УДК 681.3

ИЗМЕРЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ АДДИТИВНЫХ НЕГАУССОВСКИХ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ

В. М. Артюшенко[1], В. И. Воловач[2]

[1] *Технологический университет,*
141070, г. Королёв Московской обл., ул. Гагарина, 42
[2] *Поволжский государственный университет сервиса,*
445017, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4
E-mail: artuschenko@mail.ru
volovach.vi@mail.ru

Рассмотрены вопросы, связанные с измерением информационных параметров обрабатываемого сигнала, отражённого от лоцируемого объекта, на фоне аддитивных негауссовских коррелированных помех. Показано, что в случае воздействия негауссовской коррелированной помехи увеличение коэффициента корреляции способствует росту обобщённого отношения сигнал/помеха, что, в свою очередь, повышает точность измерения параметров сигнала. Полученные зависимости подтверждают, что на погрешность измерения информационных параметров сигнала влияет не только величина обобщённого отношения сигнал/помеха, но и учёт негауссовского характера воздействующей аддитивной помехи, которая приводит к значительному улучшению точности измерения этих параметров.

Ключевые слова: дисперсия погрешности измерения, аддитивная негауссовская коррелированная помеха, информационные параметры сигнала.

DOI: 10.15372/AUT20160603

Введение. В большинстве работ, посвящённых вопросам измерения (оценки) информационных параметров сигналов, считалось, что на полезный сигнал воздействует аддитивная помеха, описываемая, как правило, гауссовской плотностью распределения вероятности (ПРВ). Однако, как показывают проведённые исследования [1–5], принимаемый радиотехническим измерителем сигнал подвержен воздействию аддитивных помех, имеющих ярко выраженный негауссовский характер. Для радиолокации, радионавигации, телеметрии и радиоизмерительной техники представляет значительный интерес получение оптимальной оценки параметров обрабатываемых сигналов при наличии помех с произвольной ПРВ.

Целью данной работы является оценка информационных параметров полезного сигнала, содержащих сведения о параметрах движения лоцируемого объекта, при воздействии на сигнал коррелированных негауссовских аддитивных помех.

Проведём оценку информационных параметров по методу максимума апостериорной ПРВ. Для определения количественных оценок измеряемых параметров используем нижние границы неравенства Крамера — Рао [6]. Влияние негауссовских аддитивных помех на точность измерения будем оценивать отношением дисперсии погрешности измерения при наличии аддитивных помех к дисперсии погрешности измерения, если эти помехи носят гауссовский характер. Отметим, что оценке будут подлежать только неэнергетические информационные параметры полезного сигнала. При этом считается, что оценки являются функциями достаточных статистик и обладают асимптотическими свойствами состоятельности, несмещённости и нормальности.

Оценка информационного параметра полезного сигнала на фоне коррелированной негауссовской помехи. Известно, что оценка $\hat{\lambda}$ случайного информационного параметра λ полезного сигнала $s(\lambda, t)$ по максимуму апостериорной ПРВ находится из уравнения

$$\frac{dW_y(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0.$$

Учитывая, что $W_y(\lambda) = CW_\lambda(\lambda)W_n(\lambda)$, где C — постоянная нормировки, $W_\lambda(\lambda)$ — априорная ПРВ, $W_n(\lambda)$ — функция правдоподобия, запишем

$$\frac{dW_y(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} = \Big[\frac{d\ln W_n(\lambda)}{d\lambda} + \frac{d\ln W_\lambda(\lambda)}{d\lambda}\Big]\Big|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0,$$

откуда в соответствии с теоремой Крамера — Рао дисперсия любой несмещённой оценки информационного параметра определяется неравенством [6]

$$M\langle(\hat{\lambda} - \lambda)^2\rangle \geq \Big[- M\Big\langle\frac{d^2\ln W_n(\lambda)}{d\lambda^2}\Big\rangle - M\Big\langle\frac{d^2\ln W_\lambda(\lambda)}{d\lambda^2}\Big\rangle\Big]^{-1},$$

где усреднение осуществляется по результатам наблюдения и характеристикам случайного информационного параметра λ.

Используя понятие количества информации по Фишеру [7] $I_F^\lambda = -M\Big\langle\frac{d^2\ln W_\lambda(\lambda)}{d\lambda^2}\Big\rangle$, преобразуем последнее выражение к виду $M\langle(\hat{\lambda} - \lambda)^2\rangle \geq \Big[- M\Big\langle\frac{d^2\ln W_n(\lambda)}{d\lambda^2}\Big\rangle + I_F^\lambda\Big]^{-1}$ и будем применять его далее.

Рассмотрим случай, когда информационный параметр λ оценивается на фоне коррелированной в общем случае негауссовской помехи n.

Пусть на вход радиотехнического измерителя поступают аддитивная смесь $y_h(t_h)$ полезного сигнала $s(\lambda, t_h)$, несущего информацию об одном из интересующих нас параметров движения лоцируемого объекта λ, и аддитивная негауссовская коррелированная помеха $n(t_h)$: $y_h(t_h) = s(\lambda, t_h) + n(t_h)$.

Будем считать, что помеха описывается переходной ПРВ $W_n(n_h\,|\,n_{h-1})$. Измерение (оценка) информационного параметра $\hat{\lambda}$ ведётся в дискретном времени наблюдения на интервале $[0, T]$, причём $\hat{\lambda}_h = \hat{\lambda}_{h-1} = \hat{\lambda}$.

Логарифм функции правдоподобия существует и определяется выражением

$$B_n(n) = \ln W_n\{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h)\,|\,y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\}, \tag{1}$$

где $y_{h-i} - s(\hat{\lambda}, t_{h-i}) = n_{h-i}$, $i = 0, 1$. При этом функция правдоподобия удовлетворяет условиям регулярности [8]

$$\Big\langle\frac{\partial}{\partial\hat{\lambda}}\ln W_n\{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h)\,|\,y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\}\Big\rangle = 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\Big\langle\frac{\partial}{\partial\hat{\lambda}^2}\ln W_n\{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h)\,|\,y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\}\Big\rangle = \\ = \Big\langle\Big[\frac{\partial}{\partial\hat{\lambda}}\ln W_n\{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h)\,|\,y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\}\Big]^2\Big\rangle.\end{gathered} \tag{3}$$

Запишем производную логарифма функции правдоподобия (1) по информационному параметру в виде

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}} \ln W_n\{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \,|\, y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\} \right\rangle =$$

$$= H^{-1} \sum_{h=1}^{H} \Big[-\frac{d}{dn_h} \ln W_n(n_h \,|\, n_{h-1}) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - \frac{d}{dn_{h-1}} \ln W_n(n_h \,|\, n_{h-1}) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) \Big] =$$

$$= H^{-1} \sum_{h=1}^{H} [-B^{n'}_{n_h} s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - B^{n'}_{n_{h-1}} s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})]. \qquad (4)$$

Заметим, что соотношение (2) выполняется, если

$$\left\langle \frac{d}{dn_{h-i}} \ln W_n(n_h \,|\, n_{h-i}) \right\rangle = 0, \quad i = 0, 1. \qquad (5)$$

С учётом соотношений (3), (5), дифференцируя (4), будем иметь

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}^2} \ln W_n\{y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \,|\, y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1})\} \right\rangle = H^{-1} \sum_{h=1}^{H} [B^{n''}_{n_{h,h}} [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h)]^2 +$$

$$+ 2B^{n''}_{n_{h,h-1}} [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})] + B^{n''}_{n_{h-1,h-1}} [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2]. \qquad (6)$$

Усреднив (6) не только по множеству, но и по времени и используя результаты, полученные в [6], преобразуем (6) к виду

$$\tilde{\bar{B}}^{n''}_\lambda = I^n_{n_{11}} P_{11} + 2I^n_{n_{12}} P_{12} + I^n_{n_{22}} P_{22}. \qquad (7)$$

Правая часть (7) согласно [9] представляет собой след матрицы IP:

$$\mathrm{tr}[IP] = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} I_{ij} P_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

где $I_{ij} = I^n_{n_{\alpha,\beta}}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ — составляющие информационной матрицы Фишера относительно аддитивной помехи, заключённые в переходной ПРВ $W_n(n_h \,|\, n_{h-i})$; P_{ij} — элементы матрицы $\|P\|$:

$$i = j\colon P_{ij} = P_{s'} = \lim_{H \to \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^{H} [s']_i^2; \quad i \neq j\colon P_{ij} = P_{s'} = \lim_{H \to \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^{H} [s'_i s'_j], \quad i, j = 1, 2.$$

С учётом этих формул (7) можно представить в виде $\tilde{\bar{B}}^{n''}_\lambda = \mathrm{tr}[IP]$. Тогда выражение для нижней границы неравенства Крамера — Рао в общем случае запишется как

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}_c} \geq [\mathrm{tr}[IP] + I^\lambda_F]^{-1}, \qquad (8)$$

где $\sigma^2_{\hat{\lambda}_c}$ — дисперсия измерения информационного параметра сигнала.

При оценке измеряемого параметра методом максимального правдоподобия выражение (8) переходит в неравенство

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}_c} \geq [\mathrm{tr}[IP]]^{-1}. \tag{9}$$

Пусть на сигнал воздействует гауссовская коррелированная помеха с переходной ПРВ:

$$W_n(n_h \,|\, n_{h-1}) = [2\pi\sigma_{n_h}(1 - r^2_{n_h})]^{-0{,}5} \exp\{-(n_h - \sigma_{n_h}\sigma^{-1}_{n_{h-1}} r_{n_h} n_{h-1})^2 (2\sigma_{n_h}(1 - r^2_{n_h})]^{-1})\},$$

где $\sigma^2_{n_h}$ и $\sigma^2_{n_{h-1}}$ — дисперсии величины на шагах h и $h-1$ соответственно; r_{n_h} — коэффициент корреляции выборок n_h и n_{h-1}. Тогда информационная матрица Фишера для гауссовского случайного процесса $n(t)$, заданного переходной ПРВ $W_n(n_h \,|\, n_{h-1})$, приобретает вид [6, 9]

$$\|I_{F_g}\| = \left\| \begin{matrix} I_{F_{11}} & I_{F_{12}} \\ I_{F_{21}} & I_{F_{22}} \end{matrix} \right\| = [\sigma^2_n(1 - r^2_n)]^{-1} \left\| \begin{matrix} 1 & -r_n \\ -r_n & r^2_n \end{matrix} \right\|,$$

где σ^2_n — дисперсия, а r_n — коэффициент корреляции случайного процесса $n(t)$.

Элементы матрицы $\|P\|$ можно найти исходя из выражений [6, 9]:

$$P_{11} = \lim_{H\to\infty} H^{-1} \sum_{h=1}^{H} [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h)]^2,$$

$$P_{11} = P_{21} = \lim_{H\to\infty} H^{-1} \sum_{h=1}^{H} [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})], \quad P_{22} = \lim_{H\to\infty} H^{-1} \sum_{h=1}^{H} [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2.$$

После несложных математических преобразований (9) запишем как

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}_c} \geq \{[s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - r_n s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2 / \sigma^2_n(1 - r^2_n)\}^{-1} = \{[\Delta s_h]^2 / \sigma^2_n(1 - r^2_n)\}^{-1}. \tag{10}$$

Данное выражение полностью совпадает с полученным в работах [2, 10] для случая коррелированных гауссовских (g) помех.

Перепишем (10) в виде $\sigma^2_{\hat{\lambda}_c} \geq [\rho_{g\,c}]^{-1}$, где $\rho_{g\,c} = [\Delta s_h]^2/\sigma^2_n(1 - r^2_n)$ — величина, играющая роль отношения сигнал/помеха (ОСП) при измерении информационного параметра на фоне гауссовской аддитивной помехи с дисперсией σ^2_n и коэффициентом корреляции r_n.

В работе [11] показано, что величину $\rho_{g\,c}$ необходимо рассматривать в спектральном представлении $\rho_{g\,c} = \dfrac{0{,}5}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \dfrac{|s_s(\omega)|^2}{s_n(\omega)}\, d\omega$, в котором $|s_s(\omega)|$ — амплитудный спектр сигнала; $s_n(\omega)$ — энергетический спектр помехи; $\Delta t = h - (h-1)$.

Оценка информационного параметра полезного сигнала на фоне сильно коррелированной негауссовской помехи. В случае, если аддитивная помеха сильно коррелирована ($r_n \to 1$), т. е. спектр $s_n(\omega)$ у́же спектра $|s_s(\omega)|$, получаем согласно [2]

$$|s_s(\omega)| \gg \frac{1}{2\pi s_n(0)} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |s_s(\omega)|^2 d\omega = P_{s'}\sigma^{-2}_n, \tag{11}$$

где $P_{s'}\sigma^{-2}_n = \rho_{g\,nc}$ — обобщённое ОСП при воздействии аддитивной гауссовской некоррелированной помехи.

Как видно из (11),

$$\rho_{g\,c} \gg \rho_{g\,nc}, \tag{12}$$

следовательно,

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}_{g\,c}} \ll \sigma^2_{\hat{\lambda}_{g\,nc}}. \tag{13}$$

Таким образом, рост коэффициента корреляции приводит к увеличению обобщённого ОСП, что, в свою очередь, уменьшает погрешность и повышает точность измерения информационного параметра.

Воспользовавшись результатами [10], введём соотношение

$$\mu = I^n_F / I^n_{Fg}, \tag{14}$$

характеризующее предельную эффективность измерения информационного параметра $\hat{\lambda}$ на фоне негауссовской помехи с переходной ПРВ $W_n(n_h\,|\,n_{h-1})$ в сравнении с оценкой при воздействии гауссовской помехи, для которой дисперсия σ^2_n и коэффициент корреляции r_n совпадают с дисперсией и коэффициентом корреляции коррелированной гауссовской помехи.

Напомним, что величина I^n_F зависит от вида ПРВ $W_n(n_h\,|\,n_{h-1})$, причём чем больше ПРВ отличается от гауссовской, тем больше величина коэффициента μ. Для гауссовской переходной ПРВ $I^n_{Fg} = [s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - r_n s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2/\sigma^2_n(1 - r^2_n)$.

С учётом (9), (10) и полученного соотношения отметим, что при воздействии на полезный сигнал негауссовской коррелированной помехи апостериорная погрешность измерения (оценки) информационного параметра будет определяться следующим выражением:

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}_{ng\,c}} \geq [\mu \mathrm{tr}[IP]]^{-1} = \{[s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - r_n s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2/\mu\sigma^2_n(1 - r^2_n)\}^{-1}.$$

Следовательно, как видно из этого неравенства, с увеличением отличия переходной ПРВ $W_n(n_h\,|\,n_{h-1})$ от гауссовской точность измеряемого параметра возрастает.

Отметим, что согласно [3, 10] $\mu \geq 1$ и с учётом неравенств (12) и (13) получаем при воздействии коррелированной негауссовской помехи апостериорную дисперсию измерения информационного параметра $\sigma^2_{\hat{\lambda}_{ng\,c}}$ всегда меньше, чем апостериорная дисперсия при воздействии той же негауссовской помехи, но имеющей некоррелированный характер $\sigma^2_{\hat{\lambda}_{ng\,nc}}$, т. е. $\sigma^2_{\hat{\lambda}_{ng\,nc}} \gg \sigma^2_{\hat{\lambda}_{ng\,c}}$.

Определение влияния параметров ПРВ коррелированной негауссовской помехи на оценку информационного параметра полезного сигнала. Рассмотрим влияние величины коэффициента μ на оценку информационного параметра на примере приведённой погрешности измерения $\delta^2_{\hat{\lambda}} = \sigma^2_{\hat{\lambda}_\nu}/\sigma^2_{\hat{\lambda}_{g\,c}}$, в которой $\sigma^2_{\hat{\lambda}_\nu}$ — апостериорная погрешность измерения при воздействии коррелированной негауссовской помехи, описываемой переходной ПРВ:

$$W_n(n_h\,|\,n_{h-1}) = \frac{\nu}{2\Gamma(\nu^{-1})\sigma}\Big[\frac{\Gamma(3/\nu)}{(1-r^2)\Gamma(\nu^{-1})}\Big]^{0,5} \times$$

$$\times \exp\Big\{-\Big[\frac{\Gamma(3/\nu)}{(1-r^2)\Gamma(\nu^{-1})}\Big]^{\nu/2}\Big[\frac{|n_h - r n_{h-1}|^\nu}{\sigma^\nu}\Big]\Big\} \tag{15}$$

($\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция).

В этом случае согласно (14) и тому, что для ПРВ (15) информационная матрица принимает вид [3]

$$\|I_F\| = \frac{\nu(\nu-1)\Gamma(3/\nu)\Gamma(1-\nu^{-1})}{\sigma_n^2\Gamma^2(1/\nu)(1-r_n^2)} \left\| \begin{matrix} 1 & -r_n \\ -r_n & r_n^2 \end{matrix} \right\| = A(\nu) I_{F_g},$$

где $A(\nu) = \nu(\nu-1)\Gamma(3/\nu)\Gamma(1-\nu^{-1})/\Gamma^2(1/\nu)$; $\nu \geq 2$ — константа, зависящая от параметра распределения, значение коэффициента μ будет определяться как

$$\mu = \frac{I_F^n}{I_{F_g}^n}\, A(\nu) = \frac{\nu(\nu-1)\Gamma(3/\nu)\Gamma(1-\nu^{-1})}{\Gamma^2(\nu^{-1})}.$$

На рисунке показаны зависимости элементов матрицы $I_{F_{ij}}$ при воздействии коррелированной негауссовской помехи от параметров ПРВ: $I_{F_{11}}$, $I_{F_{22}}$ (a) и $I_{F_{12}}$ (b).

Запишем выражение для приведённой погрешности:

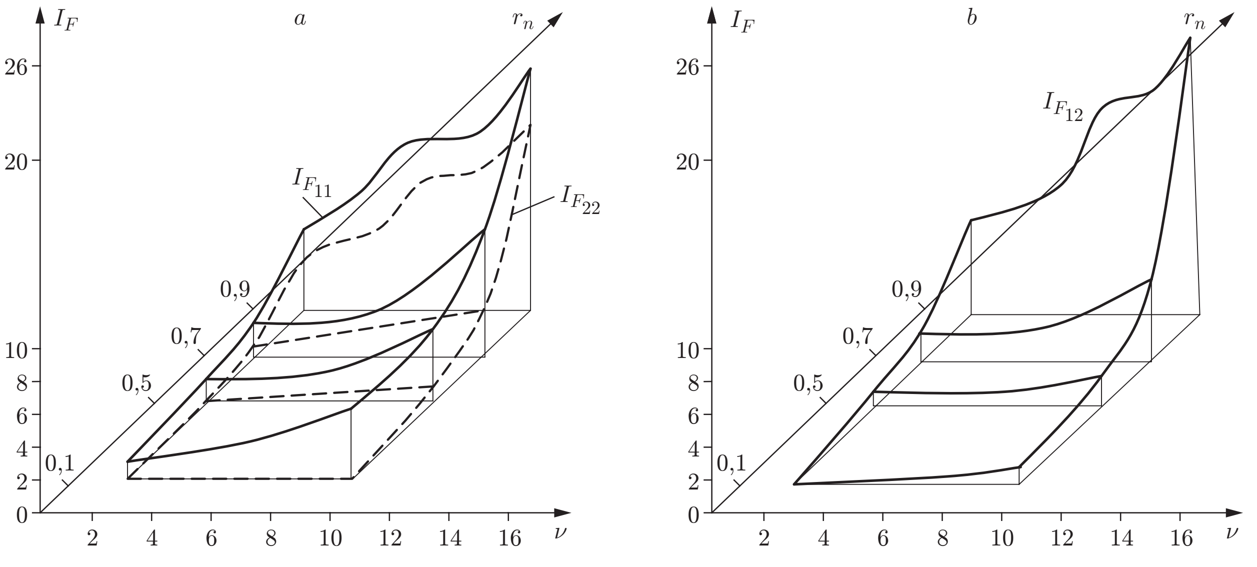
$$\delta^2_{\hat\lambda} = [\mu\rho]^{-1} = \{\Gamma^2(\nu^{-1})/[\nu(\nu-1)\Gamma(3/\nu)\Gamma(1-\nu^{-1})]\rho\},$$

где $\rho = \rho_\nu/\rho_{g\,c}$, ρ_ν — обобщённое ОСП при действии негауссовской помехи с ПРВ (15).

Напомним, что при $\nu = 2$ ПРВ вида (15) переходит в гауссовское, при этом, как видно из (14), $\mu = 1$.

В [3] представлены зависимости, из которых следует, что на приведённую погрешность измерения информационного параметра влияет не только величина ρ, играющая роль обобщённого ОСП, но и параметр ν, определяющий значение μ. Чем больше ν отличается от 2 ($\mu = 1$), тем меньше величина погрешности.

Повторив вышеизложенные рассуждения о совместной оценке нескольких информационных параметров сигнала на фоне коррелированной в общем случае негауссовской помехи, приходим к выводу, что предельная эффективность измерения (оценки) (см. (14)) в этом случае такая же, как и при измерении одного информационного параметра.



Заключение. В данной работе осуществлено измерение (оценка) точности информационных параметров обрабатываемых сигналов в условиях воздействия негауссовских помех с произвольной плотностью распределения вероятности. Показано, что учёт негауссовского характера воздействующей аддитивной помехи, а также её корреляционных свойств, приводящий к увеличению обобщённого отношения сигнал/помеха, повышает точность измерения параметров сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фалькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В.** Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием. М.: Радио и связь, 1989. 296 с.
2. **Валеев В. Т., Сосулин Ю. Г.** Обнаружение слабых когерентных сигналов в коррелированных негауссовских помехах // Радиотехника и электроника. 1969. **14**, № 2. С. 230–238.
3. **Артюшенко В. М.** Обработка информационных параметров сигнала в условиях аддитивно-мультипликативных негауссовских помех. Королёв: Канцлер, 2014. 298 с.
4. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Оценка точности измерения информационных параметров сигнала на фоне коррелированной аддитивной помехи при непрерывной обработке // Изв. вузов России. Сер. Радиоэлектроника. 2015. **1**. С. 59–65.
5. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Оценка погрешности измерения параметров движения протяжённых объектов в условиях изменяющейся дальности // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2015. **58**, № 1. С. 26–37.
6. **Тихонов В. И.** Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
7. **Цыпкин Я. З.** Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984. 320 с.
8. **Валеев В. Г.** Помехоустойчивость радиотехнических измерительных систем. Свердловск: Изд-во УПИ, 1987. 104 с.
9. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1974. Т. 1. 552 с.
10. **Валеев В. Г.** Оптимальная оценка параметров сигнала при наличии негауссовских помех // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 2. С. 135–146.
11. **Вайштейн Л. А., Зубаков В. Д.** Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960. 447 с.

Поступила в редакцию 22 декабря 2015 г.