УДК 519.24 + 621.391

ОБНАРУЖЕНИЕ МАЛОРАЗМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ЗАШУМЛЁННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ*

Г. И. Салов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6
E-mail: sgi@ooi.sscc.ru

Рассматривается задача обнаружения на зашумлённых изображениях объектов малых размеров при отсутствии информации о вероятностных распределениях величин сигналов, наблюдаемых в точках области объекта и в точках окружающего объект сложного (случайного) фона. Получены подходящие критические значения для сравнительно недавно введённого нового непараметрического статистического теста (критерия) в случае обнаружения объекта малого размера. Сравниваются мощности нового критерия и известного двухвыборочного критерия Вилкоксона для случая с экспоненциальными распределениями.

Ключевые слова: обнаружение микрообъектов, две выборки, непараметрические критерии.

DOI: 10.15372/AUT20180502

Введение. Постановка задачи. Проблема обнаружения на зашумлённом изображении микрообъектов (малоразмерных объектов), содержащих среди всех точек лишь несколько, скажем $m \leq 5$, возможные результаты независимых измерений-наблюдений в которых можно рассматривать как стохастически независимые случайные величины с неизвестными вероятностными распределениями, представляет собой весьма актуальную задачу теории и практики обнаружения объектов.

В целях обнаружения важного объекта (объектов) в случае его присутствия на изображении «проверяют» все (или почти все) ожидаемые его местоположения. Обозначим через $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ возможные результаты независимых наблюдений в m точках области одного из таких проверяемых положений объекта, а через $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — результаты независимых наблюдений в N точках, расположенных вокруг этой области симметрично. В таком случае число $N = 2n$ чётное. Если в течение всего периода наблюдений важный объект отсутствовал на проверяемом положении, то при известных условиях ζ_i и ξ_j можно рассматривать как стохастически независимые случайные величины, имеющие одну и ту же непрерывную функцию распределения вероятностей, скажем $F(x) = F_\zeta(x) = F_\xi(x)$ (ситуация обычной однородности наблюдаемых величин). Часто присутствие объекта проявляется в том, что величины ζ_i, наблюдаемые в точках области объекта, имеют тенденцию быть стохастически (в среднем) больше (или меньше) величин ξ_j, принадлежащих точкам фона.

Для определённости будем считать, что при наличии объекта величины ζ_i имеют тенденцию быть стохастически больше величин ξ_j, т. е. будут иметь уже другую функцию распределения, например $G(x) \leq F(x)$ для всех x.

Рассмотрим часто возникающую на практике ситуацию, когда функции $F(x)$ и $G(x)$ неизвестны и могут изменяться. Наблюдателю известно только то, что они непрерывные.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00066).

Задача состоит в том, чтобы на основе результатов наблюдений $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ и $\xi_1, \ldots, \xi_N$ решить, присутствует на проверяемом положении важный объект или нет. Требуется указать правило (алгоритм), приводящее к верному решению с максимально возможной (или близкой к ней) вероятностью.

Чтобы свести к минимуму риск принять неверное решение, следует проверить статистическую гипотезу H_0 о том, что все величины ζ_i и ξ_j распределены одинаково (объект отсутствует) против альтернативной гипотезы H_1: величины ζ_i стохастически больше величин ξ_j (объект присутствует).

Стандартными тестами (критериями), применяемыми в подобной задаче, являются двухвыборочный непараметрический статистический критерий Вилкоксона [1] и эквивалентный ему критерий Манна — Уитни [2–4]. Распределения статистик, на которых основаны эти критерии, при гипотезе H_0 не зависят от того, по какому именно вероятностному закону $F(x)$, быть может с параметрами, распределены значения наблюдаемых случайных величин.

Критерий Манна — Уитни основан на (считающей) статистике вида

$$U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{I}\{\zeta_i > \xi_j\}, \tag{1}$$

здесь и далее $\mathbf{I}\{A\}$ — функция-индикатор события A, равная 1, если событие A произошло, и 0 в противном случае. Этот критерий предписывает отклонять гипотезу H_0 в пользу H_1, когда $U > C$. Число (константа) C выбирается так, чтобы уровень значимости критерия (вероятность отклонить гипотезу H_0, когда она на самом деле верна, или вероятность «ложной тревоги») имел приемлемое значение.

В [5–8] был введён и рассматривался в качестве альтернативного по отклонению к критерию Вилкоксона — Манна — Уитни (WMW-критерию) новый непараметрический статистический критерий, обозначенный для краткости через S_E. Однако изучен он пока не достаточно полно. Необходимо проверить, в частности, даёт ли он лучшие результаты по сравнению с WMW-критерием в случаях с очень малыми значениями m.

S_E-критерий. Разобьём множество $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ на два подмножества $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n}$ равных объёмов. Введём в рассмотрение следующие события:

$$E_{ij}^{+} = \{\zeta_i > \max(\xi_j, \xi_{j+n})\}, \quad E_{ij}^{-} = \{X_i < \min(\xi_j, \xi_{j+n})\}, \quad E_{ij}^{0} = \bar{E}_{ij}^{+} \cap \bar{E}_{ij}^{-}.$$

При гипотезе H_0 вероятность p^+ события E_{ij}^+ в точности равна вероятности p^- события E_{ij}^-: $p^+ = p^- = 1/3$. При альтернативной же гипотезе H_1 в силу предположения вероятность p^+ будет больше $1/3$ и больше вероятности p^-, которая будет меньше $1/3$. Отсюда естественно обращение к статистикам

$$S_E^{+} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{E_{ij}^{+}\}; \quad S_E^{-} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{E_{ij}^{-}\}; \quad S_E^{0} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{E_{ij}^{0}\}, \tag{2}$$

принимающим значения от 0 до mn с суммой $S_E^+ + S_E^- + S_E^0 = mn$.

Лемма 1. Критерий Вилкоксона — Манна — Уитни эквивалентен критерию

$$S_E^{+} > (C - S_E^{0})/2, \tag{3}$$

где число C то же, что и в (1).

Доказательство следует из равенств (эквивалентности) событий

$$\{S_E^+ > (C - S_E^0)/2\} = \{2S_E^+ + S_E^0 > C\} = \{U > C\}.$$

Полезно также следующее утверждение.

Лемма 2. WMW-критерий эквивалентен и критерию

$$S_E^+ - S_E^- > C - mn. \tag{4}$$

Доказательство. Критерий (4) эквивалентен критерию (3):

$$\{S_E^+ > (C - S_E^0)/2\} = \{S_E^+ - (mn - S_E^0)/2 > (C - S_E^0)/2 - (mn - S_E^0)/2\} =$$

$$= \{2S_E^+ - (S_E^+ + S_E^-) > (C - S_E^0) + S_E^0 - mn\} = \{S_E^+ - S_E^- > C - mn\}.$$

Последнее равенство означает, что WMW-критерий равнозначен критерию, основанному лишь на разности двух статистик S_E^+ и S_E^- без учёта дополнительной статистики S^0. Этот факт побуждает нас рассматривать более общий (управляемый) критерий

$$S_E^+ > h_S(S_E^0) \tag{5}$$

или эквивалентный ему

$$S_E^+ - S_E^- > 2h(S_E^0) + S_E^0 - mn.$$

Функция h_S имеет смысл управления. Она находится в распоряжении наблюдателя-статистика. Так как эти формы S_E-критерия учитывают и дополнительную статистику S_E^0, то представляется, что часто он может быть более мощным, т. е. отклоняющим гипотезу H_0 с большей вероятностью, когда верна гипотеза H_1, чем WMW-критерий. Приведённые в [5, 6] примеры подтверждают данное предположение.

Но остаётся ещё важный вопрос о том, как велико может быть преимущество нового критерия в ситуациях обнаружения микрообъектов, т. е. при совсем малых значениях m. Чтобы в какой-то мере ответить на данный вопрос, рассмотрим далее ряд актуальных примеров. Приведём сначала найденные в [5] точные выражения для распределений статистик (2) при нулевой гипотезе H_0. Для этого нам потребуются некоторые дополнительные обозначения.

Пусть $\mathfrak{P}(u, v)$ — множество всех упорядоченных представлений $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(n)$ числа n в виде суммы $(m+1)^2$ целых неотрицательных (≥ 0) слагаемых, обозначенных

$$n_{00}, n_{01}, \ldots, n_{0m}, n_{10}, n_{11}, \ldots, n_{1m}, \ldots, n_{m0}, n_{m1}, \ldots, n_{mm},$$

и таких, что

$$\sum_{h=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}(m - \max(h,k))n_{hk} = u, \quad \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\min(h,k)n_{hk} = v$$

(представления считаются упорядоченными, если равенство представлений $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ означает, что $n_{ij} = n'_{ij}$).

Удобно положить $0! = 1$.

Предложение 1 [5]. Пусть при гипотезе H_0 случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ и $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ независимы и имеют одну и ту же непрерывную функцию распределения F.

Тогда при $m \geq 1$ и $n \geq 2$

$$\mathbf{P}\{S_E^+ = u, S_E^- = v \,|\, H_0\} = \frac{m!n!}{(m+n)!} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(u,v)} \Bigl(\prod_{i=0}^{m} s_i!\Bigr)\Bigl(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}!\Bigr)^{-1},$$

здесь и далее

$$s_i = \sum_{h=0}^{m} (n_{hi} + n_{ih}), \quad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Обозначим через $p_0(u, z)$ совместное распределение статистик S_E^+ и S_E^0 при гипотезе H_0:

$$p_0(u, z) = \mathbf{P}\{S_E^+ = u, S_E^0 = z \,|\, H_0\} = \mathbf{P}\{S_E^+ = u, S_E^- = mn - u - z \,|\, H_0\}.$$

Тогда уровень значимости критерия (5) можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{S_E^+ > h(S_E^0) \,|\, H_0\} = \sum_{z=0}^{mn} \sum_{u=h(z)+1}^{mn-z} p_0(u, z).$$

Таким образом, задача сводится к отысканию подходящей функции $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots \ldots, mn$. Неизвестные распределения F и G могут быть произвольными или принадлежать заранее заданному параметрическому семейству. Ограничимся здесь рассмотрением первого (более общего) случая.

В математической статистике, когда распределения F и G неизвестны, для построения критериев обращаются к альтернативным гипотезам, близким в некотором смысле к нулевой гипотезе. В качестве альтернативной, как и в [6], возьмём гипотезу $\mathcal{H}(a)$, означающую, что каждая из величин ζ_i имеет распределение вида

$$(1-a)F + aF^2, \tag{7}$$

зависящее от параметра $a \in (0, 1]$. Гипотезе H_0 соответствует значение параметра $a = 0$. Распределение (7) имеет две привлекательные особенности. Во-первых, WMW-критерий для достаточно малых значений $a > 0$ в (7) является наиболее мощным среди ранговых критериев (см., например, [4], гл. 6, п. 12, задача 28), т. е. распределение (7) — одно из наиболее благоприятных для WMW-критерия. Во-вторых, в случае (7) можно получить совместное распределение статистик (2) в явном виде.

Предложение 2 [6]. Пусть при гипотезе $\mathcal{H}(a)$ величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ и $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ независимы в совокупности и каждая из величин ξ_j имеет непрерывную функцию распределения вероятностей F, а каждая из величин ζ_i — функцию (7).

Тогда вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+ = u, S_E^- = v \,|\, \mathcal{H}(a)\}$ при $m \geq 1$, $n \geq 2$ допускает представление

$$m!n! \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(u,v)} \Bigl(\prod_{i=0}^{m} s_i!\Bigr)\Bigl(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}!\Bigr)^{-1} \sum_{i=0}^{m} \frac{(2a)^i (1-a)^{m-i}}{(2n+m+i)!} A_{m,i}, \tag{8}$$

где s_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, как и прежде, определяются формулой (6), $A_{m,0} = 1$, $A_{1,1} = s_0 + 1$, а числа $A_{m,\,i}$ ($m \geq 2$, $i = 1, \ldots, m$) могут быть получены повторным применением рекуррентных соотношений (при $j = 2, 3, \ldots, m$):

$$A_{j,\,1} = A_{j\,-\,1,\,1} + S_{j\,-\,1},$$

$$A_{j,\,i} = A_{j\,-\,1,\,i} + A_{j\,-\,1,\,i\,-\,1}(S_{j\,-\,1} + i - 1), \quad i = 2, 3, \ldots, j - 1,$$

$$A_{j,\,j} = A_{j\,-\,1,\,j\,-\,1}(S_{j\,-\,1} + j - 1),$$

где $S_{j\,-\,1} = s_0 + s_1 + \ldots + s_{j\,-\,1} + j$.

Обозначим через $p_a(u, z)$ совместное распределение статистик S_E^+ и S_E^0 при альтернативной гипотезе $\mathcal{H}(a)$:

$$p_a(u, z) = \mathbf{P}\{S_E^+ = u, S_E^0 = z \,|\, \mathcal{H}(a)\} = \mathbf{P}\{S_E^+ = u, S_E^- = mn - u - z \,|\, \mathcal{H}(a)\}.$$

Поскольку при гипотезах H_0 и $\mathcal{H}(a)$ вид распределений $p_0(u, z)$ и $p_a(u, z)$ не зависит от не известного нам вида распределения F, то при заданном значении a, используя известную лемму Неймана — Пирсона (лемму НП), можно построить наиболее мощный критерий для проверки гипотезы H_0 против $\mathcal{H}(a)$. Важно отметить следующее.

Утверждение. Мощность WMW-критерия при альтернативной гипотезе $\mathcal{H}(a)$ будет меньше или, в лучшем случае, равна мощности наиболее мощного критерия (критической области $W(a)$) того же уровня в лемме НП.

Это следует из леммы 1 об эквивалентности WMW-критерия частному (линейному) случаю критерия (5), основанному на статистиках S_E^+ и S_E^0, и утверждения в лемме НП.

Согласно лемме НП чем больше значение отношения правдоподобия $L(u, z) = p_a(u, z)/p_0(u, z)$ для пары значений (u, z) статистик S_E^+ и S_E^0, тем желательнее, чтобы этот элемент-пара (u, z) был включён в критическую область W. Отсюда разумно все возможные элементы $e_i = (u_i, z_j)$ расположить в порядке убывания (не возрастания) значений $L(u_i, z_j) = p_a(u_i, z_j)/p_0(u_i, z_j)$. В соответствии с леммой НП в наилучшую критическую область W следует включать элементы e_i этой, скажем, L-последовательности, начиная с первого и продолжая пока

$$\alpha_s = \sum_{i\,=\,1}^{s} p_0(e_i) \leq \alpha, \tag{9}$$

где α — заранее заданный уровень критической области W.

Обозначим через k наибольшее s, при котором выполняется условие (9). Построенная таким образом критическая область $W(a) = W_{\alpha_k}(a)$ уровня α_k будет наилучшей (наиболее мощной) критической областью (НКО) для проверки гипотезы H_0 против альтернативы $\mathcal{H}(a)$ среди всех критических областей, уровни которых не превышают α_k. Для сравнения критериев в качестве α удобно брать уровень WMW-критерия.

Не часто, к сожалению, значение α_k получается достаточно близким к α, поскольку левая часть в неравенстве (9) возрастает с ростом s дискретно (скачками). Если α_k получилось существенно меньше α, то для более корректного сравнения критериев может быть построена более мощная критическая область $W_{\alpha'}(a)$ уровня α' ($\alpha_k < \alpha' \leq \alpha$), которая определяется как множество, содержащее все элементы НКО $W_{\alpha_k}(a)$ и некоторые из элементов L-последовательности $e_{k\,+\,2}, e_{k\,+\,3}, \ldots$. Можно также попытаться построить и другую, более мощную критическую область $W_{\alpha''}(a)$ уровня $\alpha'' \leq \alpha$, включая в неё элементы из НКО $W_{\alpha_k}(a)$, кроме некоторых из числа последних и все или некоторые из следующих по порядку элементов $e_{k\,+\,1}, e_{k\,+\,2}, \ldots$.

На первый взгляд может показаться, что если некоторый элемент $e = (u, z)$ попал в НКО $W_{\alpha_k}(a)$, то в эту область непременно попал и элемент $e' = (u + 1, z)$, если он существует. Однако, как показывают примеры, случается, особенно при $a = 1$, что это не так. Но поскольку в подобной ситуации значение $L(u + 1, z)$ обычно оказывается сравнительно большим, элемент e' может быть включён в критическую область, если уровень α' полученной таким путём критической области $W_{\alpha'}(a)$, содержащей этот элемент, не превышает α. В результате критическая область $W_{\alpha'}(a)$ будет требуемого вида $\{(u, z) : u > h_S(z)\}$, где для каждого z значение $h_S(z)$ равно $u_m(z) - 1$, $u_m(z)$ — наименьшее u, при котором (u, z) принадлежит $W_{\alpha'}(a)$.

Сравнение критериев. Числовые примеры. Новый S_E-критерий, как и WMW-критерий, наиболее чувствителен к сдвигам распределений. Поэтому было бы интересно сравнить их мощности для распределений F и G, отличающихся лишь сдвигами. Однако трудности, связанные с вычислением возникающих интегралов, не позволяют сделать это в общей ситуации. Одним из нескольких исключений является важный и довольно часто встречающийся в приложениях (например, при анализе сигналов и изображений) случай, когда наблюдаемые величины имеют распределения, близкие к экспоненциальным. Для определённости и простоты будем считать, что при гипотезе H_0

$$F_\zeta(x) = F_\xi(x) = F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}, \quad x \geq 0, \tag{10}$$

а при гипотезе H_1

$$F_\zeta(x) = G(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(x-\theta)}, \quad x \geq \theta, \ \ \theta > 0. \tag{11}$$

Заметим, что

$$F(x) = b_0 + b_1 G(x); \quad 1 - F(x) = b_1[1 - G(x)], \quad x \geq \theta, \tag{12}$$

где $b_0 = 1 - \exp(-\theta)$, $b_1 = 1 - b_0$. Это обстоятельство и позволило получить точное совместное распределение используемых статистик в явном виде.

Предложение 3 [6]. Пусть при H_1 случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ независимые и каждая из величин ξ_j имеет функцию распределения вероятностей (10), а каждая из величин ζ_i — функцию распределения (11).

Тогда вероятность $\mathbf{P}\{S^+ = u, S^- = v \,|\, H_1\}$ с учётом (12) можно записать в виде

$$m!n! \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(u,v)} \Big(\prod_{i=0}^{m} s_i!\Big)\Big(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}!\Big)^{-1} \sum_{r=0}^{s_0} \frac{b_0^r b_1^{2n-r}}{(m + 2n - r)!r!},$$

где s_i, $i = 0, \ldots, m$, как и ранее, определяется формулой (6).

Обратимся к реализации изложенного выше подхода для ряда весьма важных частных случаев. Два первых рассмотрим подробнее остальных с целью внести бо́льшую ясность в отыскание подходящих функций $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, mn$.

1. *Случай* $m = 2$, $n = 11$ $(m + 2n = 24)$. Весьма вероятно, что при столь малых значениях n и особенно m мощность критериев будет невелика. «Если мощность критерия оказывается слишком малой, то может оказаться желательным использование критических значений α, превосходящих обычные, например, 0,1 или 0,2» ([4], гл. 3, п. 1).

При $C = 30$ в (1) уровень WMW-критерия приближённо равен $\alpha \approx 0{,}202898$ (с точностью до шести цифр после запятой). Отыскивать подходящий вариант функции $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 22$, будем с помощью прямого перебора вариантов, построенных с использованием леммы НП для ряда альтернатив $\mathcal{H}(a_i)$, т. е. для ряда значений параметра $a_i \in (0, 1]$ в (7).

Использование леммы НП для проверки гипотезы H_0 против альтернатив $\mathcal{H}(a)$, $a =$ $= 0{,}1$, $0{,}2$ и $0{,}3$, привело к одному и тому же варианту НКО $W_{\alpha_k}(a_i)$ и S_E-критерия с функцией $h_S(z)$ следующего вида:

$$h_S(z) \equiv \left[\frac{30 - z}{2}\right], \quad z = 0, 1, \ldots, 22,$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x, т. е. дало вариант S_E-критерия, эквивалентный WMW-критерию, с $\alpha_k = \alpha$ (см. лемму 1).

Применение леммы НП против альтернативы $\mathcal{H}(0{,}4)$ привело к варианту S_E-критерия, который отличается от эквивалентного WMW-критерия по существу лишь двумя повышенными значениями: $h_S(1) = 15$ и $h_S(3) = 14$. Отсюда уровень и мощность его будут меньше мощности WMW-критерия. В то же время в соответствии с леммой НП он будет наиболее мощным среди всех критериев, уровни которых не превышают его уровень, приближённо равный $\alpha_k \approx 0{,}201923$. Попытка получить более мощный вариант S_E-критерия выбором в критическую область $W_{\alpha''}(0{,}4)$ элементов из НКО $W_{\alpha_k}(0{,}4)$ и из следующих по порядку, комбинируя получающийся уровень с мощностью при $\mathcal{H}(0{,}4)$, привела к варианту S_E-критерия, эквивалентному WMW-критерию.

Использование леммы НП против альтернативы $\mathcal{H}(0{,}5)$ дало вариант S_E-критерия, который отличается от эквивалентного WMW-критерия уже тремя повышенными значениями и одним пониженным. Мощность его при $\mathcal{H}(0{,}5)$, равная $\approx$0,32053, меньше мощности WMW-критерия, которая равна $\approx$0,32541. Попытка получить более мощный вариант S_E-критерия против $\mathcal{H}(0{,}5)$ вновь привела к варианту, эквивалентному WMW-критерию.

Применение леммы НП против альтернатив $\mathcal{H}(a_i)$, $a_i = 0{,}6; 0{,}7; \ldots; 1{,}0$, дало один и тот же вариант НКО $W_{\alpha_k}(a_i)$ и S_E-критерия с уровнем $\alpha_k \approx 0{,}201870$ и функцией $h_S(z)$, указанной в табл. 1.

И в этом случае попытка получить более мощный вариант S_E-критерия против $\mathcal{H}(0{,}6)$ привела к варианту, эквивалентному WMW-критерию.

Попытки получить наиболее мощные варианты S_E-критерия против альтернатив $\mathcal{H}(0{,}7)$, $\mathcal{H}(0{,}8)$ и $\mathcal{H}(0{,}9)$ привели к общему варианту S_E-критерия с мощностью при $\mathcal{H}(0{,}7)$, равной $\approx$0,38169, что уже больше мощности WMW-критерия, которая равна $\approx$0,38168.

Наконец, попытка получить более мощный вариант S_E-критерия против $\mathcal{H}(1{,}0)$ привела к варианту критической области $W_{\alpha''}(1{,}0)$ с уровнем $\alpha'' \approx 0{,}202896$ и мощностью, равной $\approx$0,474106, что больше мощности WMW-критерия, которая равна $\approx$0,473846. В эту область были включены все элементы-пары из НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$, кроме элемента (12, 7), заменяя $h_S(7) = 11$ из табл. 1 на $h_S(7) = 12$, и элемента (16, 0), заменяя $h_S(0) = 15$ на $h_S(0) = 16$, и добавлены элементы (10, 10), (15, 1), (14, 3) путём замены для этого $h_S(10) = 10$ на $h_S(10) = 9$, $h_S(1) = 15$ на $h_S(1) = 14$, $h_S(3) = 14$ на $h_S(3) = 13$ соответственно.

В табл. 2 для различных значений параметра θ системы распределений (10), (11), которая никак не связана с распределением (7), сравниваются значения мощности WMW-критерия (приведены в первой строке таблицы с точностью, достаточной для сравнений)

Таблица 1

Значения $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 22$, при $m = 2$, $n = 11$, отвечающие НКО $W_{\alpha_k}(a_i)$, $a_i = 0{,}6; 0{,}7; \ldots; 1{,}0$

z	0–1	2–3	4–5	6	7–8	9–10	11	12–13	14–15	16	17	18	19	…	22
h	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	…	0

Таблица 2

Мощности критериев для случая с распределениями (10), (11) при $m = 2$, $n = 11$

a^*	θ									
	0,0	0,1	0,3	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
—	0,202898	0,24782	0,3685	0,526	0,725	0,871	0,950	0,984	0,9955	$0{,}9^2 88$
0,7	0,202850	0,24776	0,3687	0,529	0,732	0,877	0,954	0,985	0,9960	$0{,}9^2 90$
1,0	0,202896	0,24781	0,3690	0,531	0,739	0,884	0,958	0,987	0,9967	$0{,}9^2 92$

со значениями мощности полученных двух вариантов S_E-критерия. Уровни критериев даны в вертикальной колонке $\theta = 0{,}0$.

2. *Случай* $m = 2$, $n = 24$ ($m + 2n = 50$). При $C = 75$ в (1) уровень WMW-критерия равен $\alpha \approx 0{,}0983575$. В этом случае использование леммы НП для проверки гипотезы H_0 против $\mathcal{H}(a)$ при $a_i = 0{,}1; 0{,}2; \ldots; 0{,}4$ приводит к варианту S_E-критерия, эквивалентному WMW-критерию. Использование леммы НП при $a_i = 0{,}5; 0{,}6; \ldots; 0{,}9$ приводит к варианту S_E-критерия с уровнем значительно меньшим, чем α, а попытки получить более мощный вариант S_E-критерия дают вариант S_E-критерия, эквивалентного WMW-критерию.

Наконец, использование леммы НП для проверки гипотезы H_0 против альтернативы $\mathcal{H}(1{,}0)$ привело к варианту НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$ и S_E-критерия с уровнем $\alpha_k \approx 0{,}0983575$ и критическими значениями, данными в табл. 3.

Мощность этого варианта S_E-критерия при $\mathcal{H}(1{,}0)$ равна $\approx$0,27690, что также меньше мощности WMW-критерия, которая равна $\approx$0,277839. Попытка получить наиболее мощный вариант S_E-критерия, выбирая в критическую область $W_{\alpha''}(1{,}0)$ элементы из НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$ и из следующих по порядку, привела к включению в критическую область $W_{\alpha''}(1{,}0)$ всех элементов НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$, за исключением двух элементов (36, 4) (2-го с конца из попавших в НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$) и (35, 7) (7-го с конца), и добавлению следующих элементов: (37, 2), (26, 22), (36, 3), (37, 0). Уровень этой области и S_E-критерия получился равным $\approx$0,098774, что всё ещё меньше уровня WMW-критерия, а мощность — равной $\approx$0,277843, что уже больше мощности WMW-критерия.

В табл. 4 для различных значений параметра θ системы распределений (10), (11) сравниваются мощности WMW-критерия и варианта S_E-критерия, полученного для проверки гипотезы H_0 против $\mathcal{H}(1{,}0)$.

Таблица 3

Значения $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 48$, при $m = 2$, $n = 24$, отвечающие НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
h	37	37	37	36	35	35	35	34	34	33	33	32	31	31
z	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	…	48
h	30	30	29	29	28	28	27	26	26	25	24	23	…	0

Таблица 4

Мощности критериев для случая с распределениями (10), (11) при $m = 2$, $n = 24$

a^*	θ									
	0,0	0,3	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25
—	0,0987755	0,17998	0,268463	0,4362	0,646	0,829	0,939	0,984	0,996	$0{,}9^3 69$
1,0	0,0987745	0,17997	0,268467	0,4368	0,650	0,834	0,942	0,985	0,997	$0{,}9^3 76$

Таблица 5

Значения $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 100$, при $m = 2$, $n = 50$, отвечающие НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$

z	0	1–2	3–4	5–7	8–9	10–12	13–14	15–16	17–18	19	20–21
h	84	83	82	81	80	79	78	77	76	75	74
z	22–23	24–25	26–27	28–29	30	31–32	33	34	35	...	100
h	73	72	71	70	69	68	67	66	65	...	0

Таблица 6

Мощности критериев для случая с распределениями (10), (11) при $m = 2$, $n = 50$

a^*	θ								
	0,0	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5
—	0,049699087	0,2227347	0,3661	0,571	0,780	0,922	0,9827	0,9975	$0{,}9^3775$
1,0	0,049699069	0,2227349	0,3662	0,573	0,783	0,924	0,9833	0,9976	$0{,}9^3783$

Из полученных в случаях 1 и 2 числовых результатов уже видно, что при достаточно малых значениях $\alpha = \alpha(m, n)$ для отыскания подходящего варианта S_E-критерия можно обращаться непосредственно к альтернативе $\mathcal{H}(1{,}0)$.

3. *Случай* $m = 2$, $n = 50$ ($m + 2n = 102$). При $C = 169$ в (1) уровень WMW-критерия равен $\alpha \approx 0{,}049699087$. Использование леммы НП для проверки гипотезы H_0 против $\mathcal{H}(1{,}0)$ привело к варианту НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$ и S_E-критерия с критическими значениями, данными в табл. 5, и уровнем $\alpha_k \approx 0{,}049692269$.

Мощность этого варианта S_E-критерия при $\mathcal{H}(1{,}0)$ равна $\approx$0,156642, что несколько меньше мощности WMW-критерия, равной $\approx$0,156658. Попытка получить более мощный вариант S_E-критерия, выбирая в критическую область $W_{\alpha''}(1{,}0)$ элементы из НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$ и из не попавших в НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$, привела к включению в критическую область $W_{\alpha''}(1{,}0)$ всех элементов НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$, кроме пяти элементов: (81, 9), (80, 10), (80, 11), (79, 13), (75, 20), и включить дополнительно следующих элементов: (81, 6), (81, 7), (70, 29).

В табл. 6 для различных значений параметра θ системы распределений (10), (11) сравниваются значения мощности WMW-критерия со значениями мощности последнего варианта S_E-критерия.

4. *Случай* $m = n = 3$ ($m + 2n = 9$). При $C = 12$ в (1) уровень WMW-критерия равен $\alpha = 0{,}(190476)$ — бесконечная периодическая десятичная дробь. Использование леммы НП для проверки гипотезы H_0 против $\mathcal{H}(1{,}0)$ привело к варианту НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$ и S_E-критерия с уровнем α_k, совпадающим с уровнем WMW-критерия α (редкий на практике случай), и мощностью при альтернативе $\mathcal{H}(1{,}0)$, равной 0,47(526695), что больше мощности WMW-критерия, которая равна 0,46(897546). Критические значения этого варианта S_E-критерия даны в табл. 7.

В табл. 8 для различных значений параметра θ системы распределений (10), (11) сравниваются значения мощности WMW-критерия со значениями мощности этого S_E-критерия.

Таблица 7

Значения $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 9$, при $m = 3$, $n = 3$, отвечающие НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$ с уровнем $\alpha_k = \alpha$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h	6	6	5	4	4	3	2	2	1	0

Таблица 8

Мощности критериев для системы распределений (10), (11) при $m = 3$, $n = 3$, $\alpha = 0{,}(190476)$

a^*	θ											
	0,0	0,1	0,3	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5
—	α	0,251	0,39	0,53	0,68	0,796	0,872	0,921	0,952	0,971	0,982	0,989
1,0	α	0,255	0,41	0,56	0,72	0,834	0,903	0,944	0,968	0,982	0,990	0,994

Таблица 9

Значения $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 18$, при $m = 3$, $n = 6$, отвечающие НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…	18
h	14	13	13	12	12	11	10	10	9	8	8	7	6	5	…	0

Таблица 10

Мощности критериев для системы распределений (10), (11) при $m = 3$, $n = 6$

a^*	θ									
	0,0	0,1	0,5	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	3,5
—	0,090109	0,121591	0,347	0,705	0,906	0,951	0,975	0,9941	0,9986	$0{,}9^{3}69$
1,0	0,090097	0,121592	0,355	0,727	0,923	0,962	0,982	0,9964	0,9992	$0{,}9^{3}85$

5. *Случай* $m = 3$, $n = 6$ ($m+2n = 15$). При $C = 27$ в (1) уровень WMW-критерия равен $\alpha = 0{,}090(109890)$. Использование леммы НП для проверки гипотезы H_0 против $\mathcal{H}(1{,}0)$ привело к варианту S_E-критерия с уровнем $\alpha_k \approx 0{,}086221$ и критическими значениями, указанными в табл. 9.

Мощность этого варианта S_E-критерия при $\mathcal{H}(1{,}0)$ равна $\approx$0,295305, что меньше мощности WMW-критерия, равной $\approx$0,304370. Попытка получить более мощный вариант привела к включению в критическую область $W_{\alpha''}(1{,}0)$ всех элементов НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$, кроме элемента (11, 6), и добавлению элементов (12, 4) и (7, 11). В результате получился вариант S_E-критерия с мощностью, лишь несколько меньшей мощности WMW-критерия. Тем не менее при распределениях, отличных от (7), этот вариант S_E-критерия может быть мощнее WMW-критерия.

В табл. 10 для различных значений параметра θ системы распределений (10), (11) сравниваются значения мощности WMW-критерия со значениями мощности последнего варианта S_E-критерия.

6. *Случай* $m = 3$, $n = 21$ ($m + 2n = 45$). При $C = 99$ в (1) уровень WMW-критерия равен $\alpha \approx 0{,}05003523$. Использование леммы НП для проверки гипотезы H_0 против $\mathcal{H}(1{,}0)$ привело к варианту НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$ и S_E-критерия с уровнем $\alpha_k \approx 0{,}0498208$ и критическими значениями, сведёнными в табл. 11.

Таблица 11

Значения $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 63$, при $m = 3$, $n = 21$, отвечающие НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
h	49	49	49	49	49	48	48	47	47	46	45	45	44	43	43	42	42	41
z	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	…	63
h	40	40	39	38	38	37	37	36	35	35	34	34	33	32	31	30	…	0

Таблица 12

Мощности критериев для системы распределений (10), (11) при $m = 3$, $n = 21$

a^*	θ									
	0,0	0,3	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25
—	0,05003523	0,123027	0,220	0,414	0,650	0,842	0,946	0,9859	0,9969	$0{,}9^3 45$
1,0	0,05003521	0,123055	0,222	0,570	0,665	0,855	0,953	0,9882	0,9976	$0{,}9^3 58$

Мощность этого варианта при альтернативе $\mathcal{H}(1{,}0)$ равна $\approx$0,21379, что меньше мощности WMW-критерия, равной $\approx$0,21418. Попытка получить более мощный при $\mathcal{H}(1{,}0)$ вариант S_E-критерия привела к включению в критическую область $W_{\alpha''}(1{,}0)$ всех элементов НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$, кроме элементов (48, 7) и (49, 5), и добавлению элементов: (36, 26), (49, 4), (49, 3), (49, 0), (49, 1). В результате получился вариант S_E-критерия с уровнем, равным $\alpha'' \approx 0{,}05003521$, и мощностью при альтернативе $\mathcal{H}(1{,}0)$, равной $\approx$0,214510, что больше мощности WMW-критерия.

В табл. 12 для различных значений параметра θ системы распределений (10), (11) сравниваются значения мощности WMW-критерия со значениями мощности последнего варианта S_E-критерия.

7. *Случай* $m = 5$, $n = 5$ ($m+2n = 15$). При $C = 41$ в (1) уровень WMW-критерия равен $\alpha \approx 0{,}(019980)$. Использование леммы НП для проверки гипотезы H_0 против альтернативы $\mathcal{H}(1{,}0)$ привело к варианту НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$ и S_E-критерия с уровнем $\alpha_k \approx 0{,}0197865$ и критическими значениями, данными в табл. 13.

Мощность этого варианта S_E-критерия при $\mathcal{H}(1{,}0)$ равна $\approx$0,13465, что больше мощности WMW-критерия, равной $\approx$0,13427. Попытка получить ещё более мощный при $\mathcal{H}(1{,}0)$ вариант S_E-критерия привела к включению в критическую область $W_{\alpha''}(1{,}0)$ всех элементов НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$, за исключением элемента (22, 0), и добавлению элемента (21, 1) (1-го из следующих по порядку элементов). Уровень критической области $W_{\alpha''}(1{,}0)$ получился равным $\approx$0,019966, а мощность — равной $\approx$0,13552, что больше мощности WMW-критерия.

В табл. 14 для различных значений параметра θ системы распределений (10), (11) сравниваются значения мощности WMW-критерия со значениями мощности полученного последнего варианта S_E-критерия.

Таблица 13

Значения $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 25$, при $m = 5$, $n = 5$, отвечающие НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$

z	0–1	2	3–4	5	6–7	8	9–10	11	12	13	14	15	...	25
h	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	...	0

Таблица 14

Мощности критериев для системы распределений (10), (11) при $m = 5$, $n = 5$

a^*	θ										
	0,0	0,5	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	3,0	4,0
—	0,(019980)	0,168	0,494	0,648	0,768	0,853	0,909	0,945	0,966	0,988	0,9984
1,0	0,019966	0,177	0,521	0,676	0,792	0,871	0,922	0,956	0,973	0,990	0,9988

Таблица 15

Значения $h_S(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 40$, при $m = 5$, $n = 8$, отвечающие НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...	40
h	34	34	34	34	33	33	32	31	31	30	30	29	28	27	26	...	0

Таблица 16

Мощности критериев для системы распределений (10), (11) при $m = 5$, $n = 8$

a^*	θ										
	0,0	0,5	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	3,0	4,0
—	0,00407882	0,0464	0,256	0,423	0,588	0,725	0,826	0,894	0,937	0,978	0,9976
1,0	0,00407875	0,0474	0,273	0,450	0,621	0,759	0,856	0,918	0,955	0,987	0,9991

8. *Случай* $m = 5$, $n = 8$ ($m+2n = 21$). При $C = 70$ в (1) уровень WMW-критерия равен $\alpha \approx 0{,}00407882$. Использование леммы НП для проверки гипотезы H_0 против альтернативы $\mathcal{H}(1{,}0)$ привело к варианту НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$ и S_E-критерия с уровнем $\alpha_k \approx 0{,}003800$ и критическими значениями, данными в табл. 15.

Мощность этого варианта S_E-критерия при $\mathcal{H}(1{,}0)$ равна $\approx 0{,}0402295$, что меньше мощности WMW-критерия, равной $\approx 0{,}042679$. Попытка получить более мощный при $\mathcal{H}(1{,}0)$ вариант S_E-критерия привела к включению в критическую область $W_{\alpha''}(1{,}0)$ всех элементов НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$, за исключением элемента (32, 7), последнего из попавших в НКО $W_{\alpha_k}(1{,}0)$, и (35, 2) (5-го с конца), и добавлению элемента (30, 10) (1-го из следующих по порядку элементов). Уровень критической области $W_{\alpha''}(1{,}0)$ получился равным $\alpha'' \approx 0{,}00407875$, что всё ещё меньше уровня WMW-критерия, а мощность — равной $\approx 0{,}042709$, что уже больше мощности WMW-критерия.

В табл. 16 для различных значений параметра θ системы распределений (10), (11) сравниваются значения мощности WMW-критерия со значениями мощности полученного последнего варианта S_E-критерия.

Коснёмся теперь не рассмотренного выше случая $m = 1$. К сожалению, здесь использование леммы НП при построении наиболее мощного критерия для проверки гипотезы H_0 против альтернативы $\mathcal{H}(a)$ при каждом $a \in [0, 1]$ приводит, как правило, к варианту S_E-критерия, эквивалентному WMW-критерию. Нами было замечено лишь несколько исключений. Во всех из них полученный вариант S_E-критерия отличается от варианта, эквивалентного WMW-критерию, по существу, лишь одним повышенным значением функции $h_S(z)$ (см. также случай $m = 2$, $n = 11$ с альтернативой $\mathcal{H}(0{,}4)$), при этом попытки приблизиться к уровню WMW-критерия, как и везде выше, с целью по возможности более корректно сравнить мощности критериев приводят к варианту S_E-критерия, эквивалентному WMW-критерию.

Заключение. Сравнение данных в таблицах показывает, что новый критерий предпочтительнее критерия Вилкоксона — Манна — Уитни. Его преимущество в мощности при $m \geq 2$ возрастает с увеличением m. То, что система экспоненциальных распределений (10), (11) никак не связана с распределением (7), и тот факт, что непараметрические критерии сравнительно мало подвержены влиянию отклонений от использованных при их построении конкретных распределений, позволяют надеяться, что преимущество нового критерия сохранится в широком классе вероятностных распределений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wilcoxon F.** Individual comparisons by ranking methods // Biometrics Bull. 1945. **1**, N 6. P. 80–83.
2. **Mann H. B., Whitney D. R.** On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other // Ann. Math. Statist. 1947. **18**, N 1. P. 50–60.
3. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 899 с.
4. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964. 498 с.
5. **Салов Г. И.** Новый статистический критерий для задач с двумя и тремя выборками, более мощный, чем критерии Вилкоксона и Уитни // Автометрия. 2011. **47**, № 4. С. 58–70.
6. **Салов Г. И.** О мощности одного нового статистического критерия и двухвыборочного критерия Вилкоксона // Автометрия. 2014. **50**, № 1. С. 44–59.
7. **Салов Г. И.** Новый непараметрический статистический критерий для задач с тремя выборками, более эффективный, чем критерий Уитни // Автометрия. 2015. **51**, № 2. С. 11–22.
8. **Салов Г. И.** Управляемый непараметрический статистический критерий для проверки гипотезы об однородности двух выборок // Тез. докл. Междунар. конф. «Математика в современном мире», посвящённой 60-летию Ин-та математики им. С. Л. Соболева. Новосибирск, 14–19 августа 2017. С. 362.

Поступила в редакцию 14 мая 2018 г.