

УДК 519.642

ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЯ КАВАЛЬЕРИ В ЗАДАЧЕ ROI-ТОМОГРАФИИ

А. В. Лихачев

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: ipm1@iae.nsk.su*

Разработан новый метод решения задачи ROI-томографии, основанный на условии Кавальери для преобразования Радона. Исходя из этого условия строится система линейных алгебраических уравнений для оценки неизвестных значений проекционных данных. Вычислительный эксперимент показал, что применение предлагаемого метода позволяет значительно повысить точность реконструкции, ослабить артефакты, а также получить оценку внутренней структуры объекта в области вне ROI.

Ключевые слова: ROI-томография, условие Кавальери, пополнение проекционных данных.

Введение. В настоящее время томографические методы широко применяются как средство диагностики объектов различной физической природы. Среди большого разнообразия задач, решаемых посредством томографии, часто встречаются такие, в которых предметом исследования является некоторая, возможно небольшая, часть внутренней структуры. Например, в кардиологии — это сердце и соединённые с ним сосуды, окружающие же ткани, как правило, интереса не представляют. В таких случаях говорят о ROI-томографии (Region of Interest) [1–6].

В приложениях обычно принимается модель лучевой томографии, которая приводит к тому, что получение изображения внутренности объекта с математической точки зрения сводится к вычислению функции по интегралам от неё вдоль прямых [7, 8]. В предлагаемой работе рассматривается двумерная задача, т. е. восстанавливается функция двух переменных (далее она обозначается как $g(x, y)$).

Набор интегралов, называемый проекционными данными и используемый для получения функции $g(x, y)$, зависит от конструкции томографа. Существуют две основные схемы измерений: параллельная и веерная [7]. Для первой разработаны эффективные и относительно простые алгоритмы реконструкции, для второй они значительно сложнее. Тем не менее веерные томографы распространены шире, поскольку обеспечивают существенно более высокую скорость регистрации. В связи с этим на практике часто осуществляется процедура пересортировки веерных данных в параллельные [7].

В интегральной геометрии известно двумерное преобразование Радона, являющееся основой для многих алгоритмов лучевой томографии [7, 8]. Пусть $f(p, \varphi)$ — значение интеграла от функции $g(x, y)$ вдоль прямой, проходящей на расстоянии p от начала координат, угол между вектором нормали к которой и положительным направлением оси X равен φ . Согласно [8] формула обращения преобразования Радона может быть записана следующим образом:

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |\omega| \tilde{f}(\omega, \varphi) \exp(i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)) d\omega d\varphi. \quad (1)$$

Здесь символ « \sim » означает преобразование Фурье по первой переменной. Видно, что для применения формулы (1) наиболее удобным является представление исходных данных в

виде набора функций одной переменной, каждая из которых объединяет измерения, зарегистрированные под определённым углом по отношению к объекту. Далее она будет называться проекцией и обозначаться как $f_\varphi(p)$. Именно такую группировку обеспечивает параллельная схема сканирования.

В настоящее время известно большое число алгоритмов, реализующих выражение (1). Они отличаются друг от друга способом аппроксимации фильтра высоких частот с передаточной функцией $|\omega|$ (гамм-фильтра). Связанные с этим вопросы рассмотрены в [7–13]. Обозначим через $f_\varphi^F(p)$ функцию, полученную в результате гамм-фильтрации проекции $f_\varphi(p)$. Из (1) следует, что для вычисления $f_\varphi^F(p)$ хотя бы в одной точке требуются все значения $f_\varphi(p)$. Отсюда видны трудности, возникающие в задаче ROI-томографии при использовании методов реконструкции, основанных на обращении преобразования Радона. Чтобы восстановить структуру внутри области интереса независимо от её размеров, нужно иметь проекции от всего объекта. Очевидно, что это является нерациональным. В частности, если речь идёт о медицинской рентгеновской томографии, то в процессе диагностики отдельного органа пациент дополнительно подвергается вредному воздействию проникающего излучения, информация от которого не используется. С другой стороны, на практике нередко возникают ситуации, когда невозможно зарегистрировать полные проекции, например при поиске внутренних дефектов (трещин, каверн) в инженерных конструкциях, находящихся в эксплуатации.

Один из подходов к решению задачи ROI-томографии состоит в следующем. Регистрируются только те участки проекций, которые содержат информацию об области интереса. Далее они обрабатываются вместо гамм-фильтра каким-либо фильтром высоких частот, имеющим локальные свойства. Оценка функции $g(x, y)$ в области интереса получается путём интегрирования по углу φ в соответствии с формулой (1). В [14] для локальной фильтрации предложен оператор Лапласа. Позднее было показано, что при его использовании точно восстанавливаются места разрывов функции $g(x, y)$, хотя сами её значения оказываются неверными [15, 16]. ROI-томография для более сложной модели регистрации данных рассматривалась в [17].

В представленной работе предлагается другой метод оценки параметров объекта внутри области интереса, который основывается на свойстве преобразования Радона, известном как условие Кавальери. Ранее оно применялось в томографии с ограниченным диапазоном угла сканирования [18, 19]. Сущность метода состоит в экстраполяции известных данных на те области проекций, где они неизвестны. Следует отметить, что подобная идея — восстановление проекционных данных с привлечением априорной информации — использовалась в [20], однако условие Кавальери там не рассматривалось.

Теория. Объекты, исследуемые посредством томографических методов, имеют конечные размеры, поэтому, не уменьшая общности, можно полагать, что функция $g(x, y)$ имеет компактный носитель, заключённый в единичном круге. При этом каждая проекция определена на интервале $[-1; 1]$. Пусть областью интереса является круг радиуса $r_0 < 1$ с центром в начале координат. Во всех направлениях он проецируется на отрезок $[-r_0; r_0]$. Предположим, что регистрация данных производится только в этой области, т. е. функция $f(p, \varphi)$ известна лишь при $|p| \leq r_0$. Проекции, соответствующие такой неполной регистрации, далее будут называться усечёнными.

Обозначим через $M_k(\varphi)$ момент k -го порядка от проекции, зарегистрированной под углом φ :

$$M_k(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p, \varphi) p^k dp. \quad (2)$$

Согласно условию Кавальери [21, 22] все $M_k(\varphi)$ являются однородными многочленами степени k от компонент единичного вектора $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$:

$$M_k(\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\varphi) \cdot \sin^{k-l}(\varphi), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

причём коэффициенты a_{lk} не зависят от угла φ . В частности, из (3) видно, что нулевые моменты всех проекций (т. е. их интегралы) одинаковы.

Условие Кавальери предоставляет возможность восстанавливать недостающие проекционные данные. Так, в работе [19], посвящённой томографии с ограниченным диапазоном углов, соотношение (3) использовалось для оценки проекций в тех направлениях, где они отсутствуют. Таким образом, производилась экстраполяция функции $f(p, \varphi)$ по угловой переменной. Здесь этот же подход предлагается для пополнения данных по радиальной переменной. Затем решение рассматриваемой задачи может быть проведено одним из алгоритмов, реализующих формулу (1).

Пусть объект сканируется в N направлениях. На каждой проекции задано I отсчётов с равномерным шагом $h = 2/(I - 1)$. При этом на отрезок $[-r_0; r_0]$ приходится I_0 отсчётов. Аппроксимируем интеграл (2) конечной суммой, которую запишем следующим образом:

$$M_k(\varphi_n) \approx \sum_{i=1}^{(I-I_0)/2} ((i-1)h-1)^k \chi_{i,n} + \\ + \sum_{i=(I-I_0)/2+1}^{(I+I_0)/2} ((i-1)h-1)^k f_{i,n} + \sum_{i=(I+I_0)/2+1}^I ((i-1)h-1)^k \chi_{i,n}. \quad (4)$$

Здесь $f_{i,n} \equiv f(((i-1)h-1), \varphi_n)$; $\chi_{i,n} \equiv \chi(((i-1)h-1), \varphi_n)$; через $\chi_{i,n}$ обозначены неизвестные значения проекционных данных в точках вне интервала $[-r_0; r_0]$; индекс n нумерует ракурсы наблюдения. В формуле (4) предполагается, что I и I_0 — нечётные числа.

Подставим в (4) выражение для момента из (3). Поместив в левую часть полученного уравнения члены, содержащие неизвестные величины, имеем

$$\sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\varphi_n) \cdot \sin^{k-l}(\varphi_n) - \sum_{i=1}^{(I-I_0)/2} ((i-1)h-1)^k \chi_{i,n} - \\ - \sum_{i=(I+I_0)/2+1}^I ((i-1)h-1)^k \chi_{i,n} = \sum_{i=(I-I_0)/2+1}^{i=(I+I_0)/2} ((i-1)h-1)^k f_{i,n}. \quad (5)$$

В (5) индекс n меняется от 1 до N , а k — от 0 до K , где K — максимальный порядок учитываемых моментов.

Будем рассматривать выражение (5) как систему линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются значения $\chi_{i,n}$ (всего их $(I - I_0)N$) и коэффициенты полиномов a_{lk} . Учитывая, что однородный полином от двух переменных степени k имеет $k + 1$ коэффициентов, получаем количество a_{lk} равное $\sum_{k=1}^{K+1} k = (K + 2)(K + 1)/2$. Таким

образом, система (5) содержит $(I - I_0)N + (K + 2)(K + 1)/2$ неизвестных и, как это нетрудно видеть, $(K + 1)N$ уравнений.

В типичных задачах томографической реконструкции число ракурсов наблюдения N составляет сотни. Современные методы оцифровки проекций позволяют иметь значения I порядка тысячи и более. Поэтому, если r_0 в несколько раз меньше размера объекта, то произведение $(I - I_0)N$ может достигать миллионов. С другой стороны, вычисление моментов высоких порядков является некорректно поставленной задачей. Это накладывает ограничение на значение верхней границы K . Результаты работы [19] показали, что использование моментов выше двадцатого порядка нецелесообразно.

Из вышеизложенного вытекает, что уравнений в системе (5) много меньше, чем неизвестных. Кроме того, легко заметить, что матрица системы является сильно разреженной, т. е. большинство её элементов равно нулю. Для решения подобного рода задач в томографии применяется итерационный алгоритм ART (Algebraic Reconstruction Technique) [7]. В работах [7, 19, 23] было показано, что точность оценки, получаемой посредством ART, может быть повышена путём привлечения имеющихся сведений (называемых априорной информацией) об объекте исследования. В [23] рассматривалась следующая алгоритмическая схема:

$$\mathbf{z}^{(m)} = \Phi^{(m)} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{z}^{(m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Здесь \mathbf{A}^{-1} — оператор, соответствующий итерации алгоритма ART, который представляется в виде $\mathbf{z}^{(m)} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{z}^{(m-1)}$; через $\Phi^{(m)}$ обозначена совокупность операторов априорной информации; верхний индекс указывает на то, что они могут меняться в зависимости от номера итерации.

В предлагаемой работе для построения $\Phi^{(m)}$ использовались общие свойства проекционных данных. Во-первых, в приложениях рентгеновской томографии они должны быть неотрицательными. Поэтому в $\Phi^{(m)}$ была включена процедура зануления отрицательных значений. Во-вторых, учитывался тот факт, что одномерные проекции даже разрывных объектов, как правило, являются гладкими. В связи с этим, после того как оценки проекций на отрезках $[-1; -r_0[$ и $]r_0; 1]$ присоединялись к данным, известным на промежутке $[-r_0; r_0]$, производилось сглаживание полученной таким образом функции скользящим средним.

Обсуждение результатов вычислительного эксперимента. Описанный выше метод решения задачи ROI-томографии исследовался путём вычислительного эксперимента. Математический фантом изображён на рис. 1, *a*. Области интереса при $r_0 = 0,5$ и

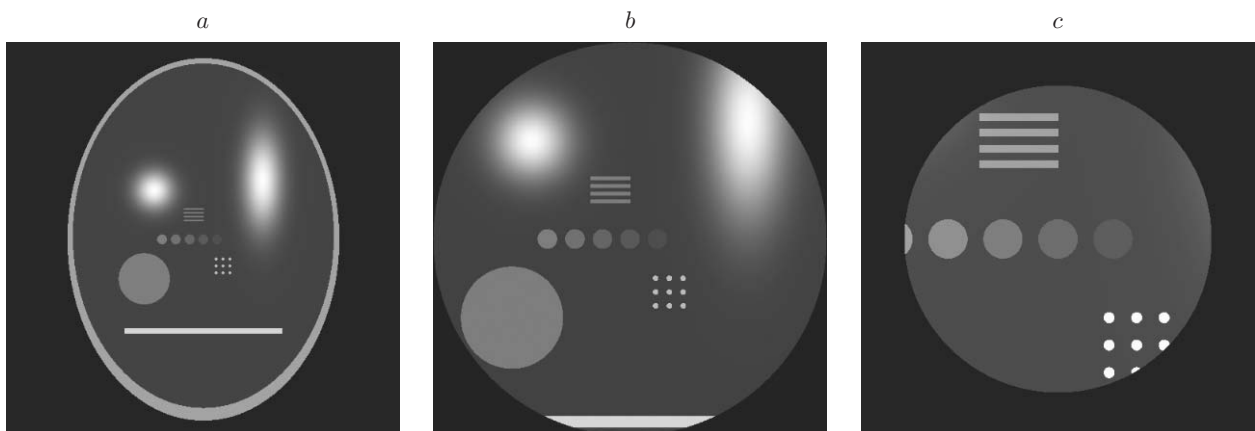


Рис. 1

$r_0 = 0,244$ приведены на рис. 1, b и c . Ракурсы наблюдения равномерно распределялись по углу в интервале $0-2\pi$. Одномерные проекции были дискретизованы с шагом $h = 2/1024$. Числа I и I_0 равнялись соответственно 1025 и $r_0/h + 1$. При этом значения r_0 выбирались такими, чтобы отношение r_0/h было целым. Томограммы вычислялись на квадратной сетке с тем же шагом h . Для реконструкции применялся алгоритм Шеппа — Логана [9].

В расчётах варьировались максимальное количество моментов K , радиус области интереса r_0 , число проекций N , значение параметра σ , определяющего уровень шума (см. далее). Для контроля точности использовались нормированные среднеквадратичные ошибки восстановления отсутствующих участков проекций Δ_p и реконструкции искомой функции внутри области интереса Δ_{ROI} :

$$\Delta_p = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \left(\sum_{\substack{1 \leq i < (I-I_0)/2 \\ (I+I_0)/2 < i \leq I_0}} (f_{i,n} - \hat{\chi}_{i,n})^2 \right)}{\sum_{n=1}^N \left(\sum_{\substack{1 \leq i < (I-I_0)/2 \\ (I+I_0)/2 < i \leq I_0}} (f_{i,n})^2 \right)}}, \quad (7)$$

$$\Delta_{ROI} = \sqrt{\frac{\sum_{x_{j_1}^2 + y_{j_2}^2 \leq r_0^2} (g(x_{j_1}, y_{j_2}) - \hat{g}(x_{j_1}, y_{j_2}))^2}{\sum_{x_{j_1}^2 + y_{j_2}^2 \leq r_0^2} (g(x_{j_1}, y_{j_2}))^2}}.$$

В (7) через $\hat{\chi}$ и \hat{g} обозначены оценки неизвестных проекционных данных и искомой функции, а через f и g — их истинные значения.

Работа [19], посвящённая исследованию алгоритмов томографии с ограниченным углом сканирования, основанных на условии Кавальери, показала, что выбор количества используемых моментов существенно влияет на точность и время реконструкции. В предлагаемой работе изучению этого вопроса также уделено большое внимание. Проведённые расчёты выявили, что зависимости ошибки восстановления проекционных данных от K для различных размеров области интереса и чисел ракурсов наблюдения носят одинаковый характер. Одна из них при $r_0 = 0,5$ и $N = 210$ показана на рис. 2 (кривая 1). Заметное уменьшение Δ_p (приблизительно в 1,25 раза) происходит, когда K увеличивается от 0 до 8–10, а после того как K достигает 16, начинается её слабый рост. Вероятно, это связано с ухудшением свойств матрицы системы (5). Ошибка Δ_{ROI} ведёт себя примерно таким же образом, как и Δ_p (см. рис. 2, кривая 2).

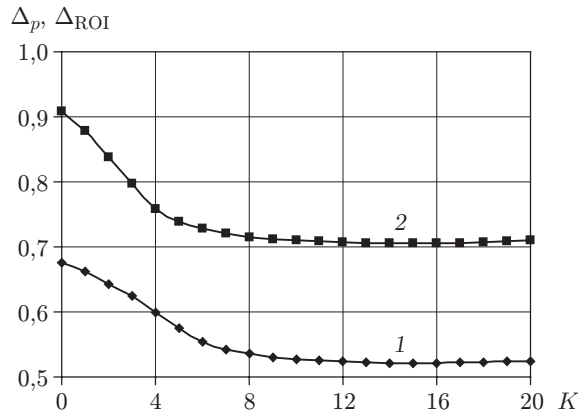


Рис. 2

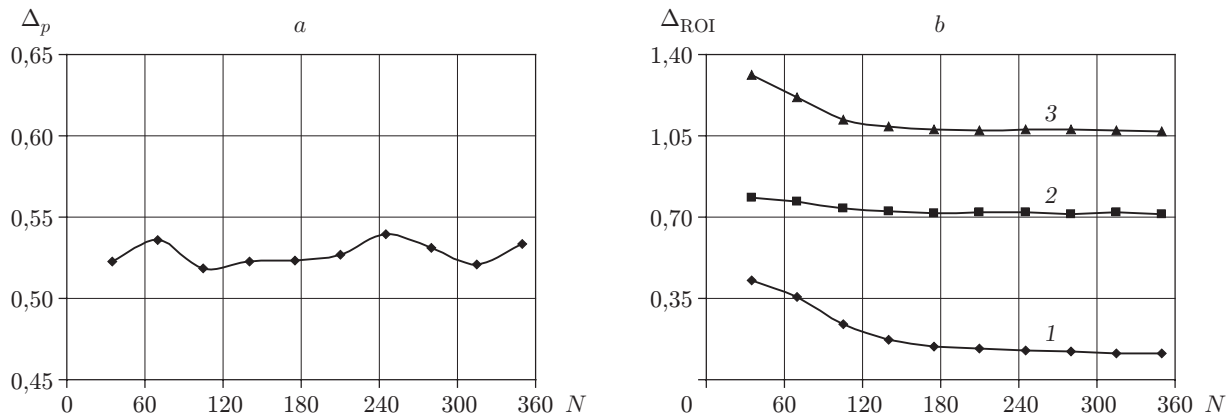


Рис. 3

На рис. 3 приведены зависимости ошибок от количества проекций N для $r_0 = 0,5$. По рис. 3, *a*, на котором представлена $\Delta_p(N)$, можно заключить, что точность восстановления проекций не увеличивается с ростом числа направлений сканирования. Наблюдаемые небольшие колебания $\Delta_p(N)$ носят, по-видимому, случайный характер. Ошибки Δ_{ROI} даны на рис. 3, *b*. Кривая 1 соответствует реконструкции по полным проекциям, кривая 2 — по восстановленным, кривая 3 — по усечённым. Сопоставляя кривые 2 и 3, получаем, что для рассматриваемой величины r_0 применение предлагаемого метода позволяет уменьшить ошибку Δ_{ROI} на 20–30 %.

Результаты исследования влияния радиуса области интереса на точность метода при $N = 210$ показаны на рис. 4. Так же как и для предыдущего рисунка, Δ_p приведена на рис. 4, *a*, а Δ_{ROI} — на рис. 4, *b* (нумерация кривых имеет на нём тот же смысл, что и на рис. 3, *b*). Привлекает внимание рост ошибки Δ_p с увеличением r_0 . Это, казалось бы, противоречит интуитивному пониманию задачи. Объяснение состоит в следующем. Чем больше становится r_0 , тем меньшая часть каждой проекции остаётся неизвестной. Форма фантома такова (см. рис. 1, *a*), что при значениях аргумента, близких к ± 1 , все проекции равны нулю. По этим причинам знаменатель в первой из формул (7) уменьшается быстрее, чем числитель, что приводит к увеличению значения дроби. Ошибка же реконструкции Δ_{ROI} , как и следовало ожидать, падает при использовании как усечённых, так и восстановленных проекций. При этом эффект от применения метода тем существеннее, чем меньше r_0 . Так, для r_0 , принадлежащих интервалу $[0,24; 0,35]$ (28–38 % от размера исследуемого объекта), Δ_{ROI} оказалась меньше в 2–2,9 раза.

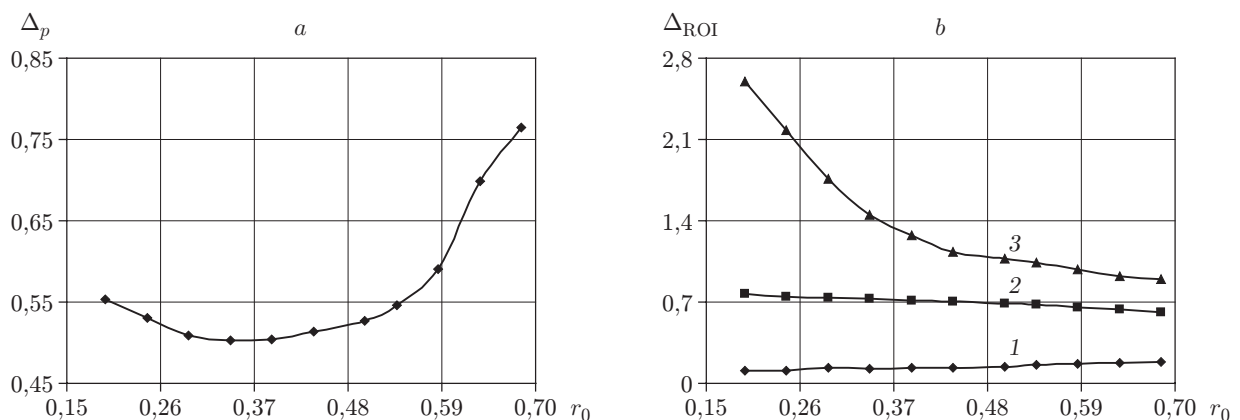


Рис. 4

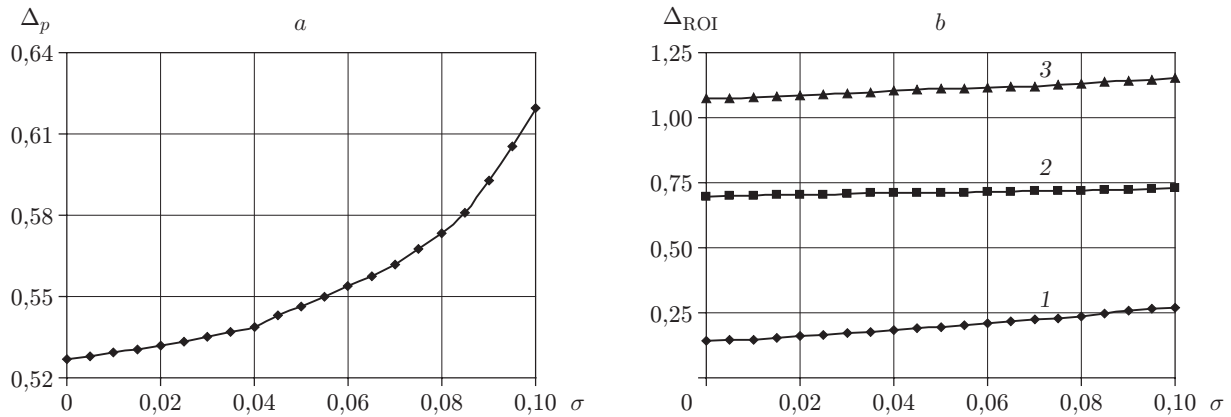


Рис. 5

В процессе вычислительного эксперимента также изучалась устойчивость метода. Моделировался некоррелированный шум. В точке проекции, имеющей координату p , он представлял собой нормально распределённую случайную величину с нулевым средним и дисперсией $D(p) = \sigma^2 f^2(p)$. На рис. 5 представлены зависимости $\Delta_p(\sigma)$ (рис. 5, *a*) и $\Delta_{ROI}(\sigma)$ (рис. 5, *b*). Все проекции (полные, усечённые, восстановленные) сглаживались регуляризирующими сплайнами [24]. Из сравнения рис. 5, *a* и *b* видно, что восстановление проекций является менее устойчивым, чем реконструкция искомой функции в области интереса. Действительно, при увеличении параметра σ от 0 до 0,1 ошибка Δ_p возрастает приблизительно на 18 %, в то время как рост Δ_{ROI} для восстановленных проекций (см. рис. 5, *b*, кривая 2) составляет всего 6 %, т. е. втрое меньше. В целом по рис. 5 можно сделать вывод, что при использовании соответствующих процедур регуляризации решение рассматриваемой задачи предлагаемым методом оказывается достаточно устойчивым по отношению к случайному шуму.

На рис. 6, 7 приведены томограммы области интереса. Радиус r_0 для рис. 6 составляет 0,244, а для рис. 7 — 0,5. Число ракурсов наблюдения $N = 210$. Томограммы, изображённые на рис. 6, *a* и 7, *a*, получены по усечённым проекциям: $\Delta_{ROI} = 2,180$ и $\Delta_{ROI} = 1,073$, а на рис. 6, *b* и 7, *b* — по восстановленным: $\Delta_{ROI} = 0,747$, $\Delta_{ROI} = 0,688$. Кроме того, на рис. 7, *c* для сравнения представлен результат для полных проекций, $\Delta_{ROI} = 0,144$. На рис. 6, *a* и 7, *a* на границе изображения видно кольцо, имеющее высокую амплитуду.

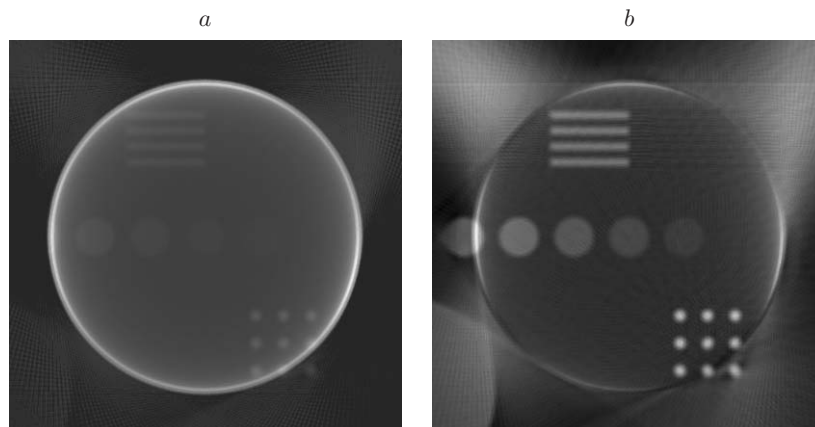


Рис. 6

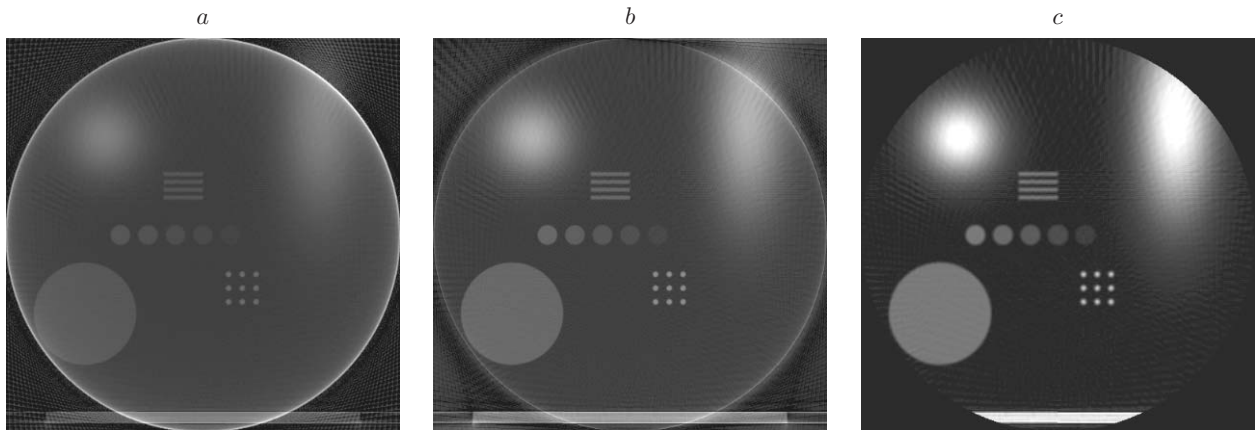


Рис. 7

Это связано с тем, что после высокочастотной фильтрации (см. формулу (1)) на концах усечённых проекций, где имеется разрыв, образуются пики высокой интенсивности. На восстановленных проекциях таких разрывов нет, поскольку в итерационном процессе (6) производится их сглаживание. Отметим также, что на рис. 6, *b* хорошо различаются структуры, расположенные вне круга радиуса 0,244. Это свидетельствует о том, что предлагаемый метод можно использовать для оценки распределения параметров, характеризующих объект, в области более широкой, чем ROI.

Заключение. Проведённые исследования показали, что условие Кавальери может применяться для решения задачи ROI-томографии. На его основе разработан метод восстановления неизвестных проекционных данных. В результате вычислительного эксперимента получено существенное уменьшение среднеквадратичной ошибки, которое составило от 1,3 до 2,9 раза в зависимости от размера области интереса, причём кольцевой артефакт, характерный для реконструкции по усечённым проекциям, был в значительной степени подавлен. Кроме того, визуализирована внутренняя структура исследуемого объекта за пределами ROI. Следует отметить, что она в отличие от области интереса не проецируется полностью во всех направлениях. Оказалось, что для данных, содержащих случайный шум, в случае применения регуляризующих сплайнов ошибка восстановления проекций возрастает примерно на 18 % при росте корня из дисперсии шума от нуля до одной десятой от значения проекции. Это свидетельствует о достаточной устойчивости предлагаемого метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sahine B., Yagle A. E.** Region-of-interest tomography using exponential radial sampling // IEEE Trans. Image Process. 1995. **4**, N 8. P. 1120–1127.
2. **Sourbelle K., Lauritsch G., Tam K. C. et al.** Performance evaluation of local ROI algorithms for exact ROI reconstruction in spiral cone-beam computed tomography // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2001. **48**, N 3, Pt. II. P. 697–702.
3. **Lauritsch G., Sourbelle K., Tam K. C.** Optimization of derivative kernels for exact cone-beam ROI reconstruction in spiral computed tomography // IEEE Trans. Nucl. Sci. 2002. **49**, N 3, Pt. 1. P. 728–732.
4. **Das P. C., Sastry Ch. S.** Region-of-interest tomography using a composite Fourier-wavelet algorithm // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2002. **23**, N 7–8. P. 757–777.

5. **Zeng G. L., Gagnon D., Natterer F. et al.** Local tomography property of residual minimization reconstruction with planar integral data // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 2003. **50**, N 5. P. 1590–1594.
6. **Лихачев А. В.** ROI-томография по данным, содержащим шум с переменной дисперсией // *Вычислительные технологии.* 2014. **19**, № 2. С. 62–75.
7. **Хермен Г. Т.** Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 349 с.
8. **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 288 с.
9. **Shepp L. A., Logan B. F.** The Fourier reconstruction of a head section // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1974. **21**, N 3. P. 21–43.
10. **Луитт Р. М.** Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований // *ТИИЭР.* 1983. **71**, № 3. С. 125–147.
11. **Лаврентьев М. М., Зеркаль С. М., Трофимов О. Е.** Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999. 172 с.
12. **Лихачев А. В.** Исследование $1/z^2$ -фильтрации в алгоритмах томографии // *Автометрия.* 2007. **43**, № 3. С. 57–64.
13. **Лихачев А. В.** Статистический метод подавления артефактов томографической реконструкции // *Автометрия.* 2014. **50**, № 2. С. 57–66.
14. **Вайнберг Э. И., Казак И. А., Курозаев В. П.** Реконструкция внутренней пространственной структуры объектов по интегральным проекциям в реальном масштабе времени // *ДАН СССР.* 1981. **257**, № 1. С. 89–94.
15. **Kuchment P., Lancaster K., Mogilevskaia L.** On local tomography // *Inverse Problems.* 1995. **11**, N 3. P. 571–589.
16. **Katsevich A. I., Ramm A. G.** New methods for finding values of the jumps of a function from its local tomographic data // *Inverse Problems.* 1995. **11**, N 5. P. 1005–1023.
17. **Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров Н. В.** Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000. 224 с.
18. **Prince J. L., Willsky A. S.** Constrained sinogram restoration for limited-angle tomography // *Opt. Eng.* 1990. **29**, N 5. P. 535–544.
19. **Важенцева Н. В., Лихачев А. В.** Сравнение алгоритмов томографии, использующих условие Кавальери, в задачах с ограниченным углом обзора объекта // *Автометрия.* 2012. **48**, № 6. С. 35–45.
20. **Пикалов В. В., Мельникова Т. С.** Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995. 229 с.
21. **Хелгасон С.** Преобразование Радона: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 152 с.
22. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000. 208 с.
23. **Лихачев А. В., Пикалов В. В.** Частотная фильтрация в алгебраических алгоритмах трёхмерной томографии // *Автометрия.* 1995. № 4. С. 83–89.
24. **Василенко В. А.** Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983. 214 с.

Поступила в редакцию 27 ноября 2014 г.