

УДК 681.5 : 004.3

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ БИЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ\*

А. З. Асанов<sup>1</sup>, Д. Н. Демьянов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский технологический университет,  
119454, Москва, просп. Вернадского, 78

<sup>2</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18  
E-mail: demyanovdn@mail.ru

Рассмотрена задача асимптотического оценивания линейной комбинации переменных состояния билинейной динамической системы с помощью наблюдателя минимального порядка. Предложен алгоритм расчёта матричных коэффициентов функционального наблюдателя с использованием технологии канонизации матриц и сформулированы условия разрешимости задачи синтеза.

*Ключевые слова:* билинейная система, функциональный наблюдатель, алгоритм синтеза, канонизация матриц.

DOI: 10.15372/AUT20170403

**Введение.** Оценивание вектора состояний динамической системы по измерениям её входа и выхода является одной из классических задач теории управления. Для линейных конечномерных полностью определённых систем построение минимальных наблюдателей полного фазового вектора впервые было описано Люенбергером [1], при этом построенный им наблюдатель имел порядок, равный разности порядка системы и числа линейно независимых выходов.

В ряде случаев (например, при решении задач модального управления или диагностики) информация о полном векторе состояний системы не требуется, достаточно лишь получать данные о некотором его функционале. В связи с этим возникает задача построения функционального наблюдателя [2] динамической системы, формирующего асимптотическую оценку искомого функционала. Так как размерность такого наблюдателя может оказаться ниже размерности наблюдателя Люенбергера, задача синтеза функционального наблюдателя представляется весьма привлекательной. Известно, что построение функциональных наблюдателей для оценки неизмеряемых внешних возмущений, являясь специфическим развитием теории наблюдателей для систем с сигнальными возмущениями, позволяет эффективно решать задачи адаптивного [3–5] и робастного управлений [6, 7], задачи идентификации и диагностирования [8, 9].

Задача аналитического синтеза функциональных наблюдателей для многосвязной динамической системы рассматривалась во многих аспектах. Так, в работе [10] предложен алгоритм аналитического синтеза функционального наблюдателя для многомерной системы. В [11] показано построение функционального наблюдателя в задаче оценивания непосредственно неизмеряемых внешних возмущений. В работе [12] дан алгоритм аналитического синтеза функциональных наблюдателей для динамических систем с сигнальными воз-

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-08-00516).

мушениями. Алгоритм синтеза функциональных наблюдателей на основе использования линейных матричных неравенств представлен в [13].

В данной работе применение упомянутых алгоритмов аналитического синтеза функциональных наблюдателей расширяется на билинейные динамические системы.

**Постановка задачи.** Пусть рассматривается билинейный динамический объект, описываемый уравнениями в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu + uFx; \quad y = Cx. \quad (1)$$

Здесь  $x \in R^n$  — вектор состояния;  $u$  — скалярный сигнал управления;  $y \in R^m$  — вектор измеряемого выхода;  $A, B, F, C$  — числовые матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что все матрицы коэффициентов известны, при этом строки матрицы  $C$  являются линейно независимыми и  $n > m$ . Значения сигналов управления и измеряемого выхода могут быть вычислены с высокой точностью, а вектор состояния непосредственному измерению недоступен.

Пусть требующаяся нам информация о процессах, протекающих в рассматриваемом объекте, содержится в векторе  $g$ , определяемом выражением

$$g = Kx, \quad (2)$$

где  $g \in R^r$ ;  $K$  — числовая матрица соответствующих размеров. Будем полагать, что выполняется условие  $r < n - m$  (в противном случае применение функционального наблюдателя является неоправданным, так как его порядок будет больше, чем у наблюдателя Люенбергера).

Требуется синтезировать динамическую систему порядка  $r$ , которая формировала бы по известной информации о сигналах  $y$  и  $u$  вектор  $\hat{g}$  такой, что

$$\varepsilon(t) = \hat{g}(t) - g(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (3)$$

**Предварительные преобразования переменных состояния.** В процессе решения поставленной задачи будем использовать технологию канонизации матриц и методы решения линейных матричных уравнений произвольной размерности, подробно описанные в работе [14]. Суть указанной технологии заключается в том, что некоторой матрице  $M$  размера  $m \times n$  ставится в соответствие четвёрка матриц  $\tilde{M}^L, \tilde{M}^R, \bar{M}^L, \bar{M}^R$ , удовлетворяющих равенству

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}^L \\ \bar{M}^L \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \tilde{M}^R & \bar{M}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\tilde{M}^L, \tilde{M}^R$  — левый и правый матричные делители единицы,  $\bar{M}^L, \bar{M}^R$  — левый и правый матричные делители нуля. Матрица  $\tilde{M} = \tilde{M}^R \tilde{M}^L$  называется сводным канонизатором.

Решим второе уравнение системы (1) с использованием методов, изложенных в [14], выразив в общем виде вектор состояния динамического объекта

$$x = \tilde{C}y + \bar{C}^R z. \quad (4)$$

С учётом принятого ранее допущения о линейной независимости строк матрицы  $C$  можно утверждать, что соотношение (4) будет справедливо всегда, а размерность вектора  $z$  составляет  $n - m$ .

Запишем уравнение (2) с использованием соотношения (4):

$$g = K\tilde{C}y + K\bar{C}^R z. \quad (5)$$

Обозначим символом  $K_1$  произведение  $K\bar{C}^R$  и представим неизвестный вектор  $z$  в виде линейной комбинации некоторых неизвестных векторов  $\mu$  и  $\eta$ :

$$z = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1^R & \bar{K}_1^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Такое представление всегда возможно, поскольку согласно свойствам делителей нуля и единицы матрица коэффициентов в правой части выражения (6) всегда будет квадратной невырожденной.

С учётом выражения (6) и свойств матричных делителей нуля соотношение (5) может быть представлено в следующем виде:

$$g = K\tilde{C}y + K_1\tilde{K}_1^R\mu. \quad (7)$$

При этом вектор состояния исходного объекта управления будет определяться соотношением

$$x = \tilde{C}y + \bar{C}^R\tilde{K}_1^R\mu + \bar{C}^R\bar{K}_1^R\eta. \quad (8)$$

Для повышения компактности записи последующих выражений введём обозначения

$$T = \begin{pmatrix} \tilde{C} & \bar{C}^R\tilde{K}_1^R & \bar{C}^R\bar{K}_1^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix}; \quad V = T^{-1} = \begin{pmatrix} V_1^T & V_2^T & V_3^T \end{pmatrix}^T. \quad (9)$$

Таким образом, вектор состояния исходного динамического объекта может быть выражен через выходной сигнал и два неизвестных вектора, из которых только один участвует в формировании интересующего нас вектора  $g$ .

**Синтез наблюдающего устройства.** Запишем первое уравнение системы (1) в новых координатах, используя выражения (8) и (9):

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1AT_1 & V_1AT_2 & V_1AT_3 \\ V_2AT_1 & V_2AT_2 & V_2AT_3 \\ V_3AT_1 & V_3AT_2 & V_3AT_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1B \\ V_2B \\ V_3B \end{pmatrix} u + u \begin{pmatrix} V_1FT_1 & V_1FT_2 & V_1FT_3 \\ V_2FT_1 & V_2FT_2 & V_2FT_3 \\ V_3FT_1 & V_3FT_2 & V_3FT_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Сформируем уравнение динамики наблюдателя, взяв за основу второе уравнение системы (10) и дополнив его слагаемым, пропорциональным разности между истинным значением вектора  $\mu$  и его оценкой  $\hat{\mu}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mu}} = & V_2AT_1y + V_2AT_2\hat{\mu} + V_2AT_3\eta + V_2Bu + V_2FT_1y + V_2FT_2\hat{\mu} + V_2FT_3\eta + \\ & + L[(V_1AT_2 + uV_1FT_2)\mu - (V_1AT_2 + uV_1FT_2)\hat{\mu}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдём истинное значение вектора  $(V_1AT_2 + uV_1FT_2)\mu$  из первого уравнения системы (10), подставим его в формулу (11) и приведём подобную оценку:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mu}} = & (V_2 - LV_1)AT_2\hat{\mu} + (V_2 - LV_1)AT_1y + (V_2 - LV_1)AT_3\eta + (V_2 - LV_1)Bu + \\ & + u(V_2 - LV_1)FT_1y + u(V_2 - LV_1)FT_2\hat{\mu} + u(V_2 - LV_1)FT_3\eta + L\dot{y}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оценка искомого вектора  $g$  будет задаваться выражением

$$\hat{g} = K\tilde{C}y + K_1\tilde{K}_1^R\hat{\mu}. \quad (13)$$

Определим закон изменения ошибки оценивания вектора  $\mu$  вычитанием из уравнения (12) второго уравнения системы (10) и приведём подобные оценки:

$$w = \hat{\mu} - \mu; \quad \dot{w} = (V_2 - LV_1)AT_2w + u(V_2 - LV_1)FT_2w. \quad (14)$$

Анализ второго уравнения системы (14) показывает, что в общем случае ошибка оценивания изменяется по достаточно сложному закону. Однако это уравнение можно существенно упростить, подобрав матрицу  $L$ , обеспечивающую выполнение условия

$$(V_2 - LV_1)FT_2 = 0. \quad (15)$$

Тогда второе уравнение системы (14) будет иметь вид  $\dot{w} = (V_2 - LV_1)AT_2w$ . Данное уравнение является линейным, поэтому при условии наблюдаемости по Калману пары  $(V_2AT_2 \ V_1AT_2)$  соответствующим выбором матрицы  $L$  обеспечивается асимптотическая устойчивость процесса оценивания вектора  $\mu(t)$ . При этом с течением времени вектор  $w(t)$  будет асимптотически стремиться к нулю.

С учётом уравнений (7) и (13) ошибка оценивания вектора  $g$  будет определяться выражением  $\varepsilon(t) = \hat{g}(t) - g(t) = K_1\tilde{K}_1^Rw(t)$ . Основываясь на полученных ранее результатах, можно утверждать, что вектор  $\varepsilon(t)$  также будет асимптотически стремиться к нулю с течением времени, т. е. условие (3) будет выполняться.

Следует отметить, что в уравнение динамики наблюдателя (12) также входят слагаемые, зависящие от неизмеряемого вектора  $\eta(t)$ . Для исключения их из рассмотрения выберем матрицу наблюдений таким образом, чтобы выполнялись условия

$$(V_2 - LV_1)AT_3 = 0; \quad (V_2 - LV_1)FT_3 = 0. \quad (16)$$

При одновременном выполнении условий (15) и (16) уравнение динамики наблюдателя имеет вид

$$\dot{\hat{\mu}} = (V_2 - LV_1)AT_2\hat{\mu} + (V_2 - LV_1)AT_1y + (V_2 - LV_1)Bu + u(V_2 - LV_1)FT_1y + Lj. \quad (17)$$

Если при этом можно определить матрицу  $L$ , обеспечивающую расположение в заданной области комплексной плоскости собственных чисел матрицы  $(V_2 - LV_1)AT_2$ , то уравнения (17) и (13) будут описывать процесс асимптотического оценивания вектора  $g$ .

Следует отметить, что уравнение (17) включает в себя слагаемое, пропорциональное производной выходного сигнала. Реализация операции дифференцирования на практике может осложнять процесс вычисления и вносить дополнительные погрешности, поэтому её рекомендуется по возможности избегать. С этой целью модифицируем расчётную схему, введя вспомогательный вектор  $\chi = \hat{\mu} - Ly$ . В данном случае уравнения (17) и (13) можно записать следующим образом:

$$\dot{\chi} = (V_2 - LV_1)AT_2\chi + (V_2 - LV_1)A(T_1 + T_2L)y + (V_2 - LV_1)Bu + u(V_2 - LV_1)FT_1y, \quad (18)$$

$$\hat{g} = (K\tilde{C} + K_1\tilde{K}_1^RL)y + K_1\tilde{K}_1^R\chi. \quad (19)$$

При выполнении условий (15) и (16) система уравнений (18), (19) описывает асимптотический функциональный наблюдатель, не требующий дифференцирования выходного сигнала.

**Анализ условий разрешимости задачи синтеза.** Найдём, при каких значениях матрицы наблюдений будут выполняться условия (15), (16). Для этого объединим их в одно линейное матричное уравнение относительно матрицы  $L$  и проанализируем его условие разрешимости. Получим

$$V_2 \begin{pmatrix} FT_2 & AT_3 & FT_3 \end{pmatrix} - LV_1 \begin{pmatrix} FT_2 & AT_3 & FT_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (20)$$

Обозначим символом  $Q$  блочную матрицу  $V_1 \begin{pmatrix} FT_2 & AT_3 & FT_3 \end{pmatrix}$ . Тогда решение уравнения (20) существует, если выполняется условие

$$V_2 \begin{bmatrix} FT_2 & AT_3 & FT_3 \end{bmatrix} \bar{Q}^R = 0. \quad (21)$$

При этом полное множество решений уравнения (20) задаётся выражением

$$L = V_2 \begin{bmatrix} FT_2 & AT_3 & FT_3 \end{bmatrix} \tilde{Q} + \pi \bar{Q}^L. \quad (22)$$

Здесь  $\pi$  — произвольная матрица соответствующего размера.

Анализ соотношений (21), (22) позволяет утверждать, что в зависимости от свойств матрицы  $Q$  возможны три различные ситуации.

1. Если условие (21) не выполняется, то матрицы наблюдений, удовлетворяющей условиям (15), (16), не существует. В этом случае предлагаемый в данной работе подход не позволяет построить наблюдатель с требуемыми характеристиками.

2. Если условие (21) выполняется и матрица  $Q$  не имеет левого делителя нуля, то условиям (15), (16) удовлетворяет единственная матрица наблюдений

$$L = V_2 \begin{bmatrix} FT_2 & AT_3 & FT_3 \end{bmatrix} \tilde{Q}. \quad (23)$$

Если определяемая формулой (23) матрица наблюдений обеспечивает требуемую динамику процесса оценивания, то она является решением исходной задачи. В противном случае предлагаемый подход к построению наблюдателя не применим.

3. Если условие (21) выполняется и матрица  $Q$  имеет левый делитель нуля, то (15), (16) задают множество матриц  $L$ , определяемое формулой (22). При этом матрица коэффициентов в уравнении динамики ошибки оценивания имеет следующий вид:

$$A_L = (V_2 - LV_1)AT_2 = V_2AT_2 - V_2 \begin{bmatrix} FT_2 & AT_3 & FT_3 \end{bmatrix} \tilde{Q}V_1AT_2 - \pi \bar{Q}^L V_1AT_2.$$

Обозначим

$$A^* = \left( V_2AT_2 - V_2 \begin{bmatrix} FT_2 & AT_3 & FT_3 \end{bmatrix} \tilde{Q}V_1AT_2 \right)^T; \quad B^* = (\bar{Q}^L V_1AT_2)^T. \quad (24)$$

Тогда задача обеспечения желаемой динамики процесса оценивания будет эквивалентна проблеме обеспечения требуемых собственных значений матрицы  $A^* - B^*\pi^T$ , решение которой может быть достаточно легко получено классическими методами модального управления при условии полной управляемости по Калману пары  $(A^*, B^*)$ . После нахождения матрицы  $\pi$  матрица  $L$  вычисляется по формуле (22).

Попробуем оценить условия применимости предлагаемого метода. Из уравнения (10) следует, что матрица  $Q$  имеет  $m$  строк и  $2n - 2m - r$  столбцов. Следовательно, если  $m \geq 2n - 2m - r$ , то условие (21), вероятнее всего, будет выполняться. Таким образом, рекомендуется использовать предлагаемый подход к построению наблюдателей лишь в случаях, когда для размерностей вектора состояния, измеряемого выхода и оцениваемого функционала справедливо соотношение  $3m + r \geq 2n$ .

**Обобщённый алгоритм синтеза наблюдающего устройства.** С учётом полученных результатов можно предложить следующий алгоритм аналитического синтеза функционального наблюдателя состояния билинейной динамической системы.

На начальном этапе необходимо задать исходные данные для расчётов: матрицы коэффициентов  $A, B, F, C, K$ , желаемое расположение собственных чисел матрицы динамики наблюдателя, а также указать, допустимо ли дифференцирование выходного сигнала.

После задания исходных данных процесс построения наблюдателя можно представить в виде последовательности этапов.

1. Провести канонизацию матрицы  $C$  и определить коэффициенты по формуле (9).
2. Сформировать матрицу  $Q$  и провести её канонизацию.
3. Проверить выполнение условия (21). Если оно не выполняется, то предлагаемый метод не применим.

4. Если матрица  $Q$  не имеет левого делителя нуля, то следует вычислить матрицу  $L$  по формуле (23) и определить расположение собственных чисел матрицы  $(V_2 - LV_1)AT_2$ . Если указанные собственные числа располагаются в области комплексной плоскости, заданной на первом шаге, то следует перейти к шагу 8, иначе предлагаемый метод не применим.

5. Вычислить матрицы  $A^*, B^*$  по формуле (24) и оценить управляемость по Калману пары  $(A^*, B^*)$ .

6. Если пара  $(A^*, B^*)$  полностью управляема по Калману, то следует методами модального управления определить матрицу  $\pi$ , обеспечивающую требуемое расположение собственных чисел матрицы  $A^* - B^*\pi^T$ . В противном случае рекомендуется изменить требования к динамике процесса оценивания и вернуться на первый этап алгоритма.

7. Вычислить матрицу  $L$  по формуле (22).

8. Сформировать уравнение динамики функционального наблюдателя и выражение для оценки вектора  $g$ . Если дифференцирование выходного сигнала допускается, то уравнение динамики наблюдателя задаётся формулой (17), а оценка интересующего нас функционала — выражением (13). Если дифференцирование выходного сигнала не допускается, то уравнение динамики наблюдателя задаётся формулой (18), а оценка интересующего нас функционала — выражением (19).

**Пример.** Для иллюстрации работоспособности предлагаемого алгоритма рассмотрим методический пример его применения. Пусть имеется некоторый объект, заданный системой уравнений (1), для которого необходимо оценить величину функционала (2). Матрицы коэффициентов принимают следующие значения:

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -11 & 4 & -7 & -3 \\ 15 & -6 & -19 & 6 & -10 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 35 & -22 & 47 & -17 & 25 & 11 \\ 17 & -10 & 23 & -8 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6).$$

Необходимо построить асимптотический функциональный наблюдатель первого порядка, не требующий дифференцирования выходного сигнала. Для обеспечения приемлемого быстродействия процесса оценивания полюс наблюдателя должен располагаться в точке комплексной плоскости с координатами  $(-30, 0j)$ .

Выполним последовательно все шаги вышеописанного алгоритма.

1. Проведём канонизацию матрицы  $C$  (для вычислений использовался программный продукт из [15]), определим матрицы  $T$  и  $V$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}^L \\ \bar{C}^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\tilde{C}^R \quad \bar{C}^R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0,2 & | & -1,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Сформируем матрицу  $Q$  и проведём её канонизацию:

$$Q = \begin{pmatrix} -0,40 & 5,40 & 2,40 \\ 0 & 11,00 & 1,00 \\ 0,20 & -4,20 & 0,80 \\ 0 & -19,00 & 1,00 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{Q}^L \\ \bar{Q}^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,09 & 0 & 0 \\ 0,23 & 0,06 & 0,47 & 0 \\ \hline -0,64 & 1,55 & -1,28 & 1,00 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Q}^R = \begin{pmatrix} 1,00 & 13,50 & 4,77 \\ 0 & 1,00 & -0,09 \\ 0 & 0 & 1,00 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}^R = \emptyset, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} -1,38 & 1,53 & 2,23 & 0 \\ -0,02 & 0,09 & -0,04 & 0 \\ 0,23 & 0,06 & 0,47 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Матрица  $Q$  не имеет правого делителя нуля, следовательно, условие (21) выполняется и предлагаемый метод может быть применён для решения задачи.

4. Матрица  $Q$  имеет левый делитель нуля, следовательно, существует множество решений уравнения (20).

5. Вычислим по формуле (24)  $A^* = -6,47$ ;  $B^* = 2,53$ .

6. Очевидно, что пара  $(A^*, B^*)$  полностью управляема по Калману. При этом требуемое расположение полюса наблюдателя обеспечивается значением  $\pi = 9,29$ .

7. Вычислим матрицу  $L$  по формуле (22):  $L = \begin{pmatrix} -12,49 & 17,68 & -18,99 & 2,29 \end{pmatrix}$ .

8. Сформируем уравнения наблюдателя на основе формул (18), (19):

$$\begin{cases} \dot{\chi} = -30\chi + \begin{pmatrix} -273,64 & -213,93 & 408,38 & -198,94 \end{pmatrix}y + 8,85u + \\ \quad + u \begin{pmatrix} -44,26 & 27,98 & -81,33 & 36,08 \end{pmatrix}y, \\ \hat{g} = \begin{pmatrix} -11,49 & 19,68 & -15,99 & 13,29 \end{pmatrix}y + \chi. \end{cases}$$

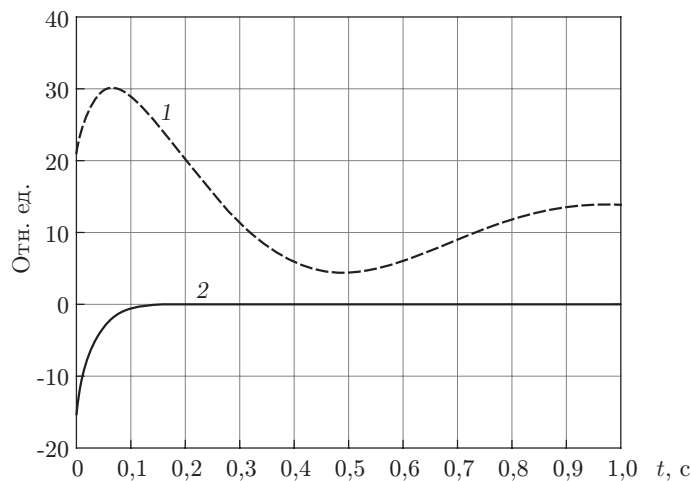


График изменения с течением времени оцениваемого функционала (кривая 1) и ошибки оценивания (кривая 2)

Для проверки корректности полученных результатов было проведено моделирование процесса функционирования синтезированного наблюдателя с помощью системы компьютерной математики MATLAB. В качестве примера на рисунке представлены результаты расчёта при  $u = \sin 2t$  и  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Как видно на графике, ошибка оценивания асимптотически стремится к нулю с заданной скоростью.

**Заключение.** В данной работе предложен алгоритм аналитического синтеза асимптотического наблюдателя для оценивания линейного функционала неизмеряемого вектора состояния билинейного динамического объекта со скалярным входом и векторным выходом, основанный на невырожденном преобразовании вектора состояния с применением технологии канонизации матриц. Сформулированы условия разрешимости и показано, что в конечном итоге проблема построения наблюдателя может быть сведена к решению задачи модального управления. Полученные результаты могут быть использованы на практике для решения задач модального управления, идентификации и диагностики билинейных динамических систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Luenberger D. G.** Observers for multivariable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1966. АС-11, N 2. P. 190–197.
2. **Коровин С. К., Фомичев В. В., Медведев И. С.** Синтез минимальных функциональных наблюдателей // ДАН. Теория управления. 2005. № 3. С. 316–320.
3. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Задание спектра нулей в системах управления с параллельной компенсацией // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 5. С. 54–64.
4. **Асанов А. З.** Аналитическое конструирование адаптивной системы с эталонной моделью // Изв. вузов. Авиационная техника. 2003. № 2. С. 17–21.
5. **Albertos P., Sala A.** Multivariable Control Systems. N. Y.: Springer, 2004. 340 p.
6. **Асанов А. З., Ахметзянов И. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез робастной системы управления многосвязным объектом с компенсацией возмущений // Тр. IX Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO-2012). М.: ИПУ РАН, 2012. С. 856–867.



7. **Еремин Е. Л., Шеленок Е. А.** Система нелинейного робастного управления для неаффинного нестационарного динамического объекта с запаздыванием // Автометрия. 2017. **53**, № 2. С. 63–71.
8. **Bonnick A.** Automotive Computer Controlled Systems. Diagnostic Tools and Techniques. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001. 252 p.
9. **Izermann R., Munchhof M.** Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications. Berlin — Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 705 p.
10. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез функциональных наблюдателей // Изв. вузов. Авиационная техника. 2013. № 4. С. 13–18.
11. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Оценивание непосредственно неизмеряемых внешних возмущений с использованием функциональных наблюдателей // Автометрия. 2015. **51**, № 5. С. 27–34.
12. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез функциональных наблюдателей для систем с сигнальными возмущениями // Автометрия. 2014. **50**, № 6. С. 111–119.
13. **Волков В. Г., Демьянов Д. Н.** Синтез функциональных наблюдателей с использованием линейных матричных неравенств // Автометрия. 2016. **52**, № 4. С. 21–29.
14. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
15. **Асанов А. З., Ахметзянов И. З.** Канонизация матриц произвольного размера средствами MATLAB // Тр. II Всерос. науч. конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». М.: ИПУ РАН, 2004. С. 798–804.

*Поступила в редакцию 16 мая 2017 г.*

---