

УДК 621.321

КОРНЕВЫЕ КООРДИНАТЫ В СИНТЕЗЕ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА*

А. В. Чехонадских

*Новосибирский государственный технический университет,
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: alchek@ngs.ru*

Изучаются расположения полюсов линейных одноканальных систем автоматического управления с регуляторами пониженного порядка. Теоретически обосновывается и демонстрируется на примере метод отыскания критических (в том числе оптимальных и субоптимальных) расположений полюсов замкнутых систем. Использование критических корневых диаграмм и корневых многочленов позволяет аналитически выразить параметры субоптимального регулятора через корневые координаты, в частности действительные и мнимые части характеристических корней. Возникающие при этом алгебраические уравнения и неравенства дают возможность указать предельное смещение влево области расположения полюсов и наибольшую степень устойчивости (возможно, с учётом колебательности) без обременительных вычислений.

Ключевые слова: линейные одноканальные системы управления, регулятор пониженного порядка, оптимальное расположение полюсов, R -градуировка, критические корневые диаграммы, корневые многочлены.

Введение. Синтез регуляторов пониженного порядка, в частности ПИД-регуляторов, для объектов и агрегатов самого разного назначения остаётся одним из наиболее актуальных разделов теории автоматического управления (ТАУ). Есть немало свидетельств о преобладании данных регуляторов в промышленности самых развитых в технологическом отношении стран [1], что обусловлено хорошими результатами применения управления пониженного порядка в случаях, когда такое управление удаётся построить. Вместе с тем до настоящего времени не предложено ни теории, отвечающей потребностям синтеза регуляторов пониженного порядка, ни универсальных, доступных и надёжных численных инструментов настройки таких систем [2]. Это относится даже к одноканальным линейным системам регулирования — традиционному и хорошо разработанному разделу ТАУ [3].

В данной работе предлагается оптимизационный подход к модальному синтезу таких систем, опирающийся на алгебраические средства и позволяющий обойтись без объёмных и ненадёжных численных процедур.

Везде далее рассматривается классическая схема «объект \leftrightarrow регулятор» с отрицательной обратной связью. Общепринятая постановка задачи поиска оптимального регулятора пониженного порядка включает в себя предварительные стадии выяснения структуры стабилизирующего регулятора, а также поиск критериев оптимальности, отвечающих инженерным представлениям о качестве переходных процессов в замкнутой системе. После того как определена структура регулятора, обеспечивающая стабилизацию системы и включающая несколько свободных (настраиваемых) параметров, решается собственно

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 2014/138, проект № 1052).

оптимизационная задача: находятся такие значения параметров, которые удовлетворяют выбранному критерию оптимальности. Как правило, это предполагает минимизацию некоторой величины, оказывающейся целевой функцией свободных параметров.

Метод, изложенный в работах [4–7] на примерах систем с объектами шестого порядка, направлен на непосредственное нахождение оптимального или субоптимального расположения полюсов замкнутой системы, минуя предварительные поиски стабилизирующего управления. Такие взаимные расположения полюсов, названные в [4] критическими корневыми диаграммами, дают возможность алгебраическими средствами определить соответствующие им точки в пространстве параметров или установить, что это расположение в данной системе не реализуется. То, что оптимальность связана с наличием кратных полюсов или нескольких комплексных пар на правой границе их расположения, отмечалось и в российских [8], и в зарубежных исследованиях [9]. Особо следует отметить большую серию работ [10–13] и др., посвящённых максимизации степени устойчивости систем с характеристическими полиномами специального вида; в задачах небольших размерностей найдены списки критических диаграмм, а в задачах произвольной размерности доказана оптимальность некоторых из них.

При разборе примеров [4–7] в линейных одноканальных системах автоматического управления (САУ) удавалось получить аналитическое выражение параметров управления через корневые координаты* для каждой критической корневой диаграммы. Основная цель данной работы — явно установить и теоретически обосновать эту особенность.

1. Постановка задачи. Предположим, что САУ включает в себя полностью определённый объект (plant) с передаточной функцией $n_{pl}(s)/d_{pl}(s)$. Регулятор (controller) должен иметь такой вид передаточной функции $n_{con}(s)/d_{con}(s)$ и такое число свободных параметров, чтобы замкнутая система приобрела заданные свойства. Характеристический многочлен («знаменатель» системы) находится диофантовым соотношением

$$f_P(s) = n_{pl}(s)n_{con}(s) + d_{pl}(s)d_{con}(s) = a_n(P)s^n + \dots + a_1(P)s + a_0(P),$$

причём m параметров P регулятора входит в его коэффициенты линейно. Поскольку оба знаменателя $d_{pl}(s)$, $d_{con}(s)$ можно считать приведёнными, для правильного регулятора, удовлетворяющего условию

$$\deg n_{pl}(s)n_{con}(s) < \deg d_{pl}(s)d_{con}(s),$$

характеристический многочлен также оказывается приведённым: $a_n(P) \equiv 1$.

Корни z_1, \dots, z_n многочлена $f_P(s)$ — полюсы системы — определяют её принципиальные свойства**. В системах полного порядка обеспечивается возможность любого наперёд заданного расположения полюсов; например, в одноканальной системе для этого достаточно взять числитель и знаменатель регулятора степени со свободными коэффициентами

$$\deg n_{con}(s) = \deg d_{con}(s) = \deg d_{pl}(s) - 1.$$

Порядок регулятора именуется пониженным, если число m свободных параметров регулятора или способ их вхождения в коэффициенты многочлена $f(s)$ не позволяет добиваться произвольного расположения полюсов системы на комплексной плоскости. Задача

*Идея использования корневых координат, в частности действительных и мнимых частей полюсов САУ, или других переменных, задающих их положение на комплексной плоскости, предложена в [14].

**Прежде всего, это устойчивость и колебательность; в устойчивой системе колебательность существенно влияет на перерегулирование, доминирование вещественного корня в большинстве случаев обеспечивает бесколебательное гашение возмущений и т. д.

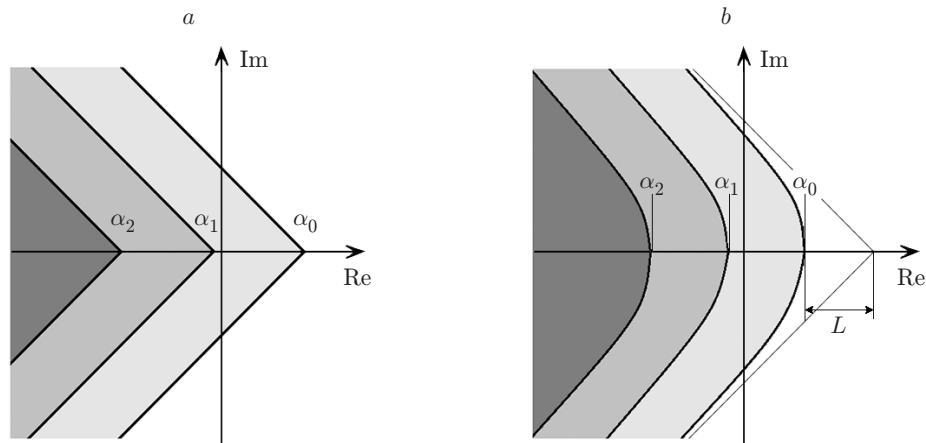


Рис. 1. Целевые области оптимизации расположения полюсов САУ пониженного порядка: *a* — семейство конического типа, связанное с конической R -градуировкой $K(P)$; *b* — семейство гиперболических областей, связанное с гиперболической R -градуировкой $G(P)$. Значение α_k целевой функции задаётся самой правой точкой области, на границу которой попадают наименее устойчивые полюсы

полиномиального синтеза в этом случае предусматривает выяснение структуры и значений вектора параметров P регулятора, при котором полюсы САУ оказались бы в левой полуплоскости, затем таких значений P , при которых достигаются оптимальное расположение полюсов и наилучшие свойства всей системы.

С модальной точки зрения понятие оптимальности системы должно быть формализовано в виде некоторых условий на расположение полюсов системы на комплексной плоскости. В работах [15, 16] вместо задания конкретной целевой области в левой полуплоскости, куда должны входить все полюсы, предлагается ввести индексированное действительной переменной α семейство вложенных областей определённого вида (рис. 1) и за счёт выбора параметров регулятора добиваться попадания полюсов в самую левую из доступных областей; такое семейство называется градуировочным. Поскольку в этом случае на границе целевой области сосредоточивается максимальное число полюсов, характеристический многочлен системы должен содержать множитель, включающий в себя их действительные и мнимые части. Указанное условие определяет алгебраические соотношения между корневыми координатами и параметрами регулятора. В итоге оказывается возможным выразить параметры через координаты. В ряде случаев удаётся, задав степень устойчивости и колебательность, получать характеристики регулятора, которые эти данные реализуют, что будет показано далее на примере с последующим теоретическим обоснованием.

2. Корневые R -градуировки и координаты. Пусть на комплексной плоскости задан предпорядок \leq_α , позволяющий различать полюсы, расположенные «левее» или «правее», что соответствовало бы инженерным представлениям о более или менее устойчивых модах. Обычным способом можно ввести α -равенство и строгое α -неравенство. Точные формулировки даны в [17, 18]; в предлагаемой работе достаточно ограничиться тремя примерами таких предпорядков, охватывающими большинство рассматриваемых в ТАУ ситуаций:

1) сравнение по степени устойчивости:

$$z_1 \leq_\alpha z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 \leq \operatorname{Re} z_2;$$

оно удобно, когда от системы требуется максимальный запас устойчивости, достигаемый

минимизацией степени устойчивости, или гурвицевой функции

$$H(P) = \max(\operatorname{Re}z_1; \dots; \operatorname{Re}z_n);$$

2) сравнение колебательности с учётом устойчивости:

$$z_1 \leq_{\alpha} z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}z_1 + |\operatorname{Im}z_1| \leq \operatorname{Re}z_2 + |\operatorname{Im}z_2|;$$

оно удобно при снижении колебательности с предотвращением выхода системы на границу устойчивости; это достигается минимизацией конической функции

$$K(P) = \max(\operatorname{Re}z_k + |\operatorname{Im}z_k|);$$

3) сравнение устойчивости с учётом колебательности:

$$z_1 \leq_{\alpha} z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}z_1 + \sqrt{L^2 + \operatorname{Im}^2 z_1} \leq \operatorname{Re}z_2 + \sqrt{L^2 + \operatorname{Im}^2 z_2};$$

его удобно использовать, когда необходимо добиться максимального запаса устойчивости, ограничивая также колебательную составляющую; это достигается минимизацией гиперболической функции

$$G(P) = \max \left(\operatorname{Re}z_k + \sqrt{L^2 + \operatorname{Im}^2 z_k} \right) - L.$$

Очевидно, в случае 1 семейство областей оказывается просто левыми полуплоскостями вида $\operatorname{Re}(z) \leq \alpha$ для различных значений α ; в случае 2 — разомкнутыми влево конусами (секторами) вида $\operatorname{Re}(z) + |\operatorname{Im}(z)| \leq \alpha$ (рис. 1, *a*); в случае 3 — внутренними областями левых ветвей равнобоковых гипербол $\operatorname{Re}z + \sqrt{L^2 + \operatorname{Im}^2 z} - L \leq \alpha$ (рис. 1, *b*), что достаточно близко к конусу, усечённому на расстояние L от вершины — широко распространённому в синтезе САУ виду целевой области.

Таким образом, каждому корню z сопоставляется его градуировочное значение $\alpha = F(z)$, например $\alpha = \operatorname{Re}z$ или $\alpha = \operatorname{Re}z + |\operatorname{Im}z|$. Оптимизация расположения полюсов сводится к минимизации R -градуировки $F(P) = \max F(z_1, \dots, z_n)$, индексирующей «правый край» корневого набора и задаваемой величинами типа $H(P)$, $K(P)$ и $G(P)$. Подчёркнём, что R -градуировка зависит только от расположения α -старших полюсов, оказывающихся на границе соответствующей области. Далее существенно, чтобы предпорядок \leq_{α} основывался на алгебраических соотношениях между действительной и мнимой частями, как в приведённых примерах. Будем считать, что границы градуировочной области описываются соотношениями либо $\operatorname{Re}s = \iota_{\alpha}(|\operatorname{Im}s|)$, либо $\operatorname{Im}s = \pm\tau_{\alpha}(\operatorname{Re}s)$, где $\iota_{\alpha}(y)$ и $\tau_{\alpha}(x) \geq 0$ — невозрастающие функции, определённые при $y \geq 0$ и $x \leq \alpha$ соответственно, причём $\iota_{\alpha}(0) = \alpha$, $\tau_{\alpha}(\alpha) = 0$, а $\iota_{\alpha}(y)$ и $\tau_{\alpha}^2(x)$ — целые алгебраические функции.

Помимо действительной и мнимой частей корневыми координатами далее будут служить и другие величины, связанные с условиями конкретной задачи и однозначно описывающие положение полюса на комплексной плоскости. В частности, для точек границ градуировочных областей вполне достаточно указывать значения α и $y = \operatorname{Im}s$.

3. Критические диаграммы и корневые многочлены. Если значения $\operatorname{Re}z_k$, $\operatorname{Im}z_k$ дифференцируемы как функции параметров регулятора P (так, отсутствие кратных корней многочлена $f_P(s)$ гарантирует гладкую связь корней и коэффициентов [15]), то целевую функцию $F(P)$ можно минимизировать, например, градиентным методом, как это осуществлялось в [16]. Численная минимизация затрудняется, когда появляются кратные

корни или α -равные корни $z_k =_\alpha z_l$, и дифференцируемость нарушается [15, 18]. Очевидно, α -равенство $z_k =_\alpha z_l$ двух комплексных пар или пары и действительного корня связывает одну степень свободы в пространстве параметров регулятора P . Кратность действительных корней $x_k = x_l$ также связывает одну степень свободы. Кратность комплексных корней $z_k = z_l$ связывает две степени свободы, так как требует выполнения двух действительных равенств $\operatorname{Re}z_k = \operatorname{Re}z_l$ и $\operatorname{Im}z_k = \operatorname{Im}z_l$. Пока число таких связей меньше размерности пространства параметров, как правило, возможна дальнейшая минимизация. Кроме того, снижение размерности и возникновение критических точек на многообразиях положительной размерности возможно и при обращении в нуль градиента по многообразию. В таком случае в критической точке по одним направлениям производная не существует, по другим она обращается в нуль; вместе с α -равенствами правых корней степени свободы связываются уравнениями $\partial F/\partial \nu_k = 0$, где ν_k — координаты на многообразии.

Если же эти равенства исчерпывают размерность пространства параметров P , иначе говоря, если система равенств задаёт нульмерное многообразие в пространстве P (одну или несколько точек либо пустое множество), то минимизация сводится к сравнению соответствующих значений R -градуировки.

Во всех указанных случаях дифференцируемость целевой функции нарушается и возникает несколько возможностей взаимного расположения α -правых корней, схематически изображаемых критическими корневыми диаграммами. На рис. 2 указаны некоторые варианты такого расположения (они возникают в примере разд. 4). Серая зона каждого круга указывает на положение α -младших корней. Диаграмма рис. 2, *a* обозначает, что α -правые корни просты и включают в себя действительный корень и четыре комплексные пары; система из четырёх α -равенств, связывая четыре степени свободы, задаёт многообразие размерности $m - 4$ (которое может оказаться пустым). Диаграмма рис. 2, *b* представляет случай, когда четырёхкратная комплексная пара и простой действительный корень имеют равные целевые значения; её реализация означает наличие непустого многообразия размерности $m - 7$. Диаграмма рис. 2, *c* указывает на расположение справа четырёхкратной комплексной пары и задаёт $(m - 6)$ -мерное многообразие (простой действительный корень выделен из серой зоны для иллюстрации рассмотренного далее примера).

Поскольку границы градуировочных областей описываются алгебраическими соотношениями $x = \iota_\alpha(|y|)$ или $y = \pm\tau_\alpha(x)$, то и расположение α -правых корней на границе выражается в выделении у характеристического многочлена определённого множителя — корневого многочлена $p(s)$. Например, при конической R -градуировке корневые координаты

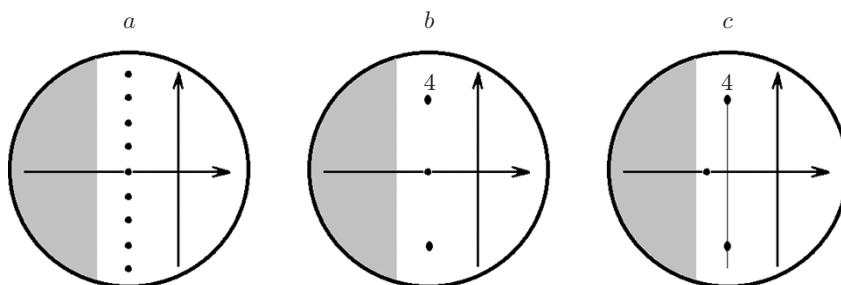


Рис. 2. Корневые диаграммы расположения полюсов упругой трёхмассовой САУ с регулятором $n_3(s)/d_3(s)$ (серая зона пуста): *a* — расположение всех корней на одной вертикали задаёт трёхмерное многообразие в семимерном пространстве P ; *b* — комплексная пара кратности 4 на одной вертикали с действительным корнем определяет точку субоптимального расположения полюсов; *c* — оптимальное расположение полюсов достигается в одномерном многообразии, заданном четырёхкратной комплексной парой справа

ты на границе области связаны уравнением $(x - \alpha)^2 = y^2$, и для диаграммы на рис. 2, а это приводит к многочлену (действительный корень $x_1 = \alpha$)

$$p(s) = (s - x_1) \prod_{k=2}^5 (s^2 - 2x_k s + x_k^2 + y_k^2) = (s - x_1) \prod_{k=2}^5 (s^2 - 2x_k s + x_1^2 - 2x_1 x_k + 2x_k^2).$$

Коэффициенты корневого многочлена оказываются алгебраическими выражениями от корневых координат, чем и обусловлены требования к типу их связи на границе области, указанные в конце разд. 2.

4. Оптимальный регулятор для трёхмассового объекта. Предварим общие рассуждения примером. В качестве объекта возьмём конструкцию из трёх тел с массами $m_{1,2,3}$, упруго соединённых с неподвижным основанием и друг с другом пружинами жёсткости $k_{1,2,3}$ (рис. 3). Управляющие воздействия u_i прикладываются к телам горизонтально с положительным направлением вправо. Переменными состояниями будут координаты тел $x_{1,2,3}$, отсчитываемые от состояния равновесия. Движение тел сопровождается сопротивлением среды, пропорциональным их скорости с коэффициентами $v_{1,2,3}$.

В первом приближении уравнения системы запишутся следующим образом:

$$m_1 \ddot{x}_1 + v_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = u_1,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + v_2 \dot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_2 - x_3) = u_2,$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + v_3 \dot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) = u_3.$$

В [19] решается задача стабилизации такого объекта двухканальным регулятором полного порядка; в качестве контролируемых переменных приняты координаты первого и второго тел ($y_{1,2} = x_{1,2}$) и к ним же приложены управляющие силы $u_{1,2}$. Стандартный метод решения матричного диофантова уравнения осложняется совпадением чисто мнимых нулей и полюсов объекта, которое возникает при $m_i = 1$, $v_i \approx 0$, $k_1 = k_2 = 2$, $k_3 = 4$.

Матричная форма операторных уравнений системы в этом случае принимает вид

$$\begin{pmatrix} s^2 + 4 & -2 & 0 \\ -2 & s^2 + 6 & -4 \\ 0 & -4 & s^2 + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

В работах [5, 6] рассматривается задача стабилизации третьего тела за счёт управляющего воздействия, приложенного к первому, т. е. стабилизация контролируемой переменной $y = x_3$ осуществляется управлением $u = u_1$ ($u_{2,3} \equiv 0$). Решая матричное уравнение

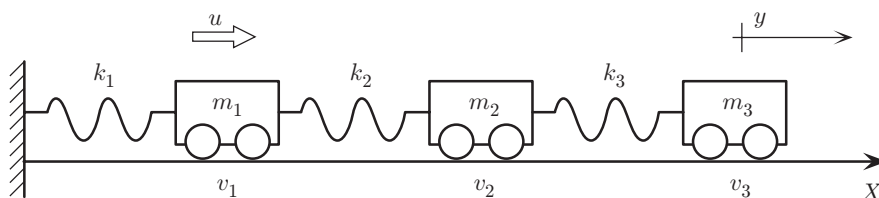


Рис. 3. Трёхмассовый объект с упругими связями, стабилизируемый действием силы u . Контролируемой величиной считается координата $y = x_3$ третьего тела

по правилу Крамера, получим операторное описание объекта:

$$y = \frac{n_{\text{pl}}}{d_{\text{pl}}} u = \frac{8}{s^6 + 14s^4 + 44s^2 + 16} u.$$

В [5, 6] рассматривался регулятор с передаточной функцией

$$\frac{n_{\text{con}}(s)}{d_{\text{con}}(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}.$$

Это привело к характеристическому многочлену, зависящему от семи параметров:

$$\begin{aligned} f(s) = d_{\text{pl}} d_{\text{con}} + n_{\text{pl}} n_{\text{con}} = & s^9 + c_2 s^8 + (14 + c_1) s^7 + (14c_2 + c_0) s^6 + \\ & + (44 + 14c_1) s^5 + (44c_2 + 14c_0) s^4 + (8b_3 + 16 + 44c_1) s^3 + \\ & + (8b_2 + 16c_2 + 44c_0) s^2 + (16c_1 + 8b_1) s + 16c_0 + 8b_0. \end{aligned}$$

Для семимерного пространства P полное число различных критических диаграмм составляет 55 [20], однако не все они реализуются. В частности, поскольку корней девять, α -правыми корнями могут оказаться не более четырёх комплексных пар.

Далее, в качестве целевой принята гурвицева функция $H = \max \operatorname{Re}(z_1, \dots, z_9)$. Границами градуировочных областей здесь будут вертикальные прямые $\operatorname{Re} z = \alpha$. В [5, 6] явно показано, что до тех пор, пока менее семи полюсов находится на правой вертикали области их расположения, эту вертикаль можно сдвигать влево.

Пусть все корни расположены на одной вертикали (например, когда совпадение семикратного действительного корня с действительной частью комплексной пары потребует выполнения семи равенств относительно девяти корней). Поскольку их число нечётно, один из них — это вещественный корень $z = x$. Оставшиеся восемь корней образуют четыре комплексные пары (возможно, вырожденные, т. е. совпадающие с действительным корнем). Таким образом, должно выполняться четыре равенства: $\operatorname{Re}(z_k) = x$, $k = 1, \dots, 4$, которые связывают четыре степени свободы и задают трёхмерное множество в пространстве параметров P . При этом корневой набор описывается пятью координатами, так как корни имеют вид $x \pm iy_k$ ($k = 1, \dots, 4$). Сдвиг переменной* $z = s - x$ позволит придать характеристическому многочлену вид $f(s) = g(x(z))$, в коэффициенты которого параметры регулятора по-прежнему входят линейно:

$$\begin{aligned} g(z) = & z^9 + [c_2 + 9x] z^8 + [14 + c_1 + 8c_2 x + 36x^2] z^7 + [c_0 + 14c_2 + 7(14 + c_1)x + 28c_2 x^2 + 84x^3] z^6 + \\ & + [44 + 14c_1 + 6(c_0 + 14c_2)x + 21(14 + c_1)x^2 + 56c_2 x^3 + 126x^4] z^5 + \dots \\ & \dots + [8b_1 + 16c_1 + 8(2b_2 + 11c_0 + 4c_2)x + 12(4 + 2b_3 + 11c_1)x^2 + \\ & + 8(7c_0 + 22c_2)x^3 + 10(22 + 7c_1)x^4 + 6(c_0 + 14c_2)x^5 + 7(14 + c_1)x^6 + 8c_2 x^7 + 9x^8] z + \\ & + 8b_0 + 16c_0 + 8(b_1 + 2c_1)x + 8(b_2 + 5,5c_0 + 2c_2)x^2 + 8(b_3 + 5,5c_1 + 2)x^3 + (14c_0 + 44c_2)x^4 + \end{aligned}$$

*Этот приём использовался в схожих целях в [11] и др.; с его помощью упрощается анализ решения, полученного из приравнивания $f(s) = p(s)$ или после сдвига $H(z) = zh(z^2)$.

$$+ (14c_1 + 44)x^5 + (c_0 + 14c_2)x^6 + (14 + c_1)x^7 + c_2x^8 + x^9.$$

Соответственно корневой многочлен, имеющий указанный набор корней, после замены $z = s - x$ примет вид

$$p(s) = zh(z^2) = z(z^2 + y_1^2) \dots (z^2 + y_4^2).$$

Полагая $Z = z^2$, $Y_k = y_k^2$, получим многочлен $h(Z) = Z^4 + AZ^3 + BZ^2 + CZ + D$, корни которого равны $-Y_{1,2,3,4}$.

Из равенства $g(z) = zh(z^2)$ возникает система уравнений, линейная относительно коэффициентов A, B и параметров регулятора, которая позволяет выразить их как

$$A = -4/7(63x^4 - 168x^2 - 76)/(5x^2 + 2); \quad c_0 = -2x(84x^4 + 105x^2 + 26)/(5x^2 + 2);$$

$$c_1 = 2/7(504x^4 + 343x^2 + 54)/(5x^2 + 2); \quad c_2 = -9x.$$

Переменные x, C, D остаются свободными.

Поскольку корни приведённого многочлена четвёртой степени $h(Z)$ вещественны и неположительны, таковы же корни его производных. Для трёхчлена $h''(Z) = 12Z^2 + 6AZ + 2B$ это означает, что $A, B \geq 0$ и дискриминант неотрицателен: $B \leq 3/8A^2$. Но корни функции $3/8A^2 - B$ — это корни её числителя, т. е. уравнения

$$441x^8 + 4851x^6 + 1876x^4 - 756x^2 - 304 = 0.$$

Вещественный отрицательный корень здесь один: $x = x_0 \approx -0,6285$, при этом дискриминант обращается в нуль, а выражения A, B положительны.

Построив графики функций A, B и $3/8A^2 - B$ как функций от $x < 0$, нетрудно убедиться, что они неотрицательны на отрезке $x_0 \leq x \leq 0$. Значит, для отрицательных x условие вещественности и неположительности корней второй производной $h''(Z)$ равносильно тому, что $x_0 \leq x \leq 0$.

Итак, когда все корни характеристического многочлена находятся на одной вертикали x , устойчивость реализуется тогда и только тогда, когда $x_0 \leq x \leq 0$. Наибольший запас устойчивости в этом случае задаёт точка $x = x_0$. В ней функция $3/8A^2 - B$ и дискриминант трёхчлена $h''(Z)$ обращаются в нуль, так что корни $h''(Z)$ двухкратны. Тогда условие неположительности вещественных корней первой производной $h'(Z)$ влечёт за собой их трёхкратность, чем коэффициент C определяется однозначно. Это верно и для корней многочлена $h(Z)$ — они также будут кратными, точнее, четырёхкратными: $Y_{1,2,3,4} = A/4 \approx 4,7628$. Отсюда

$$y_{1,2,3,4} = \sqrt{4,7628} \approx 2,1824.$$

Таким образом, при расположении характеристических корней на вертикали $x = x_0$ образуется четырёхкратная комплексная пара на одной вертикали с вещественным корнем. Других таких точек в левой полуплоскости нет, поскольку число $x = x_0$ — это единственный вещественный отрицательный корень вышевыписанного уравнения.

По приведённым формулам можно вычислить значения параметров, соответствующие величине $x = x_0 \approx -0,6285$. Прежде всего это $A \approx 19,0515$, $B \approx 136,1100$.

Подставим значения корней $Y_{1,2,3,4}$ в выражение $h'(Z) = 4Z^3 + 3AZ^2 + 2BZ + C$ и, приравняв его к нулю, получим $C \approx 432,1835$. Точно так же получим $D \approx 514,6093$.

Тогда из формул для параметров регулятора находятся

$$c_0 \approx 25,4852; \quad c_1 \approx 19,2740; \quad c_2 \approx 5,6569;$$

$$b_0 \approx 4,6396; \quad b_1 \approx 104,1394; \quad b_2 \approx -2,2861; \quad b_3 \approx 26,8887,$$

а характеристический многочлен системы с наибольшим запасом устойчивости имеет вид

$$f(s) = s^9 + 5,6569s^8 + 33,2740s^7 + 104,6819s^6 + 313,8360s^5 + \\ + 605,6973s^4 + 1079,1663s^3 + 1193,5723s^2 + 1141,4992s + 444,8811.$$

Однако, как показано в работе [6], максимальный запас устойчивости достигается при $x_{\min} \approx -0,6298$ на одномерном многообразии, соответствующем критической корневой диаграмме на рис. 2, *с*. В этом случае единственный действительный корень оказывается на величину $t \approx -0,1997$ левее четырёхкратной комплексной пары. Параметры числителя оптимального регулятора заметно отличаются от полученных выше:

$$b_0 \approx 14,2218; \quad b_1 \approx 111,3570; \quad b_2 \approx 0,1015; \quad b_3 \approx 28,6469;$$

$$c_0 \approx 27,3226; \quad c_1 \approx 20,0083; \quad c_2 \approx 5,8687.$$

5. Корневые многочлены и реализуемость критических диаграмм. Первое ограничение реализуемости критических корневых диаграмм определённого порядка связано со степенью характеристического многочлена, а значит, с числом его корней. Выясним связь между ними. Пусть $\dim P = k < n$ и задана некоторая критическая диаграмма порядка k , где достигается k равенств между корневыми координатами.

Предложение 1. Число характеристических корней m , реализующих корневую диаграмму порядка k , удовлетворяет соотношению $k + 1 \leq m \leq 2k + 2$.

Доказательство индукцией по k . Основание индукции очевидно: если $k = 0$, т. е. α -правые корни не связаны никакими равенствами, то это либо простой действительный корень и $m = 1$, либо простая комплексная пара и $m = 2$.

Пусть при любом $k' < k$ указанное неравенство верно. Достаточно доказать, что увеличение числа Δm α -правых корней и числа Δk α -равенств связано соотношением $\Delta k \leq \Delta m \leq 2\Delta k$. Рассмотрим различные случаи для α -правых корней.

Если в их число входит простой или кратный действительный корень x_0 и диаграмма задаётся системой равенств вида $x_0 =_\alpha x_1 \pm iy_2 =_\alpha \dots$ или $x_0 = x_1 = \dots$, то можно рассмотреть диаграмму порядка $k - 1$, задаваемую системой α -равенств $x_1 \pm iy_2 =_\alpha \dots$ или $x_1 = \dots$, включающую на один корень и одно α -равенство меньше.

Аналогично при наличии простой комплексной пары $x_0 \pm iy_0 =_\alpha x_1 \pm iy_2 =_\alpha \dots$ можно рассмотреть диаграмму порядка $k - 1$, задаваемую системой α -равенств $x_1 \pm iy_2 =_\alpha \dots$, включающую на два корня и одно α -равенство меньше.

Если в диаграмму входит комплексная пара $x_0 \pm iy_0$ наименьшей кратности $r + 1$, то для её реализации требуется выполнение $\Delta k = 2r + 1$ равенств: по r равенств для действительных и мнимых частей, а также ещё одно α -равенство, связывающее эту пару с прочими. Поскольку такая диаграмма возникает из диаграммы меньшего порядка за счёт увеличения числа правых корней на $\Delta m = 2r + 2$, то $\Delta m = \Delta k + 1$ и нужное соотношение для приращений поддерживается.

Остаётся заметить, что нижняя граница для числа m достигается в случае кратности $k+1$ действительного α -правого корня $x_1 = \dots = x_{k+1}$. Случай $k+1$ простых комплексных пар $x_1 \pm iy_2 =_\alpha \dots =_\alpha x_{2k+1} \pm iy_{2k+2}$ приводит к верхней границе $m = 2k + 2$ для числа α -правых корней. Предложение доказано.

Диаграммы с числом корней $m > n$ заведомо не реализуются; остальные допускают деление с остатком характеристического многочлена $f(s)$ на корневой многочлен $p(s)$:

$$f(s) = p(s)q(s) + r(s).$$

При этом $\deg q(s) = n - m$, $\deg r(s) < m \leq n$.

Рассмотрение разд. 4 основывалось на свойствах остатка от деления характеристического многочлена на корневой, которые можно установить в общем случае.

Предложение 2. Пусть коэффициенты характеристического многочлена $f_P(s)$ линейно зависят от параметров P регулятора, начиная с $a_{n-1}(P)$, а коэффициенты корневого многочлена $p(s)$ зависят от корневых координат χ . Тогда коэффициенты частного $q(s)$ и остатка $r(s)$ линейно зависят от параметров регулятора P и полиномиально — от координат χ .

Доказательство. Пусть, как и выше, $\deg f(s) = n$, $\deg p(s) = m \leq n$. Поскольку оба многочлена — характеристический и корневой — приведённые, то коэффициенты начального остатка

$$r_0(s) = f(s) - p(s)s^{n-m} = (a_{n-1}(P) - b_{m-1}(\chi))s^{n-1} + (a_{n-2}(P) - b_{m-2}(\chi))s^{n-2} + \dots$$

удовлетворяют нужному свойству.

Пусть k старших слагаемых частного $q(s)$ от деления $f(s) = p(s)q(s) + r(s)$ уже получены, т. е.

$$f(s) = p(s)q_{k-1}(s) + r_{k-1}(s),$$

где

$$q_{k-1}(s) = s^{n-m} + d_1(P, \chi)s^{n-m-1} + \dots + d_{k-1}(P, \chi)s^{n-m-k+1},$$

$$r_{k-1}(s) = h_{n-k}(P, \chi)s^{n-k} + \dots + h_1(P, \chi)s + h_0(P, \chi)$$

и все коэффициенты зависят от переменных P и χ нужным образом.

Если $n - k \geq m$, можно представить

$$r_{k-1}(s) = h_{n-k}(P, \chi)p(s)s^{n-m-k} + r_k(s).$$

Отсюда следующий коэффициент частного $d_k(P, \chi) = h_{n-k}(P, \chi)$ и можно записать

$$f(s) = p(s)q_k(s) + r_k(s),$$

где

$$q_k(s) = s^{n-m} + d_1(P, \chi)s^{n-m-1} + \dots + d_k(P, \chi)s^{n-m-k}.$$

Коэффициенты нового остатка

$$r_k(s) = r_{k-1}(s) - h_{n-k}(P, \chi)p(s)s^{n-m-k}$$

также линейно зависят от параметров P регулятора и полиномиально — от координат χ . Этот процесс заканчивается на степени $\deg r_k(s) = m - 1$, чем и устанавливается утверждение предложения.

Если конкретная критическая диаграмма реализуется, то характеристический многочлен делится на корневой нацело, т. е. остаток должен быть нулевым:

$$r_{n-m}(s) = h_{m-1}(P, \chi)s^{m-1} + \dots + h_1(P, \chi)s + h_0(P, \chi) = 0.$$

Приравнивая каждый из коэффициентов остатка к нулю, получим систему $m \geq k + 1$ алгебраических уравнений относительно корневых координат и параметров регулятора, причём k параметров регулятора входят в неё линейно:

$$h_l(P, \chi) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

Предложение 3. Если критическая корневая диаграмма реализуется, то соответствующий ей остаток задаёт совместную над полем \mathbf{R} систему уравнений $r_{n-m}(s) = 0$ относительно параметров P регулятора и корневых координат χ диаграммы.

Обратное неверно, поскольку представление $f(s) = p(s)q(s)$ не означает, что остальные характеристические корни (т. е. корни частного $q(s)$) оказываются левее корней многочлена $p(s)$.

Предложение 4. Равенство $r_{n-m}(s) = 0$ задаёт непустую систему уравнений.

Пустота такой системы равносильна тождествам $r_{n-m}(s) \equiv 0$ и $f_P(s) = q_{P, \chi}(s)p_\chi(s)$, выполненным при всех значениях переменных P, χ . Нетрудно видеть, что при независимости переменных P и χ последнее невозможно: выбрав какие-либо значения параметров P и переменной s , при которых $f_P(s) \neq 0$, можно положить $s = x_1$ или $s = x_1 + iy_2$, добиваясь тем самым равенства $p_\chi(s) = 0$.

Замечание. В нескольких примерах, рассмотренных в [4–7], уравнения $h_{0,1,\dots,m-1}(P, G) = 0$ оказывались независимыми.

Из k уравнений системы $h_l(P, G) = 0, l = 0, 1, \dots, m - 1$, можно, как в разд. 4, выразить параметры P через корневые координаты χ и подставить их выражения в оставшиеся $m - k > 0$ уравнений. В результате возникнет одно или несколько алгебраических соотношений для корневых координат: $R(\chi) = 0$. Если задаваемая ими в пространстве корневых координат область Θ_R непуста, то можно выделить в ней подобласть Θ_q , где корни $\{z_l\}$ частного $q_\chi(s)$ лежат левее «правой вертикали» $x = x(\chi)$ — α -градуировки корневого множества, выраженной через корневые координаты χ (иными словами, где выполняется неравенство $z_l \leq_\alpha x$ (если $q(s) \equiv \text{const}$, то $\Theta_R = \Theta_q$)). После этого в области Θ_q нетрудно найти минимальное значение R -градуировки и тем самым оптимальное значение корневых координат. Соответствующие параметры оптимального регулятора уже выражены через корневые координаты.

Заключение. Резюмируя вышеизложенное, можно считать, что реализуемая критическая корневая диаграмма позволяет обратить отображение $P \rightarrow \alpha$ вектора параметров регулятора в R -градуировку расположения полюсов, получая при этом зависимость $\alpha \rightarrow P$ и левую границу значений градуировочного множества. Такая граница соответствует оптимальному или субоптимальному регулятору. Само обращение выполняется алгебраическими средствами; привлечение вычислительных процедур ограничивается необходимым минимумом при анализе алгебраических систем уравнений и неравенств. Несовместность последних означает нереализуемость конкретной критической диаграммы для данного объекта и принятого вида передаточной функции регулятора.

Таким образом, для линейных одноканальных систем удаётся эффективно находить оптимальные регуляторы заданной структуры пониженного порядка. Если полученные показатели качества не вполне удовлетворительны, можно перейти к задаче большей размерности, обогатив структуру регулятора.

Автор выражает благодарность д-ру техн. наук. А. А. Воеводе за поддержку разработки этой темы и канд. физ.-мат. наук А. Н. Корюкину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kano M., Ogawa M.** The state of the art in chemical process control in Japan: Good practice and questionnaire survey // *Journ. Process Control*. 2010. **20**, Is. 9. P. 969–982.
2. **Henrion D., Arzelier D., Peaucelle D.** Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions // *Automatica*. 2003. **39**, Is. 8. P. 1479–1485.
3. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к их решению // *АиТ*. 2005. № 5. С. 7–46.
4. **Koryukin A. N., Chekhonadskikh A. V.** Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control // *Algebra and Model Theory*. Novosibirsk: NSTU, 2011. Is. 8. P. 19–39.
5. **Корюкин А. Н., Чехонадских А. В.** Предел устойчивости трёхмассовой системы с регулятором 3-го порядка. Ч. 1 // *Сб. науч. тр. НГТУ*. 2011. № 4(66). С. 3–22.
6. **Корюкин А. Н., Чехонадских А. В.** Предел устойчивости трёхмассовой системы с регулятором 3-го порядка. Ч. 2 // *Сб. науч. тр. НГТУ*. 2012. № 5(67). С. 37–56.
7. **Воевода А. А., Корюкин А. Н., Чехонадских А. В.** О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевёрнутого маятника // *Автометрия*. 2012. **48**, № 6. С. 69–83.
8. **Polyak B. T., Shcherbakov P. S.** Numerical search of stable or unstable element in matrix or polynomial families: A unified approach to robustness analysis and stabilization // *Robustness in Identification and Control*. London: Springer, 1999. Ser. Lect. Notes in Control and Inform. Sci. Vol. 245. P. 344–358.
9. **Burke J. V., Henrion D., Lewis A. S., Overton M. L.** Stabilization via nonsmooth, nonconvex optimization // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2006. **51**, N 11. P. 1760–1769.
10. **Шубладзе А. М.** Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. I // *АиТ*. 1997. № 3. С. 93–105.
11. **Шубладзе А. М.** Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. II // *АиТ*. 1997. № 8. С. 67–79.
12. **Шубладзе А. М., Попадько В. Е., Якушева А. А., Кузнецов С. И.** Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД-управлении. Ч. 1 // *Управление большими системами: Сб. тр. М.: ИПУ РАН*, 2008. Вып. 22. С. 86–100.
13. **Шубладзе А. М., Попадько В. Е., Якушева А. А. и др.** Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД-управлении. Ч. 2 // *Управление большими системами: Сб. тр. М.: ИПУ РАН*, 2008. Вып. 23. С. 39–55.
14. **Воевода А. А., Плехотников В. В., Чехонадских А. В.** О совмещённых декартовых координатах в пространстве корней многочленов с действительными коэффициентами // *Сб. науч. тр. НГТУ*. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. Вып. 1(23). С. 153–156.
15. **Чехонадских А. В.** Метрика, градуировка и оптимизация расположения характеристических корней системы автоматического управления // *Науч. вестн. НГТУ*. 2009. № 1(34). С. 165–182.

16. **Воевода А. А., Чехонадских А. В.** Оптимизация расположения полюсов системы автоматического управления с регулятором пониженного порядка // *Автометрия*. 2009. **45**, № 5. С. 113–123.
17. **Чехонадских А. В.** О ступенчато-дифференциальной оптимизации корней характеристического многочлена САУ // *Науч. вестн. НГТУ*. 2008. № 4(33). С. 205–208.
18. **Воевода А. А., Чехонадских А. В.** Преодоление недифференцируемости при оптимизационном синтезе систем автоматического управления // *Автометрия*. 2010. **46**, № 5. С. 11–17.
19. **Воевода А. А., Чехонадских А. В., Шоба Е. В.** Модальный метод синтеза с использованием полиномиального разложения: разделение движений для стабилизации трехмассовой системы // *Науч. вестн. НГТУ*. 2011. № 2(43). С. 39–46.
20. **Чехонадских А. В.** Алгебраический метод синтеза алгоритмов автоматического управления пониженного порядка: Автореф. дис. . . . д-ра техн. наук. Новосибирск: НГТУ, 2013. 39 с.

Поступила в редакцию 21 апреля 2014 г.
