

УДК 535.4

## РАСЧЁТ И АНАЛИЗ ИМПУЛЬСНОГО ОТКЛИКА ПРОЕКЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ

Ю. В. Чугуй

*Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН,  
630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41  
Новосибирский государственный университет,  
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2  
Новосибирский государственный технический университет,  
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru*

В рамках волновой оптики исследованы характеристики широко используемых на практике пространственно-неинвариантных проекционных систем телецентрического типа. В классе френелевских функций строго рассчитан импульсный отклик системы в зависимости от апертур проекционного объектива и фильтра. Установлено, что он состоит из двух компонент, одна из которых в основном определяет инвариантные свойства системы, а другая — неинвариантные. На базе предложенной нами ранее аппроксимации френелевской функции элементарными функциями впервые найдено в аналитическом виде выражение для импульсного отклика и исследовано его поведение при различных соотношениях апертур объектива и фильтра. Проанализирована корректность выбора параметров известных квазиинвариантных оптических систем. Для улучшения их пространственно-инвариантных характеристик дана рекомендация по выбору апертуры фильтра. Данный подход в отличие от известных оптико-геометрических позволяет получить достоверную информацию о характере преобразований волновых полей в рассматриваемых системах.

*Ключевые слова:* дифракция света, телецентрические проекционные системы, фурье-оптика, размерный контроль.

DOI: 10.15372/AUT20180604

**Введение.** Как известно, применяемые в практике оптического приборостроения проекционные системы телецентрического типа (с параллельным освещением на входе) являются пространственно-неинвариантными [1]. Вид импульсного отклика таких систем зависит от положения зондирующей точки на входе. Неинвариантные свойства этих систем обусловлены разнесением вдоль оптической оси плоскостей изображения источника света и апертурной диафрагмы проекционного объекта, что приводит, с одной стороны, к ограничению поля зрения системы до размеров апертуры проекционного объектива, а с другой — к изменению по полю полосы пространственных частот, пропускаемых оптической системой. Указанные эффекты (виньетирование пучков света) наиболее полно проявляются в телецентрических проекционных системах, не содержащих фильтры пространственных частот. Особенности формирования изображения в таких пространственно-неинвариантных системах изучены нами на примере полуплоскости [2].

Вместе с тем из геометрических и волновых подходов следует, что неинвариантные свойства проекционных систем можно заметно ослабить путём низкочастотной фильтрации спектра пространственных частот исходного объекта. Попытки улучшения инвариантных свойств проекционных систем с помощью низкочастотных бинарных фильтров, ограничивающих ширину полосы частот объекта, предпринимались в [3, 4]. Однако анализ полей и рекомендации по выбору оптимальных размеров фильтра и входного поля,

обеспечивающих максимальную информационную пропускную способность системы (произведение рабочего поля на ширину пропускаемых частот), производились в геометрическом приближении, что при прецизионных измерениях (например, размеров объектов) может приводить к неадекватным результатам.

В данной работе в рамках волновой оптики (в приближении Кирхгофа — Френеля) впервые строго рассчитан в классе френелевских функций (интегралов Френеля [5]) импульсный отклик проекционной пространственно-неинвариантной когерентно-оптической системы телецентрического типа, содержащей низкочастотный фильтр с прямоугольной передаточной функцией. На основе предложенной в [6] конструктивной аппроксимации френелевской функции элементарными функциями впервые найдено аналитическое выражение для импульсного отклика системы и исследовано его поведение при различных соотношениях апертур объектива и фильтра. Проанализированы пространственно-инвариантные характеристики системы при различных соотношениях указанных апертур. Рассмотрен случай квазиинвариантных систем. Даны рекомендации по улучшению их пространственных характеристик.

**Расчёт импульсного отклика телецентрической проекционной системы с фильтрацией пространственных частот.** Рассмотрим (рис. 1, *a*) преобразование полей в стандартной когерентно-оптической системе на базе двух объективов, содержащей низкочастотный фильтр пространственных частот (щелевого типа). При анализе ограничимся одномерным случаем. Исходный объект с амплитудным пропусканием  $f(x)$  располагается в плоскости  $P_1$  и освещается плоской монохроматической волной света  $\lambda$  с единичной амплитудой  $E_0$ . Будем считать сначала, что апертура объектива  $O_1$  является неограниченной.

Как известно, в такой системе этот объектив выполняет прямое преобразование Фурье, в результате которого в его задней фокальной плоскости  $P_3$  (плоскость изображе-

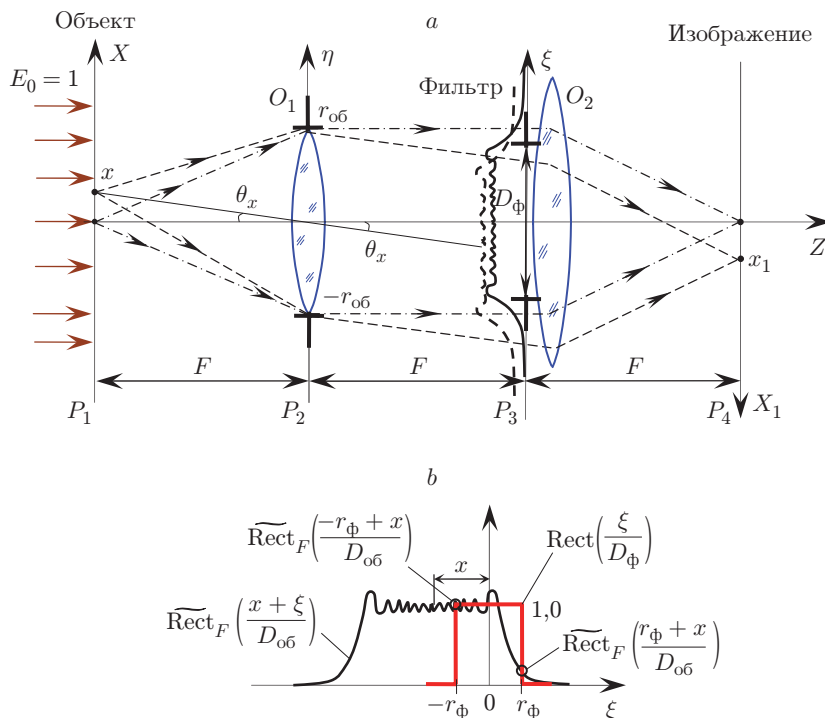


Рис. 1. Низкочастотная фильтрация апертуры в когерентном свете: *a* — схема оптической проекционной системы; *b* — принцип фильтрации френелевского изображения апертуры в плоскости  $P_3$

ния источника света) формируется спектр Фурье объекта  $F(u)$ . Далее спектр модулируется низкочастотным фильтром с передаточной функцией  $H_\Phi(u) = \text{Rect}(u/2u_\Phi)$ , где  $u = k\theta = k\xi/F$ ;  $2u_\Phi = kD_\Phi/F$  — ширина полосы пропускаемых частот (рад/мм);  $D_\Phi$  — линейная апертура фильтра (мм);  $\theta$  — угол дифракции;  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $F$  — фокусное расстояние объективов  $O_1$  и  $O_2$ . Распределение на выходе фильтра  $G(u) = F(u)H_\Phi(u)$  объективом  $O_2$  подвергается обратному преобразованию Фурье. Для того чтобы исключить влияние апертуры объектива на характеристики системы, его располагают вплотную к фильтру. Выходное распределение  $g(x_1)$ , наблюдаемое в задней фокальной плоскости  $P_4$  объектива  $O_2$ , соответствует свёртке исходного распределения  $f(x_1)$  с импульсным откликом фильтра  $h(x_1) = 2 \sin(u_\Phi x_1)/x_1$ :

$$g(x_1) = e^{jkx_1^2/2F} [f(x_1) \otimes h(x_1)]. \quad (1)$$

Заметим, что появление квадратичного фазового множителя, зависящего от выходной координаты  $x_1$ , обусловлено указанным расположением объектива  $O_2$  (при размещении его на фокусном расстоянии от фильтра этот множитель отсутствует). Такая система, как известно, относится к классу пространственно-инвариантных: её импульсный отклик  $h(x_1)$  не зависит от положения зондирующей точки по полю на входе системы [1].

Иная ситуация наблюдается в случае учёта ограниченности апертур объективов, что имеет место на практике. В работе [2] исследованы полевые и частотные характеристики проекционной системы 2F–2F с параллельным освещением исходного объекта при формировании его изображения одиночным проекционным объективом с ограниченной апертурой  $D_{об}$  (размер апертурной диафрагмы) при отсутствии фильтра пространственных частот. Импульсный отклик такой пространственно-неинвариантной системы имеет следующий вид:

$$h(x_1, x) = e^{jkx^2/2F} h(x_1 - x) = e^{jkx^2/2F} \frac{\sin[u_{об}(x_1 - x)]}{x_1 - x}, \quad (2)$$

где  $u_{об} = kD_{об}/(2F)$ .

Источником неинвариантности является квадратичный член  $e^{jkx^2/2F}$ , зависящий от входной координаты  $x$ . Его появление обусловлено несовпадением плоскости  $P_2$  апертурной диафрагмы объектива  $O_1$  с плоскостью формирования изображения источника света  $P_3$  (плоскости  $P_2$  и  $P_3$  отстоят друг от друга на расстоянии  $F$ ).

Обычно разработчики оптико-электронных систем в плоскости изображения источника света размещают дополнительную диафрагму — фильтр, который осуществляет фильтрацию низких пространственных частот объекта, благодаря чему, например, увеличивается глубина фокусировки объекта и, самое главное, уменьшается влияние эффектов виньетирования пучков объективом  $O_1$ . Часто диафрагма выступает в качестве апертурной диафрагмы всей системы. В связи с этим возникает вопрос о выборе соотношений между апертурами  $D_\Phi$  и  $D_{об}$  фильтра и проецирующего объектива  $O_1$  соответственно. Они определяют полевые и частотные характеристики системы.

В случае пространственно-неинвариантной системы входное и выходное распределения связаны интегралом суперпозиций:

$$g(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x_1, x; D_{об}, D_\Phi)dx, \quad (3)$$

где  $h(x_1, x; D_{об}, D_\Phi)$  — импульсный отклик проекционной оптической системы, зависящий от размеров апертур объектива  $O_1$  и низкочастотного фильтра пространственных частот.

Поставим задачу нахождения импульсного отклика в такой системе и обозначим его  $h(x_1, x)$ . С этой целью в плоскости  $P_1$  в точке с координатой  $x$  разместим зондирующий точечный источник (см. рис. 1, *a*) и вычислим сначала поле, формируемое в плоскости  $P_3$  фильтра. Учтём далее, что сферическая волна от точечного источника  $e^{jk(\eta-x)^2/2F}$ , проходя через объектив  $O_1$  с ограниченной апертурой  $D_{об}$ , обрезается в плоскости  $P_2$  в соответствии с амплитудной компонентой передаточной функции этого объектива:  $H_{об}(\eta) = \text{Rect}(\eta/D_{об})$ , где  $\text{Rect}(z)$  — прямоугольная функция [1]. Далее результирующее поле распространяется в свободном пространстве между плоскостями  $P_2$  и  $P_3$ . Очевидно, что в плоскости  $P_3$  наблюдается картина дифракции Френеля на прямоугольной апертуре (щели) объектива  $O_1$ , которая формируется в свете плоской наклонной волны с углом наклона  $\theta_x = x/F$ . Нетрудно показать, что френелевское изображение апертуры  $\tilde{H}_F(\xi)$  в этом случае сдвигается на величину  $\Delta\xi = \theta_x F$  в плоскости фильтра (рис. 1, *b*) и его можно описать следующим выражением:

$$\tilde{H}_F(\xi) = e^{-jk\theta\xi} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{\xi + \theta_x F}{D_{об}}\right) = e^{-jkx\xi/F} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{\xi + x}{D_{об}}\right), \quad (4)$$

где  $\widetilde{\text{Rect}}_F(z) = (j\lambda F)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}(z-t) \cdot e^{jkt^2/(2F)} dt$  — френелевское изображение щелевой апертуры  $D_{об}$  объектива  $O_1$ , формируемое на расстоянии  $F$  от объекта при его нормальном освещении ( $\theta_x = 0$ ). В результате обратного преобразования поля  $\tilde{H}_F(\xi)$  в плоскости  $P_4$  формируется выходное распределение, соответствующее импульсному отклику исследуемой системы:

$$\begin{aligned} h(x_1, x) &= e^{jkx_1^2/2F} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_F(\xi, x) \cdot \text{Rect}\left(\frac{\xi}{D_{\Phi}}\right) \cdot e^{jk\xi x_1/F} d\xi = \\ &= e^{jkx_1^2/2F} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{\xi}{D_{\Phi}}\right) \cdot \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{\xi + x}{D_{об}}\right) \cdot e^{jk(x_1 - x)\xi/F} d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Покажем, что интеграл (5) может быть вычислен в классе френелевских функций (интегралов Френеля). С этой целью проинтегрируем его по частям. Принимая во внимание нулевые значения функций  $\text{Rect}(\xi/D_{\Phi})$  и  $\widetilde{\text{Rect}}_F((\xi + x)/D_{об})$  на бесконечности, для  $h(x_1, x)$  можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} h(x_1, x) &= -\frac{e^{jkx_1^2/2F}}{jk(x_1 - x)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}'\left[\frac{\xi}{D_{\Phi}}\right] \cdot \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{\xi + x}{D_{об}}\right) \cdot e^{jk(x_1 - x)\xi/F} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left[\frac{\xi}{D_{\Phi}}\right] \cdot \widetilde{\text{Rect}}_F'\left(\frac{\xi + x}{D_{об}}\right) \cdot e^{jk(x_1 - x)\xi/F} d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учтём при дальнейших расчётах, что производная прямоугольной функции  $\text{Rect}[t/D_{об}] = Y(t + r_{об}) - Y(t - r_{об})$  равна  $\text{Rect}'[t/D_{об}] = \delta(t + r_{об}) - \delta(t - r_{об})$ , где

$Y(t)$  — ступенчатая функция Хэвисайда;  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака ( $D_{об} = 2r_{об}$ ) [1]. При вычислении производной от френелевской функции  $\widetilde{\text{Rect}}_F((\xi + x)/D_{об})$  заметим, что френелевское изображение прямоугольной функции может быть представлено в виде

$$\widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{\xi + x}{D_{об}}\right) = \tilde{Y}_F(\xi + x + r_{об}) - \tilde{Y}_F(\xi + x - r_{об}),$$

где функция  $\tilde{Y}_F(t) = (j\lambda F)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t-z)e^{jkz^2/2F} dz = (j\lambda F)^{-1/2} Y(t) \otimes e^{jkt^2/2F}$  (далее будем называть её френелевской функцией) описывает френелевское изображение полуплоскости, наблюдаемое на расстоянии  $F$  от неё. В результате для производной френелевского изображения щели нетрудно получить выражение

$$\widetilde{\text{Rect}}'_F\left[\frac{\xi + x}{D_{об}}\right] = (j\lambda F)^{-1/2} [e^{jk(\xi+x+r_{об})^2/2F} - e^{jk(\xi+x-r_{об})^2/2F}].$$

С учётом изложенного (6) принимает вид

$$\begin{aligned} h(x_1, x) = & -\frac{e^{jkx_1^2/2F}}{jk(x_1 - x)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\xi+r_{\phi}) - \delta(\xi-r_{\phi})] \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{\xi + x}{D_{об}}\right) \cdot e^{jk(x_1-x)\xi/F} d\xi \right] - \frac{e^{jkx_1^2/2F}}{jk(x_1 - x)} \times \\ & \times \left[ (j\lambda F)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{\xi}{D_{\phi}}\right) [e^{jk(\xi+x+r_{об})^2/2F} - e^{jk(\xi+x-r_{об})^2/2F}] e^{jk(x_1-x)\xi/F} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Как показывают проведённые расчёты, для импульсного отклика анализируемой оптической системы окончательно можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} h(x_1, x) = & \frac{e^{jkx_1^2/2F}}{jk(x_1 - x)} \left[ \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{x + r_{\phi}}{D_{об}}\right) \cdot e^{jk(x_1-x)r_{\phi}/F} - \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{x - r_{\phi}}{D_{об}}\right) \cdot e^{-jk(x_1-x)r_{\phi}/F} \right] + \\ & + \frac{e^{jkx^2/2F}}{jk(x_1 - x)} \left[ \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{x_1 - r_{об}}{D_{\phi}}\right) \cdot e^{jk(x_1-x)r_{об}/F} - \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{x_1 + r_{об}}{D_{\phi}}\right) \cdot e^{-jk(x_1-x)r_{об}/F} \right] \equiv \\ & \equiv h_1(x_1, x) + h_2(x_1, x). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь функция  $h(x_1, x)$  представлена в виде суммы двух компонент:  $h_1(x_1, x)$  и  $h_2(x_1, x)$ .

Выражение (8) описывает в классе френелевских функций (интегралов Френеля) поведение импульсного отклика проекционной системы (см. рис. 1) в зависимости от параметров системы  $F$  и  $\lambda$ , а также от размеров апертур  $D_{об}$  и  $D_{\phi}$  объектива  $O_1$  и фильтра пространственных частот.

Выясним физический смысл компонент отклика  $h_1(x_1, x)$  и  $h_2(x_1, x)$ . Первая из них описывает дифракцию света на апертуре фильтра (рис. 2, а). При этом границы фильтра ( $\xi_{1,2} = \pm r_{\phi}$ ) как бы «высекают» («выхватывают») амплитуду и фазу падающего на него френелевского изображения апертуры объектива  $O_1$  в местах расположения

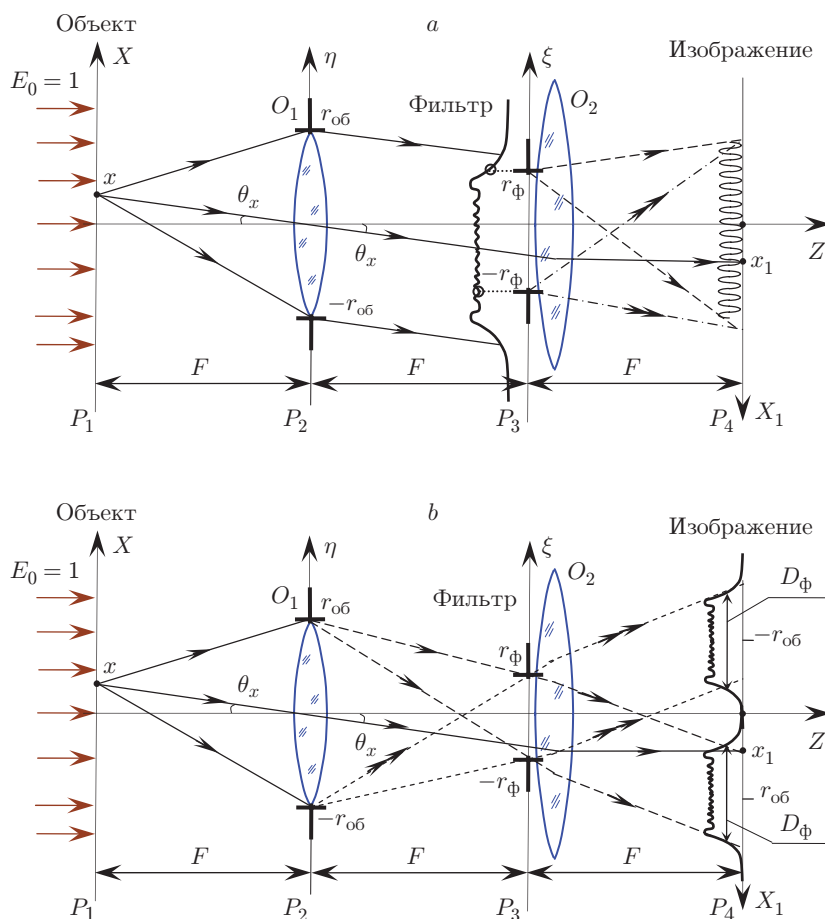


Рис. 2. Объяснение физического смысла компонент  $h_1(x_1, x)$  и  $h_2(x_1, x)$  импульсного отклика, которые определяются дифракцией света: на краях фильтра (а), на апертуре объектива  $O_1$  (b)

указанных границ. Это отражается в появлении в отклике  $h_1(x_1, x)$  волн, дифрагированных на границах фильтра, которые с точностью до  $e^{jkx_1^2/2F}$  описываются членами  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x + r_\phi)/D_{об}) \cdot e^{-jkx\xi/F}$  и  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x - r_\phi)/D_{об}) \cdot e^{jkx\xi/F}$ . Иными словами, границы (края) фильтра в этом случае выступают в роли точечных источников света с указанными выше амплитудами и фазами, которые в задней фокальной плоскости объектива  $O_2$  формируют две плоские наклонные волны.

Вторая компонента  $h_2(x_1, x)$  отклика  $h(x_1, x)$  образуется вследствие дифракции света на апертуре объектива  $O_1$  (рис. 2, b). В этом случае граничные точки апертуры  $\eta_{1,2} = \pm r_{об}$  выступают, как и в предыдущем случае, в роли точечных источников сферических волн с фазами, определяемыми падающей на объектив исходной сферической волной от входного зондирующего источника. Фазы этих волн после прохождения через объектив  $O_1$  в указанных точках равны  $e^{-jkxr_{об}/F} \cdot e^{jkx^2/2F}$  и  $e^{jkxr_{об}/F} \cdot e^{jkx^2/2F}$ . Таким образом, фильтр освещается, кроме прямой (проходящей) волны света, также двумя сферическими волнами, сформированными благодаря дифракции света на краях апертуры объектива. Указанные точечные источники образуют в плоскости  $P_4$  два дифракционных (френелевских) изображения фильтра, описываемых соответственно функциями  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x_1 - r_{об})/F)$  и  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x_1 + r_{об})/F)$ , отстоящими друг от друга на расстоянии  $D_{об}$  (см. рис. 2, b) и модулированными фазовыми членами  $e^{jkx^2/2F} \cdot e^{jk(x_1-x)r_{об}/F}$  и  $e^{jkx^2/2F} \cdot e^{-jk(x_1-x)r_{об}/F}$ .

Проанализируем теперь поведение полей в предельных (идеальных) случаях, когда апертуры  $D_\Phi = \infty$  и  $D_{об} = \infty$ . В первом случае френелевские функции  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x + r_\Phi)/D_{об})$  и  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x - r_\Phi)/D_{об})$  равны нулю при  $D_\Phi = \infty$ , а функции  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x_1 - r_{об})/D_\Phi)$  и  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x_1 + r_{об})/D_\Phi)$  — единице. В результате поле  $h(x_1, x)$  принимает следующий вид:

$$h(x_1, x) = 2e^{jkx^2/2F} \sin\left(\frac{k(x_1 - x)r_{об}}{F}\right) / k(x_1 - x). \quad (9)$$

Как и следовало ожидать, полученное поле соответствует импульсному отклику пространственно-неинвариантной системы [1].

Иная ситуация имеет место, когда апертура  $D_{об} = \infty$ . Поскольку входное и выходное рабочие поля системы (поля зрения)  $X_{вх} = X_{вых} = D_{об}$  ограничены ( $|x| \leq r_{об}$ ,  $|x_1| \leq r_{об}$ ) [2], то в этом предельном случае функция  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x \pm r_\Phi)/D_{об}) = 1$ , а функция  $\widetilde{\text{Rect}}_F((x_1 \pm r_{об})/D_\Phi) = 0$ . Импульсный отклик здесь с точностью до фазового множителя  $e^{jkx_1^2/2F}$ , зависящего от выходной координаты  $x_1$ , становится пространственно-инвариантным:

$$h(x_1, x) = e^{jkx_1^2/2F} h(x_1 - x) = e^{jkx_1^2/2F} \frac{2 \sin k(x_1 - x)r_\Phi/F}{k(x_1 - x)}. \quad (10)$$

Таким образом, в предельных случаях импульсные отклики системы совпадают с известными выражениями для откликов проекционных пространственно-инвариантных и неинвариантных систем. В промежуточных случаях, когда апертуры объектива и фильтра сопоставимы, поведение импульсного отклика носит более сложный характер.

Исходя из проведённого анализа структуры формулы, для импульсного отклика в первом приближении можно сделать вывод, что первая её компонента  $h_1(x_1, x)$  определяет в основном инвариантные свойства оптической системы, а вторая компонента  $h_2(x_1, x)$  — её неинвариантные свойства.

**Конструктивная аппроксимация импульсного отклика элементарными функциями.** Более детальный анализ поведения импульсного отклика системы при различных соотношениях параметров  $D_{об}$ ,  $D_\Phi$ ,  $F$  и  $\lambda$  требует представления его в аналитическом виде путём аппроксимации френелевских функций (интегралов Френеля) элементарными функциями. Известная аппроксимация их многочленом оказывается неудобной в использовании и не допускает наглядной интерпретации дифракционных явлений [6]. В [5] предложена конструктивная модель дифракционных явлений, согласно которой дифракционное поле может быть записано в виде суммы двух составляющих, одна из которых соответствует прямой (недифрагированной) волне, а вторая — волне, дифрагированной на крае (границе) объекта в виде сферической волны с обобщённой диаграммой излучения. Исходя из этого, в случае объекта в виде полуплоскости с амплитудным пропусканием  $f(x) = Y(x)$  её френелевское изображение на расстоянии  $F$  можно аппроксимировать следующим образом:

$$\tilde{Y}_F(x) = Y(x) - \frac{0,5e^{jkx^2/(2F)}}{x/p + \text{sgn}(x)}, \quad (11)$$

где параметр  $p = \sqrt{j\lambda d}/\beta$ , причём  $\beta = 2$  при  $|x| \ll \sqrt{\lambda d}$  и  $\beta = \pi$  при  $|x| \gg \sqrt{\lambda d}$  ( $\sqrt{\lambda d}$  — размер зоны Френеля),  $\text{sgn}(x)$  — знаковая функция [1].

Используя формулу (11), френелевское изображение прямоугольной щели шириной  $D_{об}$ , пропускание которой  $f(x) = \text{Rect}(x/D_{об}) = Y(x + 0,5D_{об}) - Y(x - 0,5D_{об})$ , можно аппроксимировать как

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Rect}}_F\left(\frac{x}{D_{об}}\right) &= \text{Rect}\left(\frac{x}{D_{об}}\right) - \frac{0,5e^{jk((x+0,5D_{об})^2/2F)}}{(x + 0,5D_{об})/p + \text{sgn}(x + 0,5D_{об})} + \\ &+ \frac{0,5e^{jk((x-0,5D_{об})^2/2F)}}{(x - 0,5D_{об})/p + \text{sgn}(x - 0,5D_{об})}. \end{aligned} \quad (12)$$

С учётом (12) формула для импульсного отклика (8) принимает аналитический вид:

$$\begin{aligned} h(x_1, x) &= \frac{e^{jkx_1^2/2F}}{jk(x_1 - x)} \left[ t_1(x) e^{jk(x_1-x)r_{\Phi}/F} - t_2(x) e^{-jk(x_1-x)r_{\Phi}/F} \right] + \\ &+ e^{jkx^2/2F} \left[ t_3(x_1) e^{jk(x_1-x)r_{об}/F} - t_4(x_1) e^{-jk(x_1-x)r_{об}/F} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где амплитудные составляющие  $t_1(x)$ ,  $t_2(x)$ ,  $t_3(x_1)$  и  $t_4(x_1)$  описываются следующими функциями:

$$\begin{aligned} t_{1,2}(x) &= \text{Rect}\left(\frac{x \pm r_{\Phi}}{D_{об}}\right) - \frac{0,5 e^{jk(x \pm r_{\Phi} + r_{об})^2/(2F)}}{(x \pm r_{\Phi} + r_{об})/p + \text{sgn}(x \pm r_{\Phi} + r_{об})} + \\ &+ \frac{0,5 e^{jk(x \pm r_{\Phi} - r_{об})^2/(2F)}}{(x \pm r_{\Phi} - r_{об})/p + \text{sgn}(x \pm r_{\Phi} - r_{об})}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} t_{3,4}(x_1) &= \text{Rect}\left(\frac{x_1 \mp r_{об}}{D_{\Phi}}\right) - \frac{0,5 e^{jk(x_1 \mp r_{об} + r_{\Phi})^2/(2F)}}{(x_1 \mp r_{об} + r_{\Phi})/p + \text{sgn}(x_1 \mp r_{об} + r_{\Phi})} + \\ &+ \frac{0,5 e^{jk(x_1 \mp r_{об} - r_{\Phi})^2/(2F)}}{(x_1 \mp r_{об} - r_{\Phi})/p + \text{sgn}(x_1 \mp r_{об} - r_{\Phi})}. \end{aligned}$$

Здесь верхние знаки соответствуют функциям  $t_1(x)$  и  $t_3(x_1)$ , а нижние —  $t_2(x)$  и  $t_4(x_1)$ .

Используя полученную формулу для импульсного отклика, можно детально исследовать его поведение в аналитическом виде в зависимости от параметров оптической системы  $D_{об}$ ,  $D_{\Phi}$ ,  $\lambda$  и  $F$ .

**Анализ отклика при различных соотношениях апертур объектива и фильтра.** С учётом аппроксимации (13) для  $h(x_1, x)$  изучим поведение отклика в трёх случаях: когда апертура фильтра много больше апертуры объектива ( $D_{\Phi} \gg D_{об}$ ), когда они равны ( $D_{\Phi} = D_{об}$ ) и, наконец, когда апертура объектива много больше апертуры фильтра ( $D_{об} \gg D_{\Phi}$ ). При этом учтём снова, что входное и выходное поля зрения такой проекционной системы не превышают размера апертуры. Примем во внимание, что на практике апертуры объектива и фильтра много больше размера зоны Френеля:  $D_{об} \gg \sqrt{\lambda F}$ ,  $D_{\Phi} \gg \sqrt{\lambda F}$ .



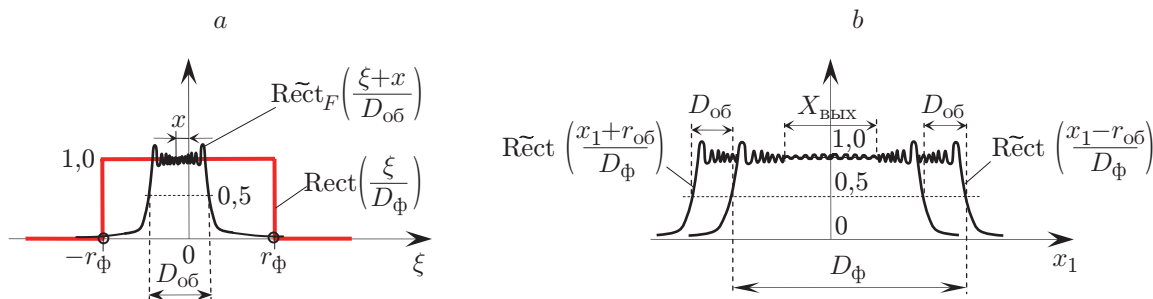


Рис. 3. Формирование импульсного отклика в случае, когда апертура фильтра много больше апертуры объектива ( $D_\Phi \gg D_{об}$ ): низкочастотная фильтрация френелевского изображения апертуры в плоскости фильтра  $P_3$  (а); выходное поле, соответствующее компоненте отклика  $h_2(x_1, x)$  (б)

В первом случае, когда  $D_\Phi \gg D_{об}$  функции  $t_1(x)$ ,  $t_2(x)$ ,  $t_3(x_1)$  и  $t_4(x_1)$  можно заметно упростить:

$$\begin{aligned}
 t_{1,2}(x) &\approx -\frac{0,5p}{\pm r_\Phi} \left( e^{jk(x \pm r_\Phi + r_{об})^2 / (2F)} - e^{jk(x \pm r_\Phi - r_{об})^2 / (2F)} \right) = \\
 &= \mp \frac{jp}{r_\Phi} e^{jk(x^2 + r_\Phi^2 + r_{об}^2) / (2F)} e^{\pm jkxr_\Phi / F} \sin [k(x \pm r_\Phi)r_{об} / F];
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 t_{3,4}(x_1) &\approx 1 - \frac{0,5p}{r_\Phi} \left( e^{jk(x_1 \mp r_{об} + r_\Phi)^2 / (2F)} + e^{jk(x_1 \mp r_{об} - r_\Phi)^2 / (2F)} \right) = \\
 &= 1 - \frac{p}{r_\Phi} e^{jk(x_1^2 + r_{об}^2 + r_\Phi^2) / (2F)} e^{\mp jkx_1 r_{об} / F} \cos [k(x_1 \mp r_{об})r_\Phi / F].
 \end{aligned}$$

Можно видеть, что в рассматриваемом случае компонента  $h_1(x_1, x)$  поля  $h(x_1, x)$  убывает по закону  $|p|/D_\Phi$  (рис. 3, а) и, например, при  $D_\Phi = 60$  мм ( $D_{об} = 20$  мм),  $F = 100$  мм,  $\lambda = 0,5$  мкм и  $\beta = \pi$  величина  $\sqrt{\lambda F} / (\beta D_\Phi)$  не превышает 0,1 %, т. е. пренебрежимо мала. Что касается компоненты  $h_2(x_1, x)$ , то она совершает колебания относительно единичного уровня, причём амплитуда колебаний убывает по тому же закону (рис. 3, б). Таким образом, при  $D_\Phi \gg D_{об}$  инвариантные свойства системы становятся определяющими. Импульсный отклик (15) близок к отклику (2) для пространственно-инвариантной системы.

С практической точки зрения представляет интерес случай, когда параметры  $D_\Phi$  и  $D_{об}$  сопоставимы, в частности, когда они приближённо равны друг другу:  $D_\Phi = D_{об}$ . При осевом размещении входного зондирующего импульса ( $x = 0$ ) значения функции  $\widetilde{\text{Rect}}(\xi/D_{об})$  (см. выражение (4)) в граничных точках фильтра  $\xi_{1,2} = \pm \xi_\Phi$  одинаковы: при  $D_\Phi \gg \sqrt{\lambda F}$  они равны  $\approx 0,5$ . Этому же значению будут равны и амплитуды в компоненте  $h_2(x_1, x)$  для  $x = x_1 = 0$  при линейных фазовых множителях. Однако при смещении зондирующего импульса вдоль оси  $X$  (внеосевое положение) картина резко меняется. Например, при  $x > 0$  амплитуда поля  $\widetilde{\text{Rect}}((\xi + r)/D_{об})$  в граничных точках фильтра становится различной: в то время как в точке  $\xi_1 = r_\Phi$  она стремительно падает, в точке  $\xi_2 = -r_\Phi$  амплитуда слабо колеблется относительно единичного уровня. Для понимания

сути происходящего положим, что  $\widetilde{\text{Rect}}((x + r_\Phi)/D_{\text{об}}) \approx 0$ , а  $\widetilde{\text{Rect}}((x - r_\Phi)/D_{\text{об}}) \approx 1$ , что справедливо с хорошей точностью при  $x \gg \sqrt{\lambda F}$ . В этом случае компонента  $h_1(x_1, x)$  в (8) принимает вид

$$h_1(x_1, x) = -\frac{1}{jk(x_1 - x)} e^{jkx_1^2/(2F)} e^{-jk[(x_1 - x)r_\Phi]/F}.$$

Обратимся теперь ко второй компоненте  $h_2(x_1, x)$  импульсного отклика системы. Очевидно, что при  $x_1 \gg \sqrt{\lambda F}$  вклад функции  $\widetilde{\text{Rect}}((x_1 + r_{\text{об}})/D_\Phi)$  в выходное поле падает, и им можно пренебречь. Основной вклад даёт составляющая в  $h_2(x_1, x)$  с амплитудой  $\widetilde{\text{Rect}}((x_1 - r_{\text{об}})/D_\Phi)$ . С учётом этого выражение для компоненты  $h_2(x_1, x)$  заметно упрощается:

$$h_2(x_1, x) = \frac{1}{jk(x_1 - x)} e^{jkx^2/(2F)} e^{jk(x_1 - x)r_{\text{об}}/F}.$$

Окончательно для отклика системы  $h(x_1, x)$  при одинаковых размерах апертур объекта  $O_1$  и фильтра пространственных частот можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} h(x_1, x) &= \frac{1}{jk(x_1 - x)} \left( e^{jkx^2/(2F)} e^{jk(x_1 - x)r_{\text{об}}/F} - e^{jkx_1^2/(2F)} e^{-jk(x_1 - x)r_{\text{об}}/F} \right) = \\ &= \frac{2}{jk(x_1 - x)} e^{jk(x^2 + x_1^2)/(4F)} \sin \left( \frac{k}{F} \left[ (x_1 - x)r_{\text{об}} + \frac{x^2}{4} - \frac{x_1^2}{4} \right] \right). \end{aligned}$$

Проанализируем полученное выражение. Для простоты рассмотрения сделаем замену переменных:  $x_1 - x = t$ . В результате отклик можно привести к виду

$$h(t, x) \approx \frac{1}{jkt} \sin \left( \frac{k}{2F} \left[ t(D_{\text{об}} - x) + \frac{t^2}{2} \right] \right).$$

Так как  $D \gg \sqrt{\lambda F}$ , квадратичным членом при малых изменениях  $t$  в аргументе синуса можно пренебречь. Из чего следует, что характерный размер отклика  $t_{\text{хар}} \approx \lambda F / (D_{\text{об}} - x)$  определяется эффективной (действующей) апертурой  $D_{\text{эф}} = D_{\text{об}} - x$ , величина которой линейно падает при смещении зондирующей точки вдоль оси  $X$ . Это приводит к уширению импульсного отклика по мере смещения зондирующего импульса от оптической оси  $Z$ . Указанный эффект происходит вследствие виньетирования (затенения) френелевского изображения апертуры объектива левой полуплоскостью бинарного фильтра пространственных частот. Аналогичная ситуация имеет место при  $x < 0$ . В этом случае затенение френелевского изображения вызвано обрезанием его правой полуплоскостью фильтра. Отметим, что указанный эффект хорошо изучен в рамках геометрической оптики для некогерентных оптических систем [7].

Итак, при выборе апертур объектива  $O_1$  и фильтра равными пространственная неинвариантность системы проявляется в первом приближении в расширении по полю характерного размера импульсного отклика вследствие эффекта обрезания наклонного пучка света фильтром пространственных частот.

Исследуем далее поведение импульсного отклика системы в случае малых апертур фильтра по сравнению с апертурой объектива  $O_1$ , т. е. при  $D_\Phi \ll D_{\text{об}}$ . На рис. 4 показана

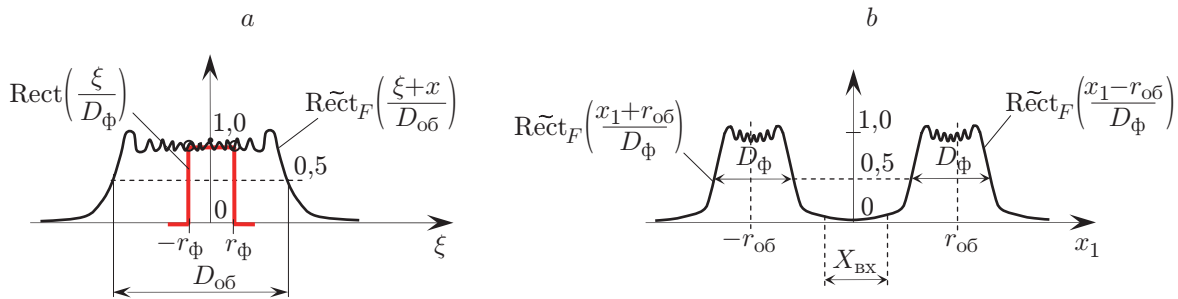


Рис. 4. Формирование отклика в случае, когда апертура фильтра много меньше апертуры объектива ( $D_\phi \ll D_{об}$ ): поле в плоскости  $P_3$  для несмещённой зондирующей точки ( $x = 0$ ) фильтра (а); выходное поле, соответствующее компоненте  $h_2(x_1, x)$  (б)

конфигурация полей в плоскостях  $P_3$  (а) и  $P_4$  (б). Для функций  $t_1(x)$ ,  $t_2(x)$ ,  $t_3(x_1)$  и  $t_4(x_1)$  при  $|x| \leq r_{об} - r_\phi$ ,  $|x_1| \leq r_{об} - r_\phi$ , используя (14), запишем выражения

$$t_{1,2}(x) = 1 - \frac{0,5p}{x + r_{об} \pm r_\phi + p} e^{jk(x \pm r_\phi + r_{об})^2 / (2F)} + \frac{0,5p}{x - r_{об} \pm r_\phi - p} e^{jk(x \pm r_\phi - r_{об})^2 / (2F)}; \quad (16)$$

$$t_{3,4}(x_1) = -\frac{0,5p}{x_1 \mp r_{об} + r_\phi \mp p} e^{jk(x_1 \mp r_{об} + r_\phi)^2 / (2F)} + \frac{0,5p}{x_1 \mp r_{об} - r_\phi \mp p} e^{jk(x_1 \mp r_{об} - r_\phi)^2 / (2F)}.$$

Так как  $r_{об} \gg r_\phi \gg |p| = \sqrt{\lambda d} / \beta$ , при малых размерах входного и выходного полей, когда  $|x| \ll r_\phi$  и  $|x_1| \ll r_\phi$ , для указанных выше функций можно получить следующие выражения:

$$t_{1,2}(x) = 1 - \frac{0,5p}{x + r_{об} \pm r_\phi + p} e^{jk(x \pm r_\phi + r_{об})^2 / (2F)} + \frac{0,5p}{x - r_{об} \pm r_\phi - p} e^{jk(x \pm r_\phi - r_{об})^2 / (2F)} =$$

$$= 1 - \frac{p}{r_{об}} e^{jk(x^2 + r_\phi^2 + r_{об}^2) / (2F)} e^{\pm jkxr_\phi / F} \cos \left[ \frac{k(x \pm r_\phi)r_{об}}{F} \right]; \quad (17)$$

$$t_{3,4}(x_1) = \pm \frac{0,5p}{r_{об}} e^{jk(x_1 \mp r_{об} + r_\phi)^2 / (2F)} \mp \frac{0,5p}{r_{об}} e^{jk(x_1 \mp r_{об} - r_\phi)^2 / (2F)} =$$

$$= \pm \frac{j p}{r_{об}} e^{jk(x_1^2 + r_\phi^2 + r_{об}^2) / (2F)} e^{\mp jkx_1 r_{об}} \sin \left[ \frac{k(x_1 \mp r_{об})r_\phi}{F} \right].$$

Видно, что инвариантная добавка в отклике (8) уменьшается пропорционально  $|p|/D_{об}$  ( $D_\phi \gg |p|$ ). При малой апертуре фильтра по сравнению с апертурой объектива, т. е. при  $D_\phi \ll D_{об}$ , максимальное значение добавки практически не зависит от  $D_\phi$ . И, например, при  $D_{об} = 40$  мм ( $D_\phi = 4$  мм),  $F = 100$  мм,  $\lambda = 0,5$  мкм,  $\beta = \pi$  добавка  $\sqrt{\lambda F} / (\beta D_{об})$  не превышает 0,18 %. Существенно, что при смещении зондирующей точки к границам апертуры объектива ( $x \rightarrow \pm r_{об}$ ) эта добавка значительно возрастает.

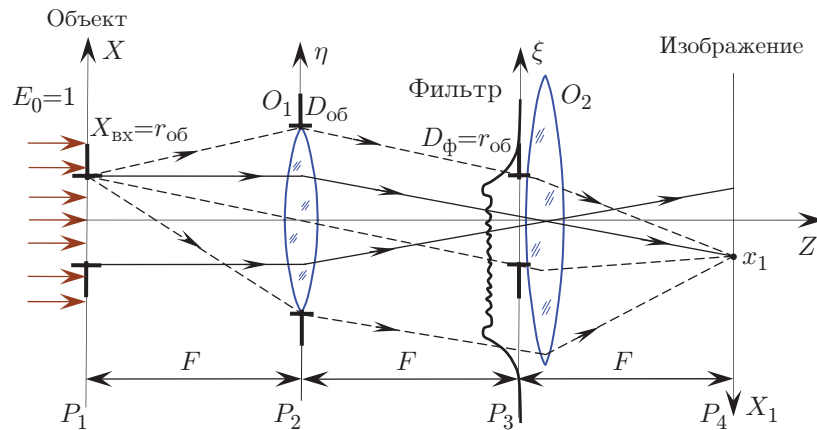


Рис. 5. Схема квазиинвариантной оптической системы: размер рабочего поля  $X_{\text{вх}}$  и апертура фильтра  $D_{\text{ф}}$  равны половине апертуры объектива  $D_{\text{об}}$  ( $X_{\text{вх}} = D_{\text{ф}} = r_{\text{об}}$ )

**Улучшение пространственных характеристик квазиинвариантных оптических систем.** Из приведённого анализа следует, что для снижения уровня остаточной инвариантности системы необходимо, чтобы выполнялись два условия: апертура фильтра  $D_{\text{ф}}$  и размеры входного  $X_{\text{вх}}$  и выходного  $X_{\text{вых}}$  полей должны быть заметно меньше апертуры объектива. И хотя подобный выбор параметров ( $D_{\text{ф}}$ ,  $X_{\text{вх}}$  и  $X_{\text{вых}}$ ) позволяет заметно улучшить инвариантные свойства системы, тем не менее с измерительной и информационной точек зрения такая система не является оптимальной. Это обусловлено тем, что в данном случае информационная пропускная способность  $M = X_{\text{вх}} \Delta\omega_{\text{ф}}$ , определяемая как произведение рабочего поля системы  $X_{\text{вх}}$  на ширину полосы пропускаемых пространственных частот  $\Delta\omega_{\text{ф}} = k\theta_{\text{ф}} = kD_{\text{ф}}/F$ , будет невысокой. Например, при малых угловых размерах фильтра, что приводит к уменьшению  $M$ , ширина импульсного отклика  $\Delta x_1 \sim \lambda/\theta_{\text{ф}}$  становится достаточно большой, что, в свою очередь, ведёт к потере разрешения системы. Здесь имеет место размытие границ проецируемого объекта, что при контроле геометрических характеристик изделий снижает точность измерений. Увеличение же  $\Delta\omega_{\text{ф}}$  вызывает уменьшение рабочего поля системы, в пределах которого систему можно считать пространственно-инвариантной.

Вопросы оптимизации параметра  $M$  рассмотрены в [4]. Авторы исходили из того, что при заданном входном поле  $X_{\text{вх}}$  максимально допустимый линейный размер фильтра из геометрических соображений не должен превышать величину  $D_{\text{ф}} \leq D_{\text{об}} - 0,5X_{\text{вх}}$  или  $\Delta\omega = (k/F)(D_{\text{об}} - 0,5X_{\text{вх}})$ . При таком выборе  $D_{\text{ф}}$  влияние неинвариантности системы, по мнению авторов, не столь ощутимо. Максимальное значение  $M = (k/F)[X_{\text{вх}}(D_{\text{об}} - X_{\text{вх}})]$ , что нетрудно вычислить, достигается при  $X_{\text{вх}} = D_{\text{ф}} = 0,5D_{\text{об}}$ . Схема системы с такими параметрами, получившая название квазиинвариантной, приведена на рис. 5. При указанном геометрическом подходе считается, что в плоскости  $P_3$  формируется теневое (смещённое) изображение апертуры объектива, в то время как в действительности мы имеем дело со смещённым френелевским изображением апертуры, поведение которого во избежание краевых эффектов следует учитывать при выборе размера фильтра (рис. 6).

Действительно, при смещении зондирующего импульса от осевого положения (рис. 6, а) на величину  $0,5r_{\text{об}}$  (граница рабочего поля) амплитуды поля во френелевском изображении апертуры объектива  $O_1$  в граничных точках фильтра  $\pm r_{\text{ф}}$  будут равны соответственно 0,5 и 1 (рис. 6, б). Такое достаточно сильное отличие полей в этих точках ведёт к увеличению степени пространственной неинвариантности системы.

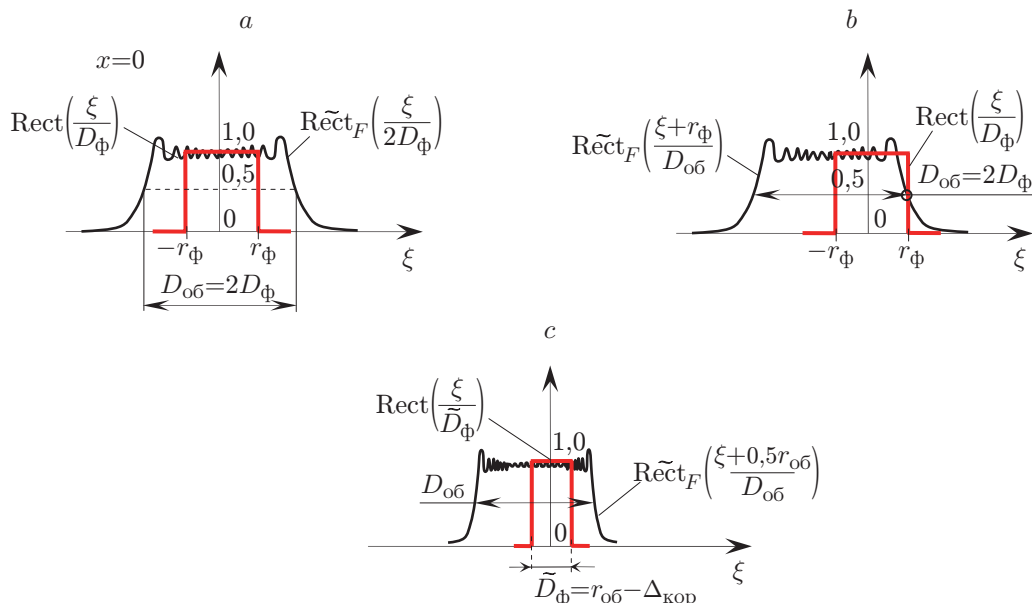


Рис. 6. Случай квазиинвариантной системы ( $X_{\text{вх}} = D_{\text{ф}} = r_{\text{об}}$ ): поле в плоскости фильтра  $P_3$  для осевой зондирующей точки ( $x = 0$ ) (а), для внеосевой ( $x > 0$ ) (б) и конфигурация поля в  $P_3$  при выборе фильтра со скорректированной апертурой ( $\tilde{D}_{\text{ф}} = r_{\text{об}} - \Delta_{\text{кор}}$ ) (с)

Из анализа конфигурации поля  $\tilde{H}_F(\xi)$  следует, что избежать этого явления можно, если выбрать апертуру фильтра меньше оптимального размера  $D_{\text{ф}} = 0,5r_{\text{об}}$  на величину  $\Delta_{\text{кор}}$ , равную нескольким зонам Френеля. При выборе  $\Delta_{\text{кор}}$  учтём поведение амплитуды максимумов в изображении  $\tilde{Y}_F(\xi)$  полуплоскости. Их легко определить, используя предложенную нами аппроксимационную формулу (11). Если подставить в неё приближённые значения  $\xi_n = 0,5\sqrt{\lambda z(8n - 5)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), при которых достигаются максимумы функции  $\tilde{Y}_F(\xi) = 1 + 0,5/(0,5\beta_n\sqrt{8n - 5} + e^{j\pi/4})$ , то для амплитуды, например, первых пяти максимумов при  $2,4 \leq \beta_n \leq 3,0$  можно получить следующие значения: 1,17; 1,095; 1,072; 1,066; 1,055, что согласуется с [8]. Видно, что амплитуда колебаний пятого максимума уменьшается в 3 раза. Заметим, что при  $n \gg 1$  амплитуда колебательной составляющей  $\tilde{Y}_F(\xi)$  падает достаточно медленно по закону  $\sim (\pi\sqrt{8n - 5})^{-1}$ . Если ограничиться  $\Delta_{\text{кор}} = 2\xi_5 = 6\sqrt{\lambda F}$ , то апертура скорректированного фильтра будет равна  $\tilde{D}_{\text{ф}} = D_{\text{ф}} - \Delta_{\text{кор}} = r_{\text{об}} - 6\sqrt{\lambda F}$  (рис. 6, с). Например, при  $F = 100$  мм,  $\lambda = 0,5$  мкм величина  $\Delta_{\text{кор}} \approx 1,3$  мм, что при фильтре  $D_{\text{ф}} = 20$  мм ( $D_{\text{об}} = 40$  мм) будет приводить к уменьшению его размера всего лишь на 6 %. При выборе фильтра с такой апертурой следует ожидать улучшения пространственно-инвариантных свойств системы.

**Заключение.** Широко используемые в приборостроительной практике оптические проекционные системы телецентрического типа (с параллельным освещением на входе) при всех достоинствах имеют существенный недостаток: они относятся к классу пространственно-неинвариантных систем. У таких систем импульсный отклик изменяется по полю, что обусловлено разнесением в пространстве (вдоль оптической оси) плоскостей апертурной диафрагмы и изображения источника света. Существующие оптико-геометрические подходы анализа систем не позволяют получить информацию об истинном поведении полей в пространственно-неинвариантных оптических системах.

В предлагаемой работе впервые в рамках волновой оптики (в приближении Кирхгофа — Френеля) строго рассчитан импульсный отклик исследуемой системы в зависи-

мости от апертур проекционного объектива и фильтра в классе френелевских функций. Установлено, что он состоит из двух компонент, одна из которых определяет в основном инвариантные свойства системы, а другая — неинвариантные.

На базе ранее предложенной нами аппроксимации френелевской функции элементарными функциями впервые найдено в аналитическом виде выражение для импульсного отклика. Исследовано его поведение при различных соотношениях апертур объектива и фильтра. Показано, что при уменьшении апертуры фильтра система становится в значительной степени инвариантной.

С использованием полученных результатов проанализирована в рамках волновой оптики корректность выбора параметров известных квазиинвариантных оптических систем, обеспечивающих максимальную пропускную способность при удовлетворительных пространственно-инвариантных характеристиках. Показано, что при выборе размеров входного (рабочего) поля и фильтра, равными половине апертуры проекционного объектива, имеет место сильная неинвариантность на краях рабочего поля системы. Для улучшения инвариантных свойств проекционной системы рекомендовано уменьшать размер фильтра на величину, пропорциональную нескольким зонам Френеля.

Предложенный волновой подход анализа полей в пространственно-неинвариантных оптических системах в отличие от известных оптико-геометрических позволяет в аналитическом виде получить достоверную информацию о характере преобразований волновых полей в таких системах, что имеет немаловажное значение при проектировании проекционных систем телецентрического типа.

Результаты могут быть положены в основу детальных исследований характеристик изображений различных объектов произвольной формы и структуры, формируемых проекционной системой телецентрического типа. Они без затруднений обобщаются на случай двумерных оптических систем с низкочастотным фильтром в виде квадратной апертуры. Обобщение достигнутых результатов для двумерных систем с аксиальным фильтром (в виде круглой апертуры) требует дополнительных исследований, учитывающих особенности преобразования волновых полей в таких системах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
2. Чугуй Ю. В. Фурье-оптика трёхмерных объектов постоянной толщины на основе дифракционных моделей // Автометрия. 2017. **53**, № 5. С. 90–105.
3. Stephen H. Quasigeometric approach to the Fourier analysis of imaging lenses // JOSA. 1971. **61**, N 9. P. 1428–1429.
4. Arsenault H. H., Brousseau N. Space variance in quasi-linear coherent optical processors // JOSA. 1973. **63**, N 5. P. 555–558.
5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамова, И. Стишина. М.: Наука, 1979. 832 с.
6. Chugui Yu. V., Krivenkov V. E. Fraunhofer diffraction by volumetric bodies of constant thickness // JOSA. 1989. **6**, N 5. P. 617–626.
7. Бегунов Б. Н., Заказнов Н. П., Кирюшин С. И., Кузичев В. И. Теория оптических систем. М.: Машиностроение, 1981. 431 с.
8. Ghatak A. Optics. 3-rd Edition. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 2005. 445 p.

*Поступила в редакцию 28 августа 2018 г.*