

УДК 004.932, 539.3

ИЗМЕРЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛОКАЛЬНЫХ ВИХРЕЙ НА ПЛОСКОСТИ ДЕФОРМИРУЕМОГО МАТЕРИАЛА*

В. В. Кибиткин, А. И. Солодушкин, В. С. Плешанов

*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,
634055, г. Томск, просп. Академический, 2/4
E-mail: vvk@ispms.tsc.ru*

Рассмотрена задача нахождения центра вихря, его размеров и пространственного распределения смещений на основе плоского векторного поля. Вместо типичного сканирования контуром предложен алгоритм затравочных точек, а в качестве критерия определения центра вихревого течения используется удельная циркуляция. В целях повышения устойчивости алгоритма введён параметр, играющий роль порога. Методом Монте-Карло изучено влияние погрешности измерений на точность нахождения координат центра жёсткого поворота, а также установлена зависимость вероятности ложных тревог от уровня порога. Показано использование метода наименьших квадратов для нахождения пространственного распределения смещений. Данный подход продемонстрирован на примере реального векторного поля, измеренного перед вершиной магистральной трещины.

Ключевые слова: метод корреляции цифровых изображений, векторное поле, вихрь, погрешность, метод Монте-Карло, деформация, псевдоизображение.

DOI: 10.15372/AUT20180608

Введение. Практика экспериментальных исследований показывает, что при внешнем механическом воздействии твёрдое тело ведёт себя подобно вязкой жидкости. Движение малой частицы жидкости можно разложить на поступательное, деформационное и вращательное. Поступательная составляющая смещений представляет собой некоторый постоянный вектор для каждой точки исследуемой области. Она не имеет принципиального значения, поскольку не вносит вклад в деформацию. Вращательная составляющая также не связана с процессами деформации, а лишь отражает тот факт, что некоторая область материала (или образец) повернулась как целое на некоторый угол. Основным интерес вызывает необратимая деформация. Если сделанные в теоремах Гельмгольца предположения не выполняются, то становятся возможными процессы возникновения и разрушения вихрей. Здесь могут выполнять работу три главные причины: действующие силы не имеют потенциала, плотность «жидкости» не является константой, «жидкость» не идеальная, а вязкая [1].

Постановка задачи. На практике не раз поднимался вопрос о необходимости учёта вихревой составляющей при исследовании процессов деформации и разрушения материалов, однако техника измерений была недостаточно развита. В настоящее время метод корреляции цифровых изображений является наиболее практичным вследствие сравнительной простоты проведения измерений и обработки данных, хорошей точности и высокого пространственного разрешения [2–4]. Результатом измерений является векторное поле, которое количественно характеризует течение, развивающееся на поверхности материала за некоторый промежуток времени между двумя кадрами. Векторное поле может

*Работа выполнена в рамках государственного задания на 2018–2020 гг., тема III.23.1.3 (государственная регистрация № АААА-А16-116122010041-9).

содержать миллионы векторов, поэтому необходимо не только уметь идентифицировать области с вихревым характером течения [5], но и автоматически находить координаты центра отдельного вихря и оценивать его количественные характеристики. Такой подход позволит исследовать роль вихревого течения и подбирать технологические режимы для оптимизации микроструктуры и повышения механических свойств материала.

Таким образом, целью предлагаемого исследования является разработка алгоритмов измерения (расчёта) характеристик вихревых структур в деформируемом твёрдом теле с учётом погрешности измерений. Решение данной задачи разделим на несколько этапов. Сначала следует идентифицировать область векторного поля, занятого вихрем, затем найти его центр и границы, оценить пространственное распределение радиальной и тангенциальной составляющих и, наконец, методом Монте-Карло изучить влияние погрешности измерений на точность нахождения координат центра вихря.

Нахождение центра вихря и его границ. Ключевой характеристикой вихря является циркуляция Γ . Если циркуляция не равна нулю, то в данной области существует вихревое течение [1]. Она рассчитывается по формулам

$$\Gamma = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{V} dS = \oint_L (\mathbf{V} d\mathbf{l}). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{V}(x, y)$ — скорость течения на плоскости; S — площадь области, ограниченная контуром длиной L . Соотношение (1) отражает теорему Стокса.

Если векторное поле сканировать некоторым контуром и в каждом текущем положении рассчитывать значение циркуляции Γ , то в случае когда контур полностью попадает в область вихря, $\Gamma = \text{const}$. Это затрудняет нахождение координат центра вихря, поэтому в данной работе предлагается ввести удельную циркуляцию

$$\Gamma_m = \sum_k \oint_{L_k} (\mathbf{V} d\mathbf{l}) / \sum_k L_k, \quad (2)$$

где k — номер контура.

Пусть в эксперименте получено дискретное поле смещений $\mathbf{u}(x, y) = u_x(x, y)\mathbf{e}_x + u_y(x, y)\mathbf{e}_y$ с пространственным периодом T в глобальной декартовой системе координат (XOY) как результат течения материала за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Здесь $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ — продольные и поперечные смещения, \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y — единичные орты. Нормировав амплитуды смещений на Δt , можно перейти к скоростям. В данной работе мы предлагаем использовать алгоритм затравочных точек. Его идея заключается в следующем. На векторном поле некоторые точки объявляем затравочными с пространственным периодом T_S между ними. Принимая затравочную точку за центр вероятного вихря, формируем вокруг неё контур в виде квадрата, где его сторона составляет Ns векторов. Здесь Ns — нечётное число, $Ns \geq 7$. Точки вблизи центра и в самом центре не учитываем, чтобы исключить случай возможной сингулярности. С учётом того, что векторное поле представлено в декартовой системе координат дискретно, рассчитаем циркуляцию [6] по формуле

$$\begin{aligned} \Gamma_k = \oint_{L_k} (\mathbf{u}(x, y) d\mathbf{x}) &\approx \sum_{i=0}^0 \sum_{j=1}^{Ns-1} u_{x_j} \Delta x_j + \sum_{i=Ns}^{Ns} \sum_{j=1}^{Ns-1} u_{x_j} \Delta x_j + \\ &+ \sum_{j=0}^0 \sum_{i=1}^{Ns-1} u_{y_i} \Delta y_i + \sum_{j=Ns}^{Ns} \sum_{i=1}^{Ns-1} u_{y_i} \Delta y_i. \end{aligned} \quad (3)$$

Для упрощения расчётов векторы, попадающие на углы квадратов, не принимались во внимание. Учитывая $\Delta y_i = \Delta x_j = T$, формулу (3) можно переписать в виде

$$\Gamma_k = \left[\sum_{i=0}^0 \sum_{j=1}^{Ns-1} u_{x_j} + \sum_{i=N_s}^{Ns} \sum_{j=1}^{Ns-1} u_{x_j} + \sum_{j=0}^0 \sum_{i=1}^{Ns-1} u_{y_i} + \sum_{j=N_s}^{Ns} \sum_{i=1}^{Ns-1} u_{y_i} \right] T. \quad (4)$$

Здесь можно выделить составляющие циркуляции с положительным C_a^+ ($C_a^+ > 0$) и отрицательным C_a^- ($C_a^- < 0$) значениями ($\Gamma = C_a^+ + C_a^-$). За положительное направление вращения примем направление против часовой стрелки. Исходный размер контура в начале процедуры идентификации задавали $Ns = 7$, но при расчёте Γ_m ($\Gamma_m = \sum_k \Gamma_k / \sum_k L_k$) учитывали и вклад контура при $Ns = 5$. Полную длину всех контуров L_Σ находили по формуле $L_\Sigma = (Ns_{\max} - 3)(Ns_{\max} + 1)T$. Здесь Ns_{\max} — количество векторов контура наибольшего размера, принадлежащего локальному вихрю.

При обработке данных эксперимента следует учитывать, что каждый вектор поля измеряется с некоторой погрешностью. При расчёте циркуляции возможна ситуация, когда количество векторов, ориентированных в одном направлении (например, против часовой стрелки), соизмеримо с количеством векторов противоположного направления. Чтобы ограничить влияние погрешности и повысить достоверность результатов расчёта, введём параметр λ , который будет играть роль порога. Будем считать, что в некоторой области вихрь действительно существует, если бóльшая часть векторов контура имеет некоторое предпочтительное направление. Так, при положительном вихре $C_a^+ / |C_a^-| = \lambda > 1$, а при отрицательном вращении $|C_a^-| / C_a^+ = \lambda > 1$. При заранее заданном λ эти неравенства приобретают вид

$$\begin{aligned} C_a^+ + \lambda C_a^- &> 0 \quad (\text{положительное направление вращения}), \\ C_a^- + \lambda C_a^+ &< 0 \quad (\text{отрицательное направление вращения}). \end{aligned} \quad (5)$$

Если одно из условий (5) выполняется, то сохраняем значение циркуляции и переходим к следующему контуру большего размера ($Ns := Ns + 2$). Эта процедура повторяется до тех пор, пока условие (5) выполняется и при этом ни одна из границ контура не выходит за пределы исследуемого векторного поля. В таком случае рассчитываем и сохраняем значения циркуляции, удельной циркуляции, координаты центра вихря, его направление вращения и размер. Если ни одно из условий (5) не выполняется, это означает, что в данной области вихрь отсутствует и переходим к новой затравочной точке.

Рассмотрим выбор критерия для поиска координат центра вихря на примере модельного поля. Пусть в системе координат (XOY) задано векторное поле жёсткого поворота размером $(M - a) \times (M - a)$ и пространственным периодом $T = 1$:

$$u_x(x, y) = a_0 + a_1 y; \quad u_y(x, y) = b_0 + b_1 x, \quad (6)$$

где a_0, b_0, a_1, b_1 — константы, a — ширина области, где смещения равны нулю. Характеристика поворота $\omega_z = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) / 2 = (b_1 - a_1) / 2 = \text{const}$. Чтобы центр поворота находился в центре поля, задаём условия $a_0 = -Ma_1/2$, $b_0 = -Mb_1/2$. Пусть $M = 31$, $a = 5$, $a_1 = 0,1$, $b_1 = -0,15$. Тогда $a_0 = -3,5$, $b_0 = 5,25$ и максимальная длина векторов u_{\max} удовлетворяет неравенству $u_{\max} < 1,8$. С учётом данных констант векторное поле имеет вид, изображённый на рис. 1, а.

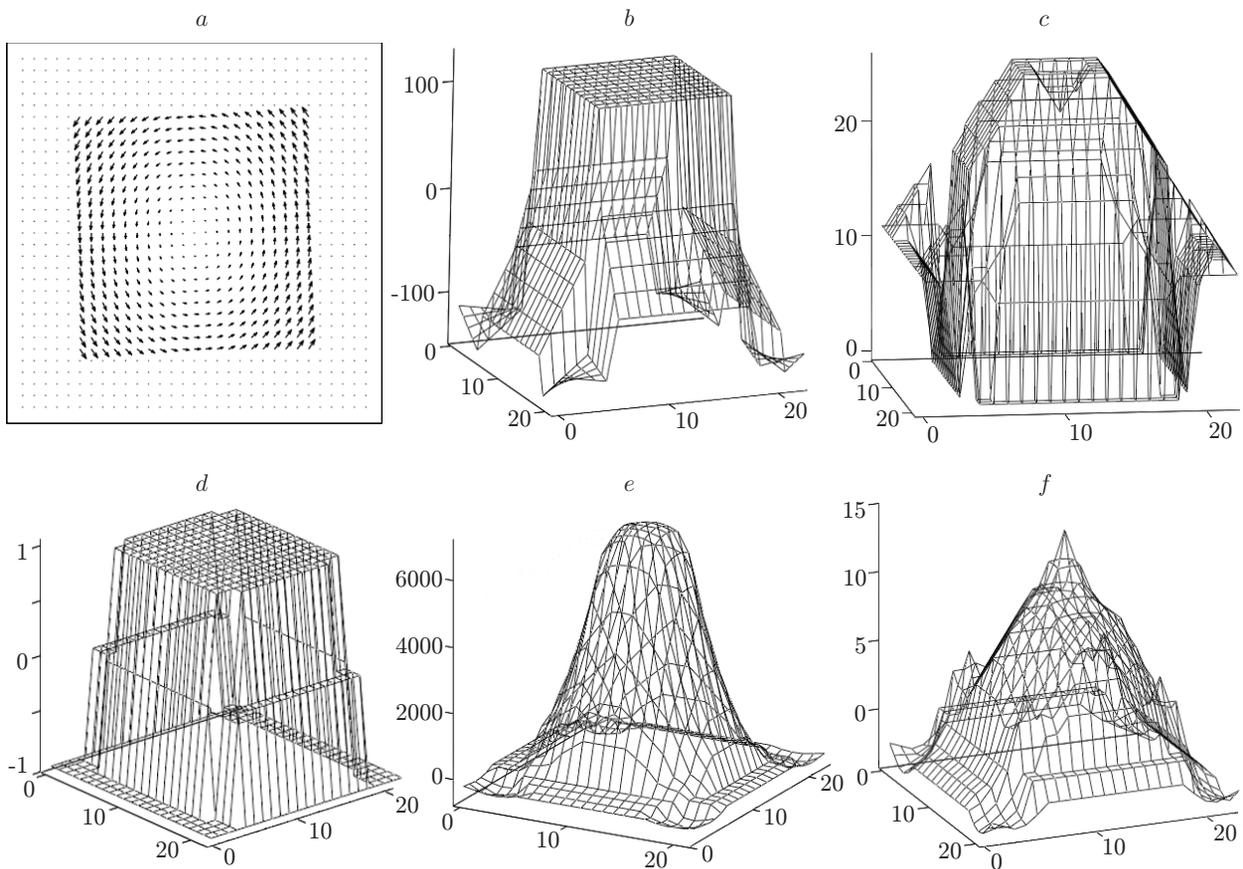


Рис. 1. Характеристики вихря: модельное векторное поле (а); пространственное распределение циркуляции, рассчитанное путём сканирования контуром (b); размер вихря (c); его знак (d); циркуляция (e) и удельная циркуляция (f), полученные с помощью алгоритма затравочных точек при $M = 31$, $N_s = 7$, $T = 1$, $T_S = 1$, $\lambda = 1,5$

Если данное векторное поле сканировать контуром, то в области вихря циркуляция постоянна (рис. 1, b), кроме значений вблизи границы, где имеет место переходный процесс, обусловленный конечным размером контура.

Использование алгоритма затравочных точек позволяет найти размер вихря (рис. 1, c), его знак (рис. 1, d), а также циркуляцию (рис. 1, e) и удельную циркуляцию (рис. 1, f). Видно, что размер вихря, определённый обоими алгоритмами, совпадает с заданным. На границе вихря регистрируется узкое кольцо вихревого течения, направленного в противоположную сторону вследствие граничного эффекта. Второй алгоритм, в принципе, позволяет оценить координаты центра вихря. Это обусловлено тем, что при удалении от центра меньшее количество точек даёт вклад в циркуляцию. Из рисунка следует, что наиболее эффективной является удельная циркуляция, поскольку в центре вихря она имеет ярко выраженный экстремум. При изменении знака вихря эта характеристика также меняет свой знак, поэтому при поиске центра следует брать её значения по модулю. Если вихрь направлен против часовой стрелки, то критерий знака равен 1 или -1 , если вращение идёт по часовой стрелке. Если вихря нет, то этот критерий равен нулю.

Нахождение пространственного распределения вихря. Исходя из физических соображений, будем считать, что вихрь размером $M \times N$ имеет центральную симметрию. Здесь M — количество строк. Найдём формулы перехода от декартовой системы координат (XOY) к полярной, где полюс совпадает с центром симметрии. Очевидно, име-

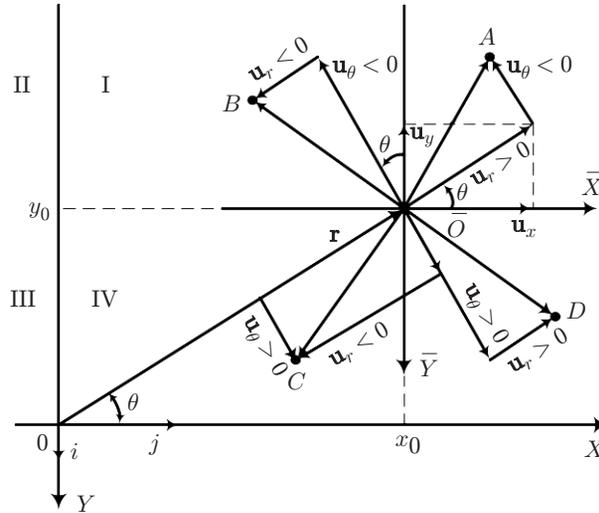


Рис. 2. Схема перехода к локальной полярной системе координат

ют место равенства $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$. Координаты центра определяются радиусом-вектором \mathbf{r} . Свяжем с точкой O декартову систему координат $(\overline{XO\overline{Y}})$ и полярную, где полюс \overline{O} совпадает с началом координат декартовой системы и с центром вихря, а полярная ось — с положительной полуосью $\overline{O\overline{X}}$ (рис. 2).

Видно, что радиус-вектор \mathbf{r} может находиться в любом из четырёх квадрантов (XOY) , а вектор смещения \mathbf{u} — в одном из квадрантов системы координат $\overline{XO\overline{Y}}$. Если вектор попадает в первый или четвёртый квадрант, то радиальную u_r и тангенциальную u_θ составляющие вектора нетрудно получить по формулам

$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad u_\theta = -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta.$$

В противном случае следует использовать формулы

$$u_r = (-1)(u_x \cos \theta + u_y \sin \theta), \quad u_\theta = (-1)(-u_x \sin \theta + u_y \cos \theta).$$

Здесь $\theta = \arctg \frac{y-(M-1)/2}{x-(N-1)/2}$, где $x \neq (N-1)/2$.

Пусть в полярной системе координат радиальные и тангенциальные смещения можно аппроксимировать полиномом второго порядка. Тогда пространственную зависимость радиальных смещений запишем в виде $u_r(r) = a_r r^2 + b_r r + c_r$, где a_r, b_r, c_r — радиальные константы, подлежащие определению. Для их нахождения применим метод наименьших квадратов. Поскольку данные представлены в дискретной форме, то функционал имеет вид

$$S = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (a_r r_{i,j}^2 + b_r r_{i,j} + c_r - (u_r)_{i,j})^2 \rightarrow \min, \quad (7)$$

где $r_{i,j}$ — длина радиуса-вектора к точке с координатами (i, j) ; $(u_r)_{i,j}$ — полученные из измерений данные радиальных смещений. Условие $S \rightarrow \min$ означает, что сумма квадратов отклонений должна быть минимальной. Тогда эти константы можно найти из условий

$$\partial S / \partial a_r = 0; \quad \partial S / \partial b_r = 0; \quad \partial S / \partial c_r = 0. \quad (8)$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$a_{11}a_r + a_{12}b_r + a_{13}c_r = b_1; \quad a_{21}a_r + a_{22}b_r + a_{33}c_r = b_2; \quad a_{31}a_r + a_{32}b_r + a_{33}c_r = b_3. \quad (9)$$

Здесь

$$a_{11} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} r_{i,j}^4; \quad a_{12} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} r_{i,j}^3; \quad a_{13} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} r_{i,j}^2; \quad a_{21} = a_{12}; \quad a_{22} = a_{13};$$

$$a_{23} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} r_{i,j}; \quad a_{31} = a_{13}; \quad a_{32} = a_{23}; \quad a_{33} = MN;$$

$$b_1 = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} r_{i,j}^2(u_r)_{i,j}; \quad b_2 = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} r_{i,j}(u_r)_{i,j}; \quad b_3 = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (u_r)_{i,j}.$$

Решение данной задачи уже не представляет труда. Однако следует учесть, что дискриминант системы не должен быть равен нулю, а число обусловленности должно обеспечивать необходимую погрешность. Аналогично находятся константы для тангенциальных смещений.

Выбор уровня порога. Решение данного вопроса покажем на примере модельного векторного поля, рассмотренного выше. Размер поля зададим $M = 71$, что соответствует $u_{\max} < 5,4$. Если полагать, что длина каждого вектора выражена в пикселях, то это приблизительно согласуется с реальными условиями измерений методом корреляции цифровых изображений, где алгоритм имеет субпиксельную точность.

Добавим каждой из составляющих вектора в каждой точке абсолютную погрешность (или шум) u_{er} , имеющую нормальное или равномерное распределение с размахом β :

$$u_x^e(x, y) = a_0 + a_1y + u_{\text{er}}; \quad u_y^e(x, y) = b_0 + b_1x + u_{\text{er}}. \quad (10)$$

Здесь $u_{\text{er}} = -\beta/2 + \beta \text{eps}(1)$ для равномерного распределения, где плотность вероятности ω является константой ($\omega = 1/\beta$) в диапазоне $-\beta/2 \leq u_{\text{er}} \leq \beta/2$, $\text{eps}(1)$ — случайное число с равномерным законом распределения ($0 \leq \text{eps}(1) \leq 1$). Для нормального распределения $u_{\text{er}} = u_{\text{er}}^n = \text{Gauss}(\mu = 0, \sigma^2 = (\beta/6)^2)$, где $\text{Gauss}(\mu, \sigma)$ — функция нормального распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 . Здесь $\beta = 6\sigma$ выбрали на основе правила «шести сигм». Плотность вероятности подчиняется соотношению $\omega(x) = \frac{\exp(-x^2/\sigma^2)}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Если при генерации случайное число x выходило за границы интервала $-\beta/2 \leq x \leq \beta/2$, то его заменяли ближайшим значением одной из границ.

После генерации зашумлённого вихревого векторного поля рассчитывали пространственное распределение удельной циркуляции при $T_S = 1$, по координатам её глобального экстремума находили координаты центра вихря и абсолютную погрешность ΔR . Эту процедуру повторяли 10 раз при разных уровнях шума ($0,01 \leq \beta \leq 200$) и порога ($0,01 \leq \lambda \leq 10$) (рис. 3, а). Видно, что выше некоторого предела погрешность неконтролируемо возрастает. Будем считать уровень шума допустимым, если $\Delta R \leq 2$, где абсолютная погрешность выражена в пикселях. Задав $\Delta R_{\text{th}} = 2$, построим переходные кривые $\beta_{\text{th}}(\lambda)$ (рис. 3, б). С одной стороны, при $\lambda \rightarrow 1$ для достоверной идентификации необходимо значительное количество векторов. С другой стороны, при высоком уровне порога резко возрастают требования к точности измерений. Чтобы найти компромисс, следует принимать во внимание вероятность ложных тревог.

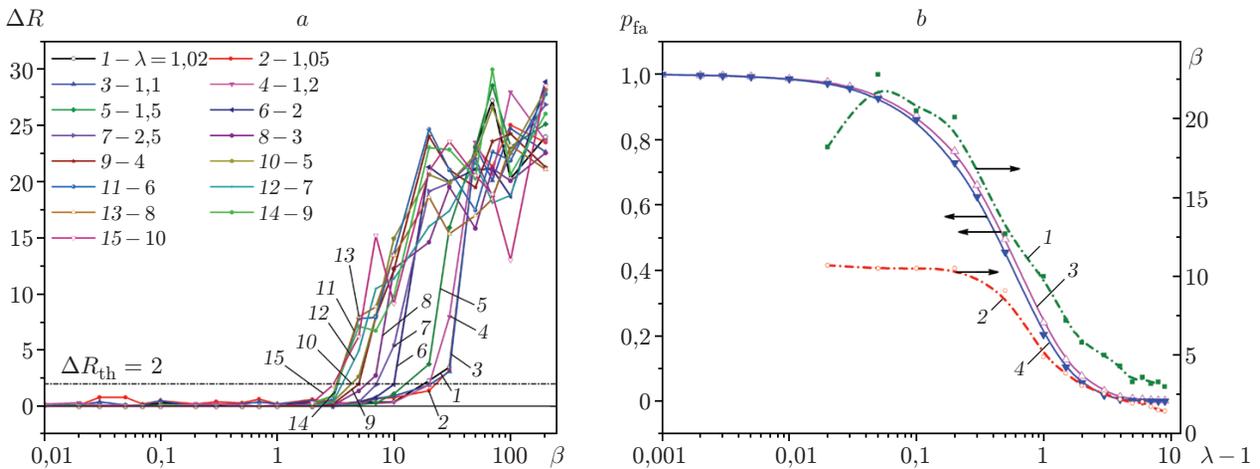


Рис. 3. Влияние шума на точность измерений: *a* — зависимости абсолютной погрешности ΔR от амплитуды шума β при пороге λ для нормального распределения; *b* — переходные кривые для нормального (1, 3) и равномерного (2, 4) распределений и соответствующие вероятности ложных тревог p_{fa}

Чтобы оценить данную вероятность, повторим процедуру и зададим поле, обусловленное только шумом, что означает, если программа идентифицирует в некоторой затравочной точке вихрь, то на самом деле это — ложная тревога. С учётом порога λ подсчитывали количество найденных вихрей и, относя их к количеству затравочных точек, определяли вероятность ложных тревог $p_{fa}(\lambda)$. Повторяя данный расчёт 10 раз и усредняя его, нашли искомое значение данной вероятности для нормального и равномерного распределений (см. рис. 3, *b*).

Очевидно, что вероятность ложных тревог слабо зависит от закона распределения и определяется порогом λ . При превышении удельной циркуляции в одном из направлений на 10 % вероятность ложных тревог составляет около 90 %, а если задать $\lambda = 2$, то $p_{fa} \approx 20$ %. Следует отметить, что излишнее завышение уровня порога приводит к потере деталей течения.

Результаты эксперимента. Покажем применение данного подхода на примере векторного поля, полученного в эксперименте. Исследования эволюции пластического течения сварных соединений стали 12X18H10T проводили в условиях многоциклового усталости методом корреляции цифровых изображений. Нагрузка составляла $\sigma = 55 \pm 55$ МПа, частота $f = 1,5 \text{ с}^{-1}$, число циклов до разрушения $N_{\Sigma} \approx 10^5$. Сварные соединения изготавливали путём автоматической точечной сварки двух тонких пластин толщиной 0,5 мм; диаметр контактной точки составлял около 4 мм. Изображения поверхности материала от оптического микроскопа Axiovert 25CA ($\times 50$) регистрировали камерой VEC-535 (2136×1602 пикселей, 8 разрядов) в рабочей части образца ($15 \times 5,2$ мм) с перекрытием.

Приведено изображение поверхности материала с распространяющейся трещиной (рис. 4, *a*) и соответствующее поле смещений (рис. 4, *b*). Пространственное распределение деформации представляет собой деформационную структуру. Его можно превратить в псевдоизображение следующим образом. Пусть деформация изменяется в некотором интервале, а яркость восьмиразрядного изображения варьируется в диапазоне $0 \leq I(x, y) \leq 255$. Разбив интервал деформации на 255 частей и сопоставив каждую из них с соответствующим значением яркости, получим инверсное восьмиразрядное псевдоизображение в градациях серого (рис. 4, *c*).

На рис. 4, *b* показано, что трещина уже стала магистральной, её берега раскрываются, а перед вершиной наблюдается сложное сочетание сдвигов и вихрей.

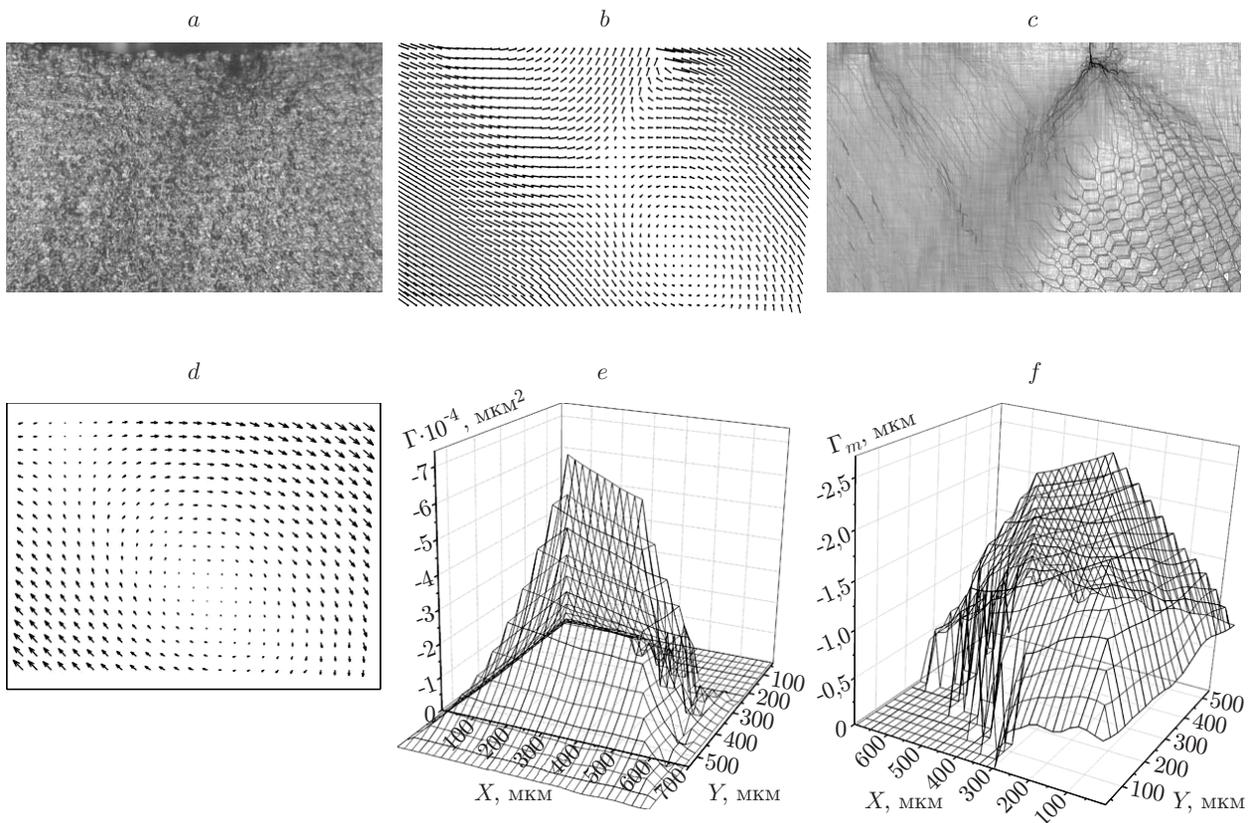


Рис. 4. Выбор области интереса: изображение трещины размером $2,4 \times 1,8$ мм (а); соответствующее векторное поле при $T = 40$ (b); деформационная структура, рассчитанная при $T = 1$ (c); поле перед вершиной трещины при $T = 30$ (d); циркуляция Γ (e); удельная циркуляция Γ_m при $T = 15$, $Td = 1$, $\lambda = 1,1$, $N = 91800$, $\Delta N = 300$ (f)

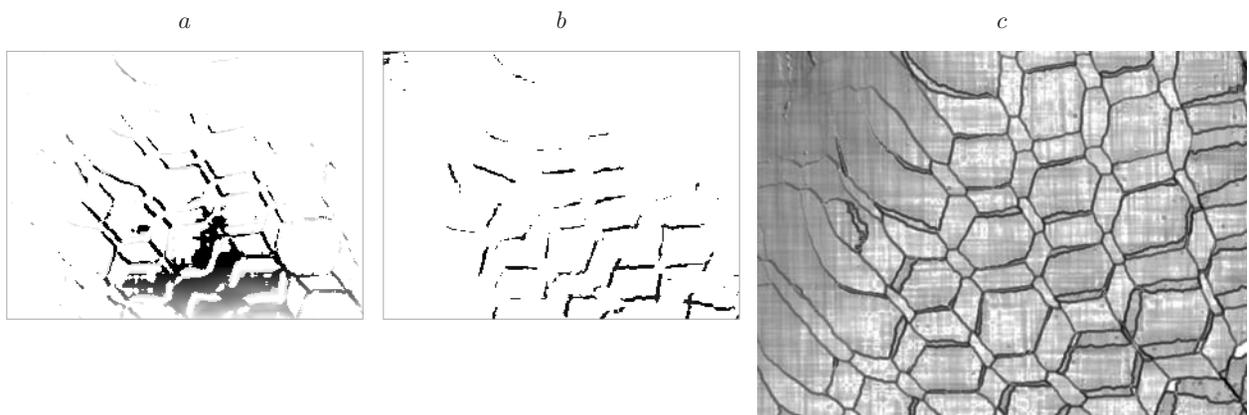


Рис. 5. Характеристики пластического течения: а — псевдоизображения удельной циркуляции, направленной по часовой стрелке и b — против неё; c — соответствующая деформационная структура перед вершиной трещины при $T = 1$, $\lambda = 1,2$, $Td = 2$

Рассмотрим часть векторного поля перед вершиной трещины (рис. 4, *d*), где размеры вырезанного участка составляют $0,72 \times 0,54$ мм, а его левый верхний угол совпадает с центром исходного изображения. Сравнительно высокие значения пространственного периода ($T > 10$) позволяют рассмотреть течение в целом. Видно, что на вихревое течение наложен сдвиг, а циркуляция и удельная циркуляция свидетельствуют, что центр вихревого течения находится на полосе данного сдвига (рис. 4, *e, f*). Если принять центр сдвига за центр вихря, то, используя изложенный выше подход, можно получить константы для радиальной и тангенциальной составляющих: $u_r = 2,1 \cdot 10^{-6}r^2 + 9 \cdot 10^{-5}r - 0,3$, $u_\theta = 4,9 \cdot 10^{-6}r^2 - 8,8 \cdot 10^{-4}r + 3,0$. Здесь все переменные даны в микрометрах.

Если провести те же расчёты при малом пространственном периоде, то проявятся тонкие детали (рис. 5). Отметим, что центры вихрей находятся, как правило, на границах элементов деформационной структуры, которые имеют форму сплюснутых шестигранников (рис. 5, *c*). Несмотря на то что на макроуровне преобладает вихревое течение по часовой стрелке, из рис. 5, *b* следует, что имеется система вихрей мезомасштабного уровня, ориентированных в противоположном направлении. Такого рода структуры обычно возникают в деформируемом твёрдом теле при появлении макромасштабных вихрей. Элементы структуры являются, очевидно, результатом самоорганизации сдвигов [7], где мезовихри играют аккомодационную роль.

Заключение. Разработан алгоритм определения координат центра вихря, его размеров и пространственного распределения смещений. Предложен устойчивый алгоритм затравочных точек и показан способ оценки погрешности измерений. Получена зависимость вероятности ложных тревог при идентификации вихря от уровня порога. Работа алгоритмов продемонстрирована на примере реального поля смещений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика /Под ред. И. А. Кибеля. М.: Физматлит, 1963. Ч. I. 583 с.
2. **Sutton M. A., Orteu J. J., Schreier H.** Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements: Basic Concepts, Theory and Applications. N. Y.: Springer, 2009. 332 p.
3. **Kibitkin V., Solodushkin A., Pleshanov V., Napryushkin A.** On a choice of input parameters for calculation the vector field and deformation with DIC // Measurement. 2017. **95**. P. 266–272.
4. **Титков В. В., Панин С. В., Любутин П. С., Чемезов В. О.** Исследование эффективности применения билатерального фильтра в задачах вычисления оптического потока // Автометрия. 2017. **53**, № 6. С. 57–66.
5. **Кибиткин В. В., Солодушкин А. И., Плешанов В. С., Чертова Н. В.** Критерии идентификации вихревых структур в деформируемом твёрдом теле // Физическая мезомеханика. 2013. **16**, № 2. С. 53–63.
6. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1967. Т. 2. 655 с.
7. **Kibitkin V. V., Solodushkin A. I., Pleshanov V. S.** Deformation structure analysis of material at fatigue on the basis of the vector field // AIP Conf. Proc. 2017. **1909**. 020082.

Поступила в редакцию 3 июля 2018 г.