

УДК 621.391

**ОЦЕНИВАНИЕ ВЕКТОРА ЧАСТОТ  
ДВУМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЁХТОЧЕЧНЫХ  
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ  
И СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ\***

**И. С. Грузман**

*Новосибирский государственный технический университет,  
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: isguzman@gmail.com*

Предложены простые в вычислительном отношении алгоритмы оценивания локального вектора частот вещественного двумерного сигнала с медленно изменяющимися параметрами, наблюдаемого при наличии аддитивного гауссовского шума. Для уточнения грубой максимально правдоподобной оценки вектора частот используются трёхточечные алгоритмы интерполяции и сингулярное разложение матрицы размера  $3 \times 3$  коэффициентов дискретного преобразования Фурье. Приведены результаты компьютерного моделирования, демонстрирующие эффективность алгоритмов при малых размерах анализируемого фрагмента.

*Ключевые слова:* оценивание частоты, вещественный двумерный сигнал, алгоритмы интерполяции, коэффициенты дискретного преобразования Фурье, сингулярное разложение матриц.

DOI: 10.15372/AUT20170302

**Введение.** Алгоритмы оценивания локального вектора частот двумерного ( $2D$ ) квазигармонического сигнала с медленно изменяющимися параметрами используются в задачах прогнозирования характеристик каналов связи с переменными параметрами [1], сегментации изображений [2], анализа характеристик и обнаружения квазипериодических текстур [3–5] и т. п.

Значение частоты в некоторой точке  $2D$ -сигнала определяется пространственным распределением его значений в окрестности этой точки. Оценка локального вектора частот вычисляется для каждого фрагмента  $2D$ -сигнала, формируемого скользящим окном размером  $N \times N$  отсчётов, последовательно занимающим все возможные значения на плоскости аргументов сигнала. При этом полагается, что в пределах окна частота сигнала практически постоянна, т. е. модель анализируемого фрагмента

$$\mathbf{z} = \mathbf{s} + \mathbf{w} = \{z(i_1, i_2) = s(i_1, i_2) + w(i_1, i_2)\}, \quad i_1 = \overline{0, N-1}, \quad i_2 = \overline{0, N-1}\}, \quad (1)$$

где

$$s(i_1, i_2) = A \cos(2\pi(f_1 i_1 + f_2 i_2) + \phi) \quad (2)$$

— вещественный двумерный гармонический сигнал;  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$  — вектор частот, компоненты которого  $|f_l| < 0,5$ ,  $l = \overline{1, 2}$ , начальная фаза  $\phi \in [0, 2\pi)$  и амплитуда  $A > 0$  —

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 2014/138, проект № 1176).

неизвестные параметры сигнала  $\mathbf{s}$ ,  $T$  — символ транспонирования;  $\mathbf{w}$  — аддитивный дискретный белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

Известен ряд алгоритмов для оценивания частоты двумерной комплексной экспоненты  $Ae^{j\phi + j2\pi(f_1i_1 + f_2i_2)}$  или вещественного гармонического сигнала (2), наблюдаемых в присутствии гауссовского шума [6–9]. Для модели (1) максимально правдоподобной (МП) оценкой  $\mathbf{f}$  является оценка, равная координатам максимума амплитудного спектра (АС)  $|\mathbf{Z}(\mathbf{k})| = |F_2\{\mathbf{z}\}|$  анализируемого фрагмента [10]

$$\widehat{\mathbf{f}}_{\text{МП}} = \frac{1}{N} \arg \max_{\mathbf{k}} |\mathbf{Z}(\mathbf{k})|. \quad (3)$$

Здесь  $F_2\{\cdot\}$  — двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ);  $\mathbf{k} = \{(k_1, k_2)^T, k_1 = \overline{0, N-1}, k_2 = \overline{0, N-1}\}$  — целочисленный вектор.

Методическая ошибка  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{МП}}$  определяется расстоянием между отсчётами дискретного АС, которое, в свою очередь, обратно пропорционально  $N$ . Увеличение размеров скользящего окна в целях повышения точности  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{МП}}$  приводит к снижению вычислительной эффективности алгоритма оценивания. Кроме того, в задачах оценивания медленно изменяющихся параметров сигналов и текстурной сегментации размеры скользящего окна ограничены размерами участков стационарности  $2D$ -сигнала. В этих задачах анализируемый фрагмент, как правило, содержит от двух до четырёх периодов сигнала, т. е. длина вектора частот  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$  удовлетворяет условию

$$2/N \leq \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq 4/N, \quad (4)$$

а параметр окна  $N$  не превышает несколько десятков отсчётов.

Чтобы уменьшить методическую ошибку МП-оценки частоты одномерных сигналов, применяются различные интерполяционные алгоритмы (ИА), учитывающие коэффициенты ДПФ [11–13]. Среди них наиболее эффективными являются трёхточечные алгоритмы Маклеода [11] и Якобсена [13], сочетающие высокую точность и низкую вычислительную сложность.

Для оценивания вектора частот  $2D$ -сигнала (2) или комплексной экспоненты в алгоритме PUMA [6, 14] использовано сингулярное разложение (SVD — Singular Value Decomposition) матриц. Основная идея алгоритма PUMA состоит в приближении матрицы  $\mathbf{z}$  размера  $N \times N$  матрицей первого ранга, т. е. представление  $\mathbf{z}$  в виде произведения вектор-столбца ( $N \times 1$ ) и вектор-строки ( $1 \times N$ ). Далее для уточнения оценки частоты применяются одномерные алгоритмы линейного предсказания и взвешенный метод наименьших квадратов. Вычислительная сложность алгоритма PUMA обусловлена двумя факторами. Во-первых, необходимо для каждого положения окна выполнять SVD матриц достаточно больших размеров. Во-вторых, алгоритмы уточнения оценки частоты являются итерационными.

В [7] предложен двухэтапный итерационный алгоритм оценивания вектора частот комплексной экспоненты. На первом этапе вычисляется грубая МП-оценка частоты (3). На втором этапе в целях повышения её точности поочередно используются два одномерных итерационных алгоритма для двухточечной интерполяции  $2D$ -спектра вдоль строк и столбцов. Как и в алгоритме PUMA, итерационный алгоритм приводит к увеличению объёма вычислений. Кроме того, в алгоритме [7] применяются лишь пять из девяти коэффициентов двумерного ДПФ в окрестности  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{МП}}$  размером  $3 \times 3$ , что снижает точность оценки  $\mathbf{f}$ .

Целью данной работы является построение экономичного алгоритма оценивания локального вектора частоты  $\mathbf{f}$  вещественного двумерного гармонического сигнала (2) по анализируемому фрагменту  $\mathbf{z}$  на основе SVD матриц размера  $3 \times 3$  и одномерных трёхточечных ИА двумерного дискретного спектра. Размеры анализируемого фрагмента соизмеримы с периодом гармонического сигнала.

**Оценивание вектора частот  $\mathbf{f}$  с помощью одномерных трёхточечных алгоритмов аппроксимации.** Как и в [7, 12], предложенный алгоритм оценивания  $\mathbf{f}$  состоит из двух этапов. На первом этапе вычисляется грубая МП-оценка (3), на втором — поправка с использованием интерполяции двумерного дискретного спектра. Пусть истинное значение вектора частот

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N} (\mathbf{m} + \delta) = \frac{1}{N} (m_1 + \delta_1, m_2 + \delta_2)^T, \quad (5)$$

где  $\mathbf{m} = (m_1, m_2)^T$  — целочисленный вектор, компоненты которого  $1 < m_l < N-2$ ,  $l = \overline{1, 2}$ ;  $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T$  — вектор поправок, компоненты которого — вещественные числа  $|\delta_l| < 0,5$ ,  $l = \overline{1, 2}$ .

С учётом (5) нетрудно показать, что спектр фрагмента  $\mathbf{z}$  размером  $N \times N$  отсчётов для вещественного сигнала (2) имеет вид

$$\mathbf{Z}(\mathbf{k}) = \left\{ Z(k_1, k_2) = S(k_1, k_2) + W(k_1, k_2) = \frac{A}{2} \left( e^{j\phi} \prod_{l=1}^2 \frac{e^{j2\pi(m_l + \delta_l - k_l)} - 1}{e^{j(2\pi/N)(m_l + \delta_l - k_l)} - 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-j\phi} \prod_{l=1}^2 \frac{e^{-j2\pi(m_l + \delta_l + k_l)} - 1}{e^{-j(2\pi/N)(m_l + \delta_l + k_l)} - 1} \right) + W(k_1, k_2), \quad k_1 = \overline{0, N-1}, \quad k_2 = \overline{0, N-1} \right\}, \quad (6)$$

где  $S(k_1, k_2)$  и  $W(k_1, k_2)$  — комплексные коэффициенты ДПФ вещественного двумерного гармонического сигнала (2) и шума  $\mathbf{w}$  соответственно.

Отметим, что при отсутствии шума компоненты вектора  $\mathbf{m} = (m_1, m_2)^T$  равны координатам максимального значения двумерного дискретного АС  $|\mathbf{Z}(\mathbf{k})|$  фрагмента  $\mathbf{z}$ . В соответствии с (3)  $\widehat{\mathbf{f}}_{МП} = \mathbf{m}/N$ .

Применяя приближение дискретного спектра (6) в окрестности  $\mathbf{m}$ , аналогичное приближению, предложенному в работах [12, 15] для одномерных сигналов, получим

$$\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \approx \left\{ \frac{A}{2} e^{j\phi} N^2 \prod_{l=1}^2 \frac{1}{(\delta_l - n_l)} + W(m_1 + n_1, m_2 + n_2), \quad n_1 = \overline{-1, 1}, \quad n_2 = \overline{-1, 1} \right\}. \quad (7)$$

В соотношении (7) фрагмент спектра  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  представляет собой матрицу размера  $3 \times 3$ . Коэффициенты двумерного ДПФ вертикального и горизонтального сечений, проходящих через точку с координатами  $\mathbf{m}$ , имеют вид

$$Z(m_1 + n_1, m_2) \approx \frac{C_1}{(\delta_1 - n_1)} + W(m_1 + n_1, m_2), \quad n_1 = \overline{-1, 1}, \quad (8)$$

$$Z(m_1, m_2 + n_2) \approx \frac{C_2}{(\delta_2 - n_2)} + W(m_1, m_2 + n_2), \quad n_2 = \overline{-1, 1}. \quad (9)$$

С точностью до значений комплексных констант  $C_1 = (A/2)e^{j\phi}N^2(1/\delta_2)$  и  $C_2 = (A/2)e^{j\phi}N^2(1/\delta_1)$  отсчёты сечений (8) и (9) при отсутствии шума приближённо равны отсчётам спектра одномерного гармонического сигнала (2) в окрестности максимума его АС. Следовательно, компоненты  $\delta_1$  и  $\delta_2$  вектора поправок  $\delta$  можно вычислить независимо по сечениям (8) и (9) соответственно, применив одномерные трёхточечные интерполяционные алгоритмы Якобсена [13]

$$\widehat{\delta}_{J,1} = -\Upsilon \left\{ \frac{Z(m_1 + 1, m_2) - Z(m_1 - 1, m_2)}{2Z(m_1, m_2) - Z(m_1 + 1, m_2) - Z(m_1 - 1, m_2)} \right\}, \quad (10)$$

$$\widehat{\delta}_{J,2} = -\Upsilon \left\{ \frac{Z(m_1, m_2 + 1) - Z(m_1, m_2 - 1)}{2Z(m_1, m_2) - Z(m_1, m_2 + 1) - Z(m_1, m_2 - 1)} \right\} \quad (11)$$

или Маклеода [11]

$$\widehat{\delta}_{M,l} = \frac{\sqrt{1 + 8\gamma_l^2} - 1}{4\gamma_l}, \quad \gamma_l = \frac{R_{l,-1} - R_{l,1}}{2R_{l,0} + R_{l,-1} + R_{l,1}}, \quad l = \overline{1,2}, \quad (12)$$

$$R_{1,n} = \Upsilon(Z(m_1 + n, m_2)Z^*(m_1, m_2)), \quad R_{2,n} = \Upsilon(Z(m_1, m_2 + n)Z^*(m_1, m_2)), \quad n = \overline{-1,1},$$

где  $\Upsilon(\cdot)$  — вещественная часть комплексного числа, «\*» — символ комплексного сопряжения. Оценки вектора частот, использующие ИА Якобсена и Маклеода, имеют вид

$$\widehat{\mathbf{f}}_J = (1/N)(\mathbf{m} + \delta_J), \quad \widehat{\mathbf{f}}_M = (1/N)(\mathbf{m} + \delta_M).$$

**Оценивание вектора частот  $\mathbf{f}$  с помощью сингулярного разложения и одномерных трёхточечных алгоритмов аппроксимации.** Очевидным недостатком полученных оценок  $\widehat{\mathbf{f}}_J$  и  $\widehat{\mathbf{f}}_M$  является использование лишь пяти из девяти коэффициентов  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$ . Из (7) следует, что

$$\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \approx \frac{A}{2} e^{j\phi} N^2 G_1 G_2^T + \mathbf{W}(\mathbf{m} + \mathbf{n}),$$

где  $G_l = ((\delta_l + 1)^{-1}, \delta_l^{-1}, (\delta_l - 1)^{-1})^T$ . Поэтому комплексную матрицу  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  размера  $3 \times 3$  можно достаточно точно приблизить этой же матрицей ранга 1:

$$\widehat{\mathbf{Z}}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \approx \lambda_1 U_1 V_1^T,$$

где  $U_1$  и  $V_1$  — левый и правый сингулярные векторы, соответствующие наибольшему сингулярному числу  $\lambda_1$  матрицы  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$ . Отметим, что матрица  $\widehat{\mathbf{Z}}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  является наилучшим одноранговым приближением  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  по норме Фробениуса комплексными трёхмерными векторами  $U_1$  и  $V_1$  [16]. Подставив в формулы (10)–(12) вместо отсчётов одномерных сечений (8), (9) компоненты сингулярных векторов  $U_1$  и  $V_1$  и применив алгоритмы интерполяции Якобсена и Маклеода, получим оценки

$$\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD},J} = (1/N)(\mathbf{m} + \delta_{\text{SVD},J}), \quad \widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD},M} = (1/N)(\mathbf{m} + \delta_{\text{SVD},M}).$$

**Результаты экспериментальных исследований.** Для анализа эффективности предложенных оценок  $\widehat{\mathbf{f}}_J$ ,  $\widehat{\mathbf{f}}_M$ ,  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD}, J}$  и  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD}, M}$  было проведено два эксперимента методом компьютерного моделирования. В обоих экспериментах вычисление среднеквадратической ошибки (СКО) оценивания

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{V} \sum_{v=1}^V (f_{1,v} - \widehat{f}_{1,v})^2 + (f_{2,v} - \widehat{f}_{2,v})^2}$$

выполнялось по  $V = 10^4$  статистически независимым тестовым фрагментам размером  $N \times N$  элементов. Компоненты вектора частот и начальная фаза в (2) от фрагмента к фрагменту менялись случайным образом в соответствии с равномерным законом распределения вероятностей. Длина вектора частот удовлетворяла условию (4).

Задача первого эксперимента состояла в определении потерь, связанных с использованием вместо всех  $N \times N$  коэффициентов двумерного ДПФ анализируемого фрагмента  $\mathbf{z}$  лишь девяти элементов матрицы  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  размера  $3 \times 3$ .

Оптимальные оценки параметров сигнала (2) получены методом наименьших квадратов путём минимизации квадратичной функции потерь, заданной в области всех комплексных коэффициентов ДПФ:

$$(\widehat{A}_{\text{opt}}, \widehat{\mathbf{f}}_{\text{opt}}, \widehat{\varphi}_{\text{opt}}) = \arg \min_{A, \mathbf{f}, \varphi} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} |Z(k_1, k_2) - S(k_1, k_2)|^2,$$

или квадратичной функции для окрестности точки  $\mathbf{m}$ :

$$(\widehat{A}_{3 \times 3}, \widehat{\mathbf{f}}_{3 \times 3}, \widehat{\varphi}_{3 \times 3}) = \arg \min_{A, \mathbf{f}, \varphi} \sum_{n_1=-1}^1 \sum_{n_2=-1}^1 |Z(m_1 + n_1, m_2 + n_2) - S(m_1 + n_1, m_2 + n_2)|^2.$$

На рис. 1 приведены зависимости СКО от отношения сигнал/шум (в децибелах)  $q^2 = 10 \log_{10}(A^2/2\sigma^2)$  (штриховые линии соответствуют СКО оптимальной оценки  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{opt}}$ , сплошные линии — СКО оценки  $\widehat{\mathbf{f}}_{3 \times 3}$ ). Среднеквадратическая ошибка грубой МП-оценки

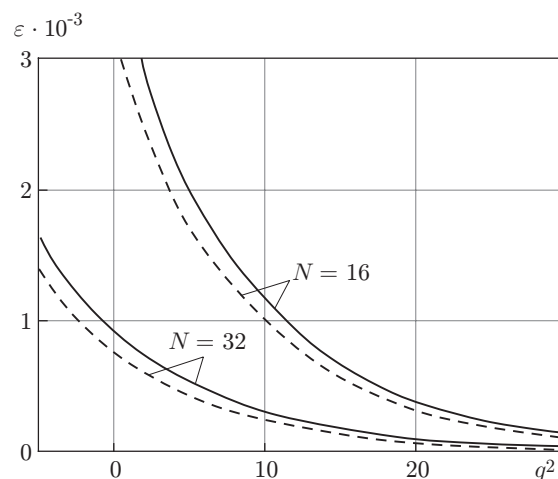


Рис. 1

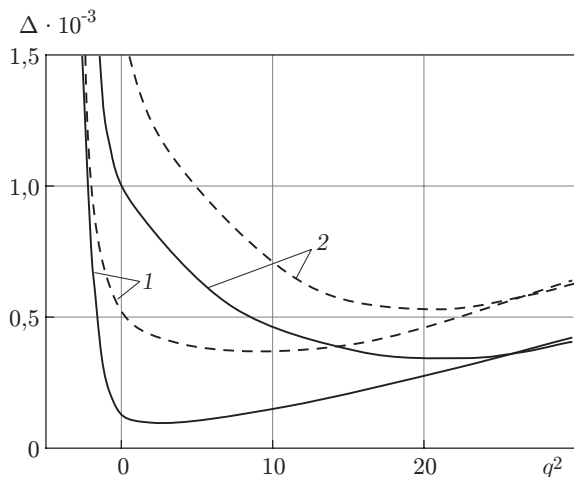


Рис. 2

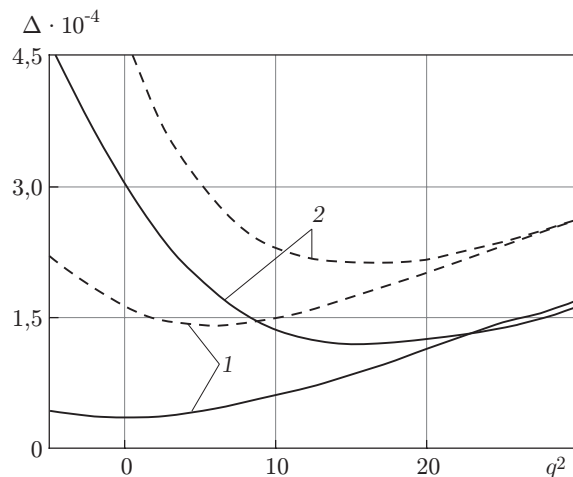


Рис. 3

(3), используемой на первом этапе,  $\approx(12,8 \cdot 10^{-3})$  при  $N = 32$  и  $\approx(25,6 \cdot 10^{-3})$  при  $N = 16$ . Следует подчеркнуть, что СКО  $\widehat{\mathbf{f}}_{3 \times 3}$  является границей снизу, а СКО  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{МП}}$  — границей сверху для оценок по матрице  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  размера  $3 \times 3$ .

Задача второго эксперимента состояла в сравнении эффективности предложенных оценок по элементам матрицы  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  с границей снизу. На рис. 2 и 3 приведены зависимости  $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{3 \times 3}$  от  $q^2$  при  $N = 16$  и  $N = 32$  соответственно, где кривые 1 — зависимости для ИА Маклеода  $\widehat{\mathbf{f}}_M$  и  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD}, M}$ , 2 — ИА Якобсена  $\widehat{\mathbf{f}}_J$  и  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD}, J}$ ; штриховые линии соответствуют оценкам  $\widehat{\mathbf{f}}_J$  и  $\widehat{\mathbf{f}}_M$  по пяти элементам матрицы  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  размера  $3 \times 3$ , сплошные — оценкам  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD}, J}$  и  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD}, M}$  по всем девяти элементам  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  с использованием SVD.

Показанные зависимости содержат три области. В левой области для малых значений отношения сигнал/шум увеличение СКО по сравнению с границей снизу обусловлено аномальными ошибками МП-оценки, когда принятие побочных (шумовых) выбросов АС за основной максимум АС оказывается достаточно вероятным событием. В правой области увеличение  $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_{3 \times 3}$  при повышении  $q^2$  обусловлено смещением трёхточечных алгоритмов интерполяции. В центральной области СКО оценки  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD}, M}$  близка к границе снизу и практически совпадает с ней при  $N \geq 32$ . Применение сингулярного разложения существенно снижает уровень СКО алгоритмов оценивания, использующих ИА Маклеода и Якобсена. При  $q^2 \geq 25$  оба интерполяционных алгоритма обеспечивают практически одинаковую точность оценивания вектора частот, однако ИА Якобсена обладает меньшей вычислительной сложностью.

**Заключение.** Для повышения точности грубой МП-оценки вектора частот двумерного вещественного гармонического сигнала предложено применять трёхточечные алгоритмы одномерной интерполяции вертикального и горизонтального сечений  $2D$ -спектра, проходящих через точку с координатами максимума амплитудного спектра, и сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  размера  $3 \times 3$ .

Методом компьютерного моделирования показано, что наименьшей среднеквадратической ошибкой среди предложенных оценок обладает оценка  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD}, M}$ , использующая алгоритм интерполяции Маклеода левого и правого сингулярных векторов, соответствующих наибольшему сингулярному числу матрицы  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$ . Точность оценки  $\widehat{\mathbf{f}}_{\text{SVD}, M}$  близка

к точности оптимальной оценки, полученной методом наименьших квадратов по матрице  $\mathbf{Z}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$  размера  $3 \times 3$  коэффициентов двумерного ДПФ.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Liu J., Liu X.** Time-varying channel identification and prediction in OFDM systems using 2D frequency estimation // Proc. Military Communications Conference (MILCOM). Washington: IEEE, 2006. P. 1–7.
2. **Morgan U., Granlund G. H., Knutsson H.** Texture gradient in sparse texture fields // Selected Papers from the 9th Scandinavian Conference on Image Analysis: Theory and Applications of Image Analysis II. River Edge, USA: World Scientific Publishing Co., Inc., 1995. P. 89–100.
3. **Francos J. M., Meiri A. Z., Porat B.** A unified texture model based on a 2-D wold-like decomposition // IEEE Trans. Signal Process. 1993. **41**, N 8. P. 2665–2678.
4. **Грузман И. С., Петрова К. Ю.** Оценивание координат узлов решётки квазипериодических текстур с использованием характеристик двумерных локальных спектров // Автометрия. 2016. **52**, № 3. С. 3–9.
5. **Грузман И. С., Петрова К. Ю.** Обнаружение квазипериодических текстур с использованием характеристик двумерного спектра мощности // Автометрия. 2015. **51**, № 2. С. 3–10.
6. **So H. C., Chan F. K. W., Lau W. H., Chan C. F.** An efficient approach for two-dimensional parameter estimation of a single-tone // IEEE Trans. Signal Process. 2010. **58**, N 4. P. 1999–2009.
7. **Ye S., Aboutanios E.** Two dimensional frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients // IEEE Intern. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Kyoto, Japan: IEEE, 2012. P. 3353–3356.
8. **Kundu D., Nandi S.** Statistical Signal Processing: Frequency Estimation. New Delhi — New York: Springer India, 2012. 132 p.
9. **Kar S. P., Palanisamy P.** Novel 2D real-valued sinusoidal signal frequencies estimation based on propagator method // Proc. Intern. Conf. on Internet Computing and Information Communications, Advances in Intelligent Systems and Computing. New Delhi: Springer, 2013. Vol. 216. P. 305–315.
10. **Rife D. C., Boorstyn R. R.** Single-tone parameter estimation from discrete-time observations // IEEE Trans. Inform. Theory. 1974. **20**, Is. 5. P. 591–598.
11. **Macleod M.** Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones // IEEE Trans. Signal Process. 1998. **46**, N 1. P. 141–148.
12. **Quinn B. G., Hannan E. J.** The Estimation and Tracking of Frequency. N. Y.: Cambridge University Press, 2001. 270 p.
13. **Jacobsen E., Kootsookos P.** Fast, accurate frequency estimators // IEEE Signal Process. Magazine. 2007. **24**, N 3. P. 123–125.
14. **So H. C., Chan F. K. W., Sun W.** Subspace approach for fast and accurate single-tone frequency estimation // IEEE Trans. Signal Process. 2011. **59**, N 2. P. 827–831.
15. **Quinn B. G.** Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients // IEEE Trans. Signal Process. 1994. **42**, N 5. P. 1264–1268.
16. **Шарый С. П.** Курс вычислительных методов. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2016. 526 с.

*Поступила в редакцию 17 февраля 2017 г.*