

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.3.08 + 519.2

АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММ  
ДЛЯ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ  
И ОБОБЩЁННЫХ ЧИСЕЛ КАТАЛАНА\*А. Л. Резник<sup>1</sup>, А. В. Тузиков<sup>2</sup>, А. А. Соловьев<sup>1</sup>, А. В. Торгов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,  
630090, Россия, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1  
<sup>2</sup>Объединённый институт проблем информатики НАН Беларуси,  
220012, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 6  
E-mail: reznik@iae.nsk.su  
tuzikov@newman.bas-net.by

Представлены оригинальные программные и комбинаторно-геометрические вычислительные схемы, разработанные и применённые при нахождении точных аналитических формул, описывающих вероятность безошибочного считывания случайных точечных изображений, регистрируемых с помощью сканирующей апертуры с ограниченным числом пороговых уровней. Сформулированы и решены комбинаторные задачи, встретившиеся в ходе исследований и связанные с новым обобщением чисел Каталана. Проведена работа по отысканию явного аналитического вида этих чисел, что, с одной стороны, является необходимым этапом при решении основной исследовательской задачи, с другой стороны, носит вполне завершённый самостоятельный характер.

*Ключевые слова:* случайное изображение, компьютерные аналитические выкладки, обобщённые числа Каталана, случайные компактные группировки.

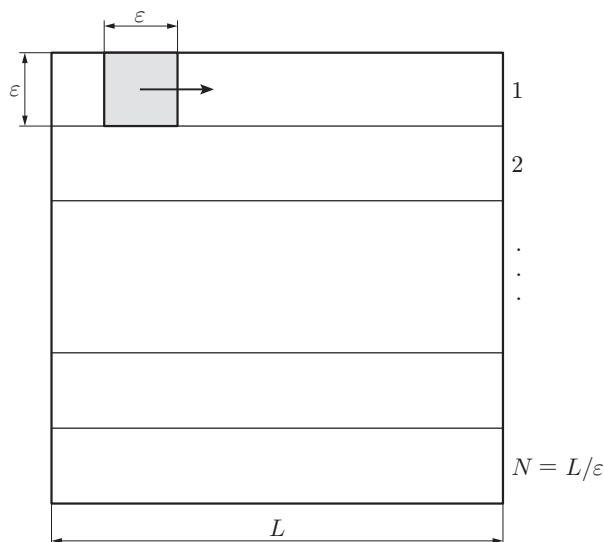
DOI: 10.15372/AUT20160601

**Введение.** Основная из рассматриваемых в данной работе проблем связана с оценением достоверности считывания случайного двумерного поля, когда регистрация координат точечных объектов, составляющих это поле, ведётся телевизионным методом с помощью сканирующей апертуры, обладающей ограниченным числом пороговых уровней.

Под случайным двумерным полем подразумевается реализация на плоскости случайного дискретно-точечного распределения, созданного неким пуассоновским источником с интенсивностью  $\lambda$ . Это означает, что вероятность события, заключающегося в том, что на любое наперёд заданное подмножество  $A$  такого поля выпадет точно  $n$  случайных пуассоновских отсчётов потока, зависит только от площади  $s(A)$  этого подмножества, а не зависит ни от каких-либо других его геометрических характеристик и задаётся вероятностью

$$P_A(n) = \exp(-\lambda s(A)) \frac{(\lambda s(A))^n}{n!}.$$

\*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00313), Президиума РАН (программа № I.5П, проект № 224) и Сибирского отделения РАН (проект СО РАН — НАН Беларуси № 24/2015).



Классический способ считывания координат таких импульсно-точечных объектов заключается в телевизионном считывании случайного пуассоновского поля размером  $L \times L$  в соответствии со схемой, представленной на рисунке.

Считывающей апертурой размером  $\varepsilon \times \varepsilon$  последовательно осуществляется сканирование всех горизонтальных полос изображения, имеющих ширину  $\varepsilon$ . Внутри каждой полосы апертура непрерывно перемещается, двигаясь по оси абсцисс слева направо. При попадании точечного объекта в пределы считывающей апертуры её суммарный сигнал увеличивается на единицу и переходит на следующий пороговый уровень. В этот момент происходит фиксация координат очередного точечного объекта (естественно, с точностью  $\varepsilon$  по оси ординат). При выбывании какого-либо объекта из окна интегрирующей апертуры суммарный уровень сигнала интегратора соответственно уменьшается на единицу. Вероятностные задачи, возникающие при исследовании описанного режима регистрации случайных точечных полей, составляют предмет рассмотрения в предлагаемой работе.

**Постановка главной задачи.** При щелевом (одномерный случай) или телевизионном (двумерный случай) считывании дискретно-точечных изображений интеграторами, имеющими ограниченное число пороговых уровней, важнейшей характеристикой является вероятность безошибочного считывания изображения, т. е. за весь период сканирования в окне интегрирующей апертуры ни разу не будет находиться более  $k$  объектов (здесь  $k$  — число пороговых уровней интегратора).

Точного аналитического решения этой задачи в общем случае получить не удаётся. Известны [1, 2] лишь частные формулы для простейших случаев (например, точное аналитическое решение для считывания интегратором, обладающим одним пороговым уровнем), а также ряд асимптотических соотношений [3]. Вообще говоря, двумерная задача нахождения вероятности  $P$  безошибочной регистрации плоского точечного изображения, формируемого случайным пуассоновским потоком с интенсивностью  $\lambda$ , достаточно просто редуцируется к одномерной:

$$P = \left[ \exp(-\lambda\varepsilon L) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\varepsilon L)^n}{n!} P_{n,k}(\varepsilon, L) \right]^N.$$

В результате указанной редукции решение двумерной задачи сводится к нахождению вероятности  $P_{n,k}(\varepsilon, L)$  безошибочного считывания одномерного фрагмента, представляющего

собой  $n$  точечных объектов, случайно брошенных на интервал  $(0, L)$ . В приведённом соотношении для вероятности  $P$  выражение в квадратных скобках есть вероятность безошибочного считывания каждой из  $N$  горизонтальных полос. В свою очередь, соотношение для вероятности безошибочного считывания отдельной полосы есть взвешенная сумма вероятностей наличия в полосе точно  $n$  пуассоновских отсчётов (множитель  $\exp(-\lambda\varepsilon L) \frac{(\lambda\varepsilon L)^n}{n!}$ ), взятых с весами  $P_{n,k}(\varepsilon, L)$ . Эти вероятности  $P_{n,k}(\varepsilon, L)$  соответствуют безошибочному считыванию случайного одномерного  $n$ -точечного фрагмента, проводимому  $k$ -пороговой одномерной щелевой апертурой, имеющей линейный размер  $\varepsilon$ .

С помощью разработанных математических методов и созданных на их основе специализированных систем интеллектуальной программной поддержки нам удалось существенно продвинуться в решении задачи поиска точных аналитических формул  $P_{n,k}(\varepsilon, L)$ . В принципе, в этой задаче посредством очевидной предварительной нормировки из рассмотрения легко исключается параметр  $L$ . В результате одномерная задача, к которой сводится проблема оценивания вероятности безошибочного телевизионного считывания случайного двумерного поля, может быть сформулирована следующим образом: требуется найти вероятность  $P_{n,k}(\varepsilon)$  того, что при случайном бросании  $n$  точек на интервал  $(0, 1)$  не будет образовано ни одной группировки, сосредоточенной внутри некоторого подынтервала  $\Omega_\varepsilon \subset (0, 1)$  длиной  $\varepsilon$  и имеющей в своём составе более  $k$  точек. В пределах нашего рассмотрения эту задачу будем называть главной.

**Получение частных решений главной задачи с помощью программ машинной аналитики.** Простота главной задачи, к которой свелась исходная двумерная проблема безошибочного считывания, иллюзорна, а её аналитическое решение известно лишь для простейшего случая  $k = 1$  [1, 2]:

$$P_{n,1}(\varepsilon) = (1 - (n - 1)\varepsilon)^n, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1/(n - 1). \quad (1)$$

Формула (1) описывает вероятность события, состоящего в том, что при случайном бросании  $n$  точек на интервал  $(0, 1)$  не будет образовано ни одной  $\varepsilon$ -группировки, имеющей в своём составе хотя бы две точки, т. е. все выброшенные точки «разлетятся» на расстояние, превышающее  $\varepsilon$ . Классический способ получения решения (1) заключается в представлении искомой вероятности  $P_{n,1}(\varepsilon)$  в виде легко интегрируемого повторного интеграла [1]

$$P_{n,1}(\varepsilon) = n! \int_{(n-1)\varepsilon}^1 dx_n \left\{ \int_{(n-2)\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} dx_{n-1} \cdots \left\{ \int_{2\varepsilon}^{x_4-\varepsilon} dx_3 \left\{ \int_{\varepsilon}^{x_3-\varepsilon} dx_2 \left\{ \int_0^{x_2-\varepsilon} dx_1 \right\} \right\} \right\} \right\}. \quad (2)$$

Решение (1) можно получить и другими способами, например нами предложен простой вероятностно-геометрический метод [4], вообще не требующий многомерного интегрирования. Таким образом, решить главную задачу, когда  $k = 1$ , не представляет труда, а вот при  $k > 1$  процесс значительно усложняется. Здесь на сегодняшний день достигнуты следующие результаты [4–9].

При произвольных значениях  $n$  и  $k$  искомое решение может быть представлено в форме  $n$ -кратного интеграла

$$P_{n,k}(\varepsilon) = n! \int \dots \int_{D_{n,k}(\varepsilon)} dx_1 \dots dx_n, \quad (3)$$

где область интегрирования  $D_{n,k}(\varepsilon)$  задаётся системой линейных неравенств в евклидовом

пространстве  $R^n$ :

$$\begin{cases} 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < 1, \\ x_{k+1} - x_1 > \varepsilon, \\ x_{k+2} - x_2 > \varepsilon, \\ \vdots \\ x_n - x_{n-k} > \varepsilon. \end{cases} \quad (3a)$$

Для нахождения интеграла (3) при произвольных, но фиксированных значениях  $n$  и  $k$  разработаны два метода последовательного понижения размерности, основанные на рекурсивном замещении первоначального  $n$ -кратного интеграла набором структурно похожих, но имеющих размерность на единицу меньше интегралов. Далее с применением циклической рекурсии были спроектированы и программно реализованы две системы аналитического вычисления вероятностей  $P_{n,k}(\varepsilon)$ , которые рассчитывают искомую зависимость в виде кусочно-полиномиальных функций от непрерывного параметра  $\varepsilon$ . Первая система конструктивно вычисляет пределы интегрирования для каждого из повторных интегралов, на которые распадается исходный  $n$ -кратный интеграл (3). Вторая программная система базируется на многократном дифференцировании интеграла (3) по параметру  $\varepsilon$ . В дополнение к этим системам вычисления вероятностных формул  $P_{n,k}(\varepsilon)$ , основанным на циклическом понижении размерности многомерных интегралов, нами была разработана и программно реализована ещё одна алгоритмическая схема, базирующаяся на дискретно-комбинаторной модели процесса считывания точечных изображений. Аналитические расчёты, выполненные с помощью описанных программных систем, позволили найти полный набор частных формул  $P_{n,k}(\varepsilon)$  во всех диапазонах изменения непрерывного параметра  $\varepsilon$  для всех значений целочисленных параметров  $n$  и  $k$  вплоть до  $n = 14$  [10]. Отметим, что их вычисление сопряжено с огромным количеством рутинных операций по расстановке пределов интегрирования, проверке промежуточных систем неравенств на совместность, а также проведению непосредственного интегрирования в  $n$ -мерном пространстве, что сделать вручную уже при  $n = 4$  практически нереально.

**Расчёт вероятностных формул  $P_{n,k}(\varepsilon)$  методом прямого интегрирования.** На следующем этапе была сделана попытка с помощью анализа полученных частных результатов установить и по возможности доказать общие закономерности образования вероятностных формул  $P_{n,k}(\varepsilon)$  для случая  $k > 1$ , если их удастся выявить. Ряд подобных аналитических закономерностей, действительно, был обнаружен, а впоследствии и строго доказан.

Так, для  $k = n - 1$  была прослежена, а далее легко доказана простая зависимость

$$P_{n,n-1}(\varepsilon) = 1 - n\varepsilon^{n-1} + (n-1)\varepsilon^n. \quad (4)$$

(Заметим, что формула (4) описывает вероятность того, что при случайном бросании  $n$  точек на интервал  $(0, 1)$  все они не «собьются» в одну компактную  $\varepsilon$ -группировку.)

Для  $k = n - 2$  зависимость  $P_{n,k}(\varepsilon)$  более сложная:

$$P_{n,n-2}(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - 2C_n^2\varepsilon^{n-2}(1-\varepsilon)^2 - 2\varepsilon^n, & 0 \leq \varepsilon \leq 1/2, \\ 1 - 2C_n^2\varepsilon^{n-2}(1-\varepsilon)^2 - 2\varepsilon^n + (2\varepsilon - 1)^n, & 1/2 \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Для  $k = n - 3$  зависимость  $P_{n,k}(\varepsilon)$  усложняется настолько, что обнаружить её путём

анализа частных программных решений нереально:

$$P_{n, n-3}(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - 2\varepsilon^n + C_n^1(6\varepsilon^n - 4\varepsilon^{n-1}) + C_n^2(-3\varepsilon^n + \varepsilon^{n-2}) + \\ + C_n^3(9\varepsilon^n - 18\varepsilon^{n-1} + 12\varepsilon^{n-2} - 3\varepsilon^{n-3}), & 0 \leq \varepsilon \leq 1/2, \\ 1 - 2\varepsilon^n + (2\varepsilon - 1)^n + C_n^1(1 - \varepsilon)(-2\varepsilon^{n-1} + 2(2\varepsilon - 1)^{n-1}) + \\ + C_n^2(1 - \varepsilon)^2(\varepsilon^{n-2} + (2\varepsilon - 1)^{n-2}) - 3C_n^3\varepsilon^{n-3}(1 - \varepsilon)^3, & 1/2 \leq \varepsilon \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Формула (6), как и предыдущие зависимости (4), (5), найдена и аналитически подтверждена с помощью прямого интегрирования.

**Дискретно-комбинаторные методы отыскания формул  $P_{n,2}(\varepsilon)$ .** Далее была сделана попытка по аналогии с формулой (1), справедливой для  $k = 1$ , найти общее решение  $P_{n,k}(\varepsilon)$  для  $k = 2$ . К сожалению, данная задача оказалась намного сложнее, чем представлялось до начала исследований. Это связано, во-первых, с тем, что в отличие от случая  $k = 1$  вероятность  $P_{n,2}(\varepsilon)$  состоит не из одного, а из нескольких кусочно-однородных фрагментов, непрерывно состыкованных в точках «склейки». Во-вторых, сама формула  $P_{n,2}(\varepsilon)$  видоизменяется в зависимости от чётности  $n$ . В-третьих, нахождение закономерностей на каждом из диапазонов изменения параметра  $\varepsilon$  требует создания индивидуальной схемы редукции каждой непрерывной задачи, отвечающей конкретному диапазону, к собственной и зачастую весьма сложной дискретно-вероятностной задаче. В предложенной нами схеме редукции во всех подзадачах (во всех диапазонах изменения параметра  $\varepsilon$ ) возникают обобщённые числа Каталана. Знание их явного вида требуется при упорядочении взаимозависимых случайных числовых последовательностей. И хотя при этом все элементы анализируемых последовательностей являются случайными равномерно распределёнными вещественными числами, задачи с обобщёнными числами Каталана оказалось удобнее ставить и решать в лексической форме. Формулировки и решения каждой из таких задач, возникших при поиске соотношений  $P_{n,2}(\varepsilon)$ , приводятся далее. Задача 1 хорошо известна — это задача с классическими числами Каталана (в данном контексте интерес представляет лишь её лингвистическая постановка). Вторая и третья задачи не очень сложны, но поскольку в литературе они не встречались, мы сочли уместным привести здесь их решения. Задачи 4–6 новые. Решение всех задач приводим без доказательств (это продиктовано нежеланием перегружать деталями сообщение).

**Комбинаторно-лингвистические задачи, возникающие при исследовании случайных точечных структур и приводящие к обобщению чисел Каталана.**

**Задача 1** (классические числа Каталана). В образовании слова участвуют  $N$  символов « $a$ » и  $N$  символов « $b$ ». Сколько из этих слов таких, что при просмотре слова слева направо количество встреченных символов « $b$ » никогда не превышает количества встреченных символов « $a$ »?

**Решение:**

$$\text{WORD1}(N) = \frac{(2N)!}{N!N!} - \frac{(2N)!}{(N+1)!(N-1)!} = \frac{1}{N+1} \binom{2N}{N}. \quad (7)$$

Формула (7) для последовательности  $\text{WORD1}(N)$  встречается ещё в работах Л. Эйлера, но в комбинаторику она вошла под именем бельгийского математика Э.-Ш. Каталана, который жил столетием позже.

**Задача 2.** В образовании слова участвуют  $N_a$  символов « $a$ » и  $N_b$  символов « $b$ ». Сколько из этих слов таких, что при просмотре слова слева направо количество встреченных символов « $b$ » никогда не превышает количества встреченных символов « $a$ »? (Естественно, предполагается, что  $N_a \geq N_b$ , поскольку при  $N_a < N_b$  ни одно слово не удовлетворяет поставленному в задаче условию.)

**Решение:**

$$\text{WORD2}(N_a, N_b) = \frac{(N_a + N_b)!}{N_a!N_b!} - \frac{(N_a + N_b)!}{(N_a + 1)!(N_b - 1)!}. \quad (8)$$

Двумерная последовательность  $\text{WORD2}(N_a, N_b)$  является простейшим расширением классических чисел Каталана, которые получаются из неё при  $N_a = N_b$ .

**Задача 3.** В образовании слова участвуют  $N_a$  символов « $a$ » и  $N_b$  символов « $b$ ». Сколько из этих слов таких, что при просмотре слова слева направо количество встреченных символов « $b$ » никогда не превышает количества встреченных символов « $a$ » более чем на  $k$ ? (Предполагается, что  $k \geq 0$  и  $N_a + k \geq N_b$ .)

**Решение:**

$$\text{WORD3}_k(N_a, N_b) = \frac{(N_a + N_b)!}{N_a!N_b!} - \frac{(N_a + N_b)!}{(N_a + k + 1)!(N_b - k - 1)!}. \quad (9)$$

Это дальнейшее расширение чисел Каталана; именно при  $k = 0$  задача 3 эквивалентна задаче 2, а при  $N_a = N_b$  и  $k = 0$  получаем задачу 1.

**Задача 4.** В образовании слова участвуют  $N_a$  символов « $a$ »,  $N_b$  символов « $b$ » и  $N_c$  символов « $c$ ». Сколько из этих слов таких, что одновременно выполняются два условия:

1) при просмотре слова слева направо количество встреченных символов « $b$ » никогда не превышает количества встреченных символов « $a$ »;

2) при просмотре слова справа налево количество встреченных символов « $c$ » никогда не превышает количества встреченных символов « $a$ »?

**Решение.** В рассмотренных нами задачах с регистрацией случайных точечных полей [11] всегда выполнялось условие  $N_b + N_c - N_a - 2 < 0$  (вообще говоря, в них выполнялось более строгое условие  $N_a \geq N_b + N_c$ ), поэтому для этих задач справедлива формула

$$\begin{aligned} \text{WORD4.1}(N_a, N_b, N_c) &= \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{N_a!N_b!N_c!} - \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{(N_a + 1)!(N_b - 1)!N_c!} - \\ &- \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{(N_a + 1)!N_b!(N_c - 1)!} + \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{(N_a + 2)!(N_b - 1)!(N_c - 1)!}, \end{aligned} \quad (10)$$

которая была получена в [4] геометрическим путём с использованием классического метода зеркального отражения Андре [12]. А вот более общую формулу

$$\begin{aligned} \text{WORD4}(N_a, N_b, N_c) &= \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{N_a!N_b!N_c!} - \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{(N_a + 1)!(N_b - 1)!N_c!} - \\ &- \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{(N_a + 1)!N_b!(N_c - 1)!} + \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{(N_a + 2)!(N_b - 1)!(N_c - 1)!} + \\ &+ \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{(N_b + N_c - N_a - 2)!(N_a + 1)!(N_a + 1)!} - \frac{(N_a + N_b + N_c)!}{(N_b + N_c - N_a - 2)!N_a!(N_a + 2)!} \end{aligned} \quad (11)$$

получить таким способом не удаётся, поэтому для её нахождения применялись методы, развитые в [13]. (Заметим, что при  $N_c = 0$  задача 4 переходит в задачу 2, так что мы имеем дальнейшее расширение чисел Каталана.)

**Задача 5.** С помощью 6-символьного алфавита {«a», «b», «c», «d», «e», «f»} составляются различные слова длиной  $2m$  такие, что

$$N_a + N_d + N_e = m, \quad N_b + N_c + N_f = m, \quad N_a + N_c \leq m,$$

где  $N_a, N_b, N_c, N_d, N_e$  и  $N_f$  — количество использованных в данном слове символов «a», «b», «c», «d», «e» и «f» соответственно. Требуется для каждого допустимого набора  $\{N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f\}$  найти общее число слов  $\text{WORD5}_m(N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f)$ , которые при их просмотре слева направо одновременно удовлетворяют трём условиям:

1) количество встреченных символов «b» никогда не превышает количества встреченных символов «a»;

2) количество встреченных символов «d» никогда не превышает количества встреченных символов «c»;

3) количество встреченных символов «f» никогда не превышает количества встреченных символов «e» более чем на  $(N_a - N_b)$ .

**Решение.** С помощью классического метода зеркального отражения [12] нами найдено решение сформулированной задачи:

$$\begin{aligned} \text{WORD5}_m(N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f) &= (2m)! \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{(m - (N_b + N_c))!(m - (N_a + N_d))!} - \frac{1}{(m + 1 - (N_b + N_d))!(m - 1 - (N_a + N_c))!} \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{N_a!N_b!} - \frac{1}{(N_a + 1)!(N_b - 1)!} \right\} \left\{ \frac{1}{N_c!N_d!} - \frac{1}{(N_c + 1)!(N_d - 1)!} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

**Задача 6.** С помощью 6-символьного алфавита {«a», «b», «c», «d», «e», «f»} составляются различные слова длиной  $2m$  такие, что

$$N_a + N_d + N_e = m, \quad N_b + N_c + N_f = m, \quad N_a + N_c \geq m + 1,$$

где  $N_a, N_b, N_c, N_d, N_e$  и  $N_f$  — количество использованных в данном слове символов «a», «b», «c», «d», «e» и «f» соответственно. Требуется для каждого допустимого набора  $\{N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f\}$  найти общее число слов  $\text{WORD6}_m(N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f)$ , которые при их просмотре слева направо одновременно удовлетворяют трём условиям:

1) количество встреченных символов «b» никогда не превышает количества встреченных символов «a»;

2) количество встреченных символов «d» никогда не превышает количества встреченных символов «c»;

3) количество встреченных символов «a» никогда не превышает количества встреченных символов «c» более чем на  $(m + 1 - N_c)$ .

**Решение.** С использованием подхода [13] было найдено решение этой задачи:

$$\begin{aligned} \text{WORD6}_m(N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f) &= \frac{(2m)!}{N_e!N_f!} \left\{ \left[ \frac{1}{N_a!N_b!N_c!N_d!} - \frac{1}{N_a!N_b!(N_c + 1)!(N_d - 1)!} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{1}{(N_a + 1)!(N_b - 1)!(N_c + 1)!(N_d - 1)!} - \frac{1}{(N_a + 1)!(N_b - 1)!N_c!N_d!} \right] + \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{1}{(m+3)!N_b!(N_d-1)!(N_a+N_c-(m+2))!} - \frac{1}{(m+2)!N_b!N_d!(N_a+N_c-(m+2))!} \right] + \\
& \quad + \left[ \frac{1}{(m+3)!(N_b-1)!N_d!(N_a+N_c-(m+2))!} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(m+4)!(N_b-1)!(N_d-1)!(N_a+N_c-(m+2))!} \right] \}. \quad (13)
\end{aligned}$$

**Формулы  $P_{n,2}(\varepsilon)$ , найденные с применением программных, аналитических и дискретно-комбинаторных алгоритмов.** Для вероятностей  $P_{n,k}(\varepsilon)$  в случае  $k=2$  не удалось найти замкнутую аналитическую формулу, подобную формуле (1) для  $k=1$ . Однако все перечисленные выше компьютерные и дискретно-комбинаторные инструменты, включая программно-аналитические вычисления и обобщённые числа Каталана, помогли установить, а впоследствии доказать целый ряд ранее неизвестных аналитических зависимостей. В частности, для чётных значений  $n=2m$  на участке  $(1/m) < \varepsilon < (1/m-1)$  строго доказана в [7] ранее установленная в [11] формула

$$P_{2m,2}(\varepsilon) = \frac{1}{m+1} C_{2m}^m (1 - (m-1)\varepsilon)^{2m}; \quad (14)$$

для чётных значений  $n=2m$  на участке  $(1/m+1) < \varepsilon < (1/m)$  установлена и доказана [14] формула

$$\begin{aligned}
P_{2m,2}(\varepsilon) = & C_{2m}^m (1 - (m-1)\varepsilon)^{2m} - C_{2m}^{m-1} (1 - (m-1)\varepsilon)^{2m} - C_{2m}^{m-2} (1 - m\varepsilon)^{m+2} (1 - (m-2)\varepsilon)^{m-2} + \\
& + 2C_{2m}^{m-3} (1 - m\varepsilon)^{m+3} (1 - (m-2)\varepsilon)^{m-3} - C_{2m}^{m-4} (1 - m\varepsilon)^{m+4} (1 - (m-2)\varepsilon)^{m-4}; \quad (15)
\end{aligned}$$

для нечётных значений  $n=2m+1$  на участке  $(1/m+1) < \varepsilon < (1/m)$  установлена и доказана [8] формула

$$\begin{aligned}
P_{2m+1,2}(\varepsilon) = & C_{2m+1}^{m+1} (1 - m\varepsilon)^{m+1} (1 - (m-1)\varepsilon)^m - \\
& - 2C_{2m+1}^{m+2} (1 - m\varepsilon)^{m+2} (1 - (m-1)\varepsilon)^{m-1} + C_{2m+1}^{m+3} (1 - m\varepsilon)^{m+3} (1 - (m-1)\varepsilon)^{m-2}. \quad (16)
\end{aligned}$$

**Заключение.** Приведённые в данной работе результаты получены с помощью специально созданных средств машинной аналитики, а также обобщённых чисел Каталана, что позволило перевести непрерывную по своей сути задачу поиска вероятностных формул  $P_{n,k}(\varepsilon)$  в разряд дискретно-комбинаторных. Эффективность применения предложенных методов даёт возможность надеяться на дальнейшее продвижение в решении главной задачи вплоть до отыскания её общего аналитического решения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Parzen E.** Modern Probability Theory and Its Applications. N. Y.: John Wiley & Sons, 1960. 464 p.
2. **Уилкс С.** Математическая статистика: Пер. с англ. М.: Наука, 1967. 632 с.



3. **Ефимов В. М., Искольдский А. М., Крендель Ю. М., Лившиц З. А.** О характеристиках различных методов считывания изображений дискретной структуры // *Автометрия*. 1973. № 1. С. 3–7.
4. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А., Торгов А. В.** О надёжности считывания случайных точечных объектов при ограниченном числе пороговых уровней сканирующей апертуры // *Автометрия*. 2014. **50**, № 6. С. 61–68.
5. **Резник А. Л., Ефимов В. М.** Компьютерная аналитика и обобщённые числа Каталана в задачах регистрации случайных дискретных объектов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013. 64 с.
6. **Reznik A. L., Efimov V. M., Solov'ev A. A., Torgov A. V.** On the reliable readout of random discrete-point structures // *Patt. Recogn. and Image Analys.* 2015. **25**, N 1. P. 84–88.
7. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А.** Компьютерно-аналитический расчёт вероятностных характеристик процесса считывания случайных точечных изображений // *Автометрия*. 2011. **47**, № 1. С. 10–16.
8. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А., Торгов А. В.** Обобщённые числа Каталана в задачах обработки случайных дискретных изображений // *Автометрия*. 2011. **47**, № 6. С. 11–15.
9. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А.** Оценивание надёжности считывания случайных дискретных изображений с применением средств компьютерной аналитики // *Вестн. НГУ. Сер. Физика*. 2010. **5**, вып. 2. С. 104–110.
10. **Reznik A. L., Solov'ev A. A., Torgov A. V.** Table of probabilities obtained from software analytical calculations for errorless discrete structures readout process. URL: [http://www.iae.nsk.su/images/stories/6\\_DepPages/0\\_Labs/L12/pdf/PTable.pdf](http://www.iae.nsk.su/images/stories/6_DepPages/0_Labs/L12/pdf/PTable.pdf) (дата обращения: 01.06.2016).
11. **Резник А. Л.** Моделирование на ЭВМ непрерывного считывания изображений дискретной структуры // *Автометрия*. 1981. № 6. С. 3–6.
12. **André D.** Solution directe du problème résolu par M. Bertrand // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1887. **105**. P. 436–437.
13. **Gessel I. M., Zeilberger D.** Random walk in a Weyl chamber // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1992. **115**, N 1. P. 27–31.
14. **Резник А. Л., Соловьев А. А., Торгов А. В.** Программно-комбинаторный подход к решению задач безошибочного считывания случайных точечных изображений // *Автометрия*. 2016. **52**, № 2. С. 20–27.

*Поступила в редакцию 15 января 2016 г.*

---