002. 462 p.

Поступила в редакцию 19.10.2018
После доработки 01.12.2018
Принята к публикации 04.12.2018