

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.39.1 : 519.27 : 535.8 : 551.590.3

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ ЛАЗЕРНЫХ ДОПЛЕРОВСКИХ СИСТЕМ (ОБЗОР)

В. С. Соболев, С. А. Тимохин

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: sobolev@iae.nsk.su*

Дан обзор современного состояния методов получения максимально правдоподобных оценок параметров сигналов доплеровских лидаров и лазерных доплеровских анемометров.

Ключевые слова: оптимальный приём сигналов, максимально правдоподобные оценки, лазерное зондирование атмосферы, лазерная доплеровская анемометрия, границы Рао — Крамера.

Введение. Метеорологические лидары и лазерные доплеровские анемометры (ЛДА) являются незаменимыми инструментами, позволяющими дистанционно, локально и без возмущений оценивать скорости движения воздушных масс в атмосфере и скорости потоков газов и жидкостей в экспериментальной гидроаэродинамике. Вместе с тем точностные характеристики этих устройств, особенно в многочастичном режиме работы, оставляют желать лучшего. В последние десятилетия для устранения этого недостатка разрабатываются изощрённые методы обработки получаемых сигналов, основанные на критерии максимального правдоподобия. С учётом актуальности данного направления представляет интерес обзор соответствующих публикаций.

Действие доплеровских систем базируется на рассеянии света малыми частицами, присутствующими в исследуемой среде. Вследствие эффекта Доплера движение этих частиц вызывает смещение частоты рассеянного света на величину, пропорциональную скорости потока. Принцип действия ветровых доплеровских лидаров чаще всего основан на направлении импульсного или непрерывного лазерного излучения в исследуемую область атмосферы, когерентном фотоэлектрическом преобразовании рассеянного излучения и формировании электрического сигнала, частота которого определяется доплеровским частотным смещением $f_D = 2V/\lambda$, где λ — длина волны лазера, V — составляющая вектора скорости ветра, ориентированная вдоль оси зондирующего лазерного пучка. В большинстве применений ЛДА и ветровых лидаров доплеровский сигнал формируется из световых волн, рассеянных множеством частиц, находящихся в объёме наблюдения. В силу случайного распределения частиц в пространстве и по размерам амплитуда и фаза сигнала в каждый момент времени являются случайными величинами, а сам сигнал в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей представляет собой нормальный узкополосный случайный процесс, совместная плотность вероятности которого является известной функцией значений этого процесса и, следовательно, его параметров.

При малой концентрации рассеивающих частиц реализуется так называемый одночастичный режим работы ЛДА. Сигнал при этом сопровождается неизбежным дробовым шумом, хорошо аппроксимирующимся нормальным некоррелированным широкополосным случайным процессом. Его совместная плотность вероятности также известна. Рассматривая её для обоих случаев как функцию правдоподобия параметров, можно сформировать

максимально правдоподобные оценки (МПО) параметров, в частности наиболее интересного из них — доплеровской частоты. Эти оценки обладают наивысшей точностью [1–4].

К настоящему времени накоплен обширный материал по методам обработки сигналов лазерных доплеровских систем. Наибольший интерес, конечно, представляют работы, позволяющие получить наивысшую точность измерений по реализациям сигнала наименьшей длительности. Это необходимо для того, чтобы не сгладить возможные быстрые изменения скорости.

Отметим, что под термином «доплеровский сигнал» далее будем понимать выходной сигнал фотодетектора, пропорциональный интенсивности оптических полей, приходящих на его вход.

Данная работа представляет собой обзор современного состояния методов и алгоритмов обработки сигналов ветровых лидаров и лазерных доплеровских анемометров по критерию максимального правдоподобия [5–30].

Максимально правдоподобные оценки доплеровской частоты (скорости ветра) сигналов ветровых лидаров. В [5–7] проблема получения МПО исследуется и решается в следующей постановке: априорно известными считаются форма спектра доплеровского сигнала (или его корреляционной функции), мощность сигнала и отношение сигнал/шум. Неизвестными являются доплеровская частота и ширина спектра. Для получения максимально правдоподобных оценок в качестве исходных данных принимается вектор \mathbf{z} комплексных отсчётов z_k доплеровского сигнала, взятых через интервал дискретизации T и содержащих сигнальную часть $s_k \exp(j\omega kT)$ и белый нормальный шум n_k :

$$z_k = s_k \exp(j\omega kT) + n_k, \quad (1)$$

где s_k — комплексная амплитуда; $k = 0, 1, \dots, M - 1$ — номер отсчёта (M — общее число отсчётов); ω — круговая доплеровская частота. Статистические характеристики шума определяются как $E[n_k n_j] = 0$, $E[n_k n_j^*] = N_1 \delta_{k-j}$, где $N_1 = E[|n|^2] = N_0/2T$ — дисперсия шума на один отсчёт сигнала, N_0 — известная односторонняя спектральная плотность шума, δ — символ Кронекера, $E[\cdot]$ — среднее по множеству.

Если принять, что положение рассеивающих частиц в пространстве подчиняется распределению Пуассона, а огибающая сигнала от одной рассеивающей частицы имеет гауссову форму, то нормированная на дисперсию корреляционная функция сигнала (1) в соответствии с теоремой Кэмпбела представляется в виде

$$R(kT) = \exp\{-(k\nu T)^2\} \cdot \exp(j\omega kT) + \delta_k N, \quad (2)$$

где ν — величина, обратная полуширине энергетического спектра доплеровского сигнала; N — отношение шум/сигнал по мощности. Поскольку корреляционная функция (2) является произведением двух членов, один из которых — действительная величина, а второй — комплексная, корреляционная матрица сигнала может иметь вид

$$R = \mathbf{D}(\mathbf{C} + \mathbf{N}\mathbf{I})\mathbf{D}^*, \quad (3)$$

где \mathbf{D} — диагональная матрица с элементами $d_{kk} = \exp(j\omega kT)$; \mathbf{C} — корреляционная матрица вектора \mathbf{s} с вещественными элементами, как следует из выражения (2); \mathbf{I} — единичная матрица. Тогда, исходя из выражения (3), логарифм функции правдоподобия доплеровской частоты принимает вид

$$\ln p(z/\omega) = -z^{T*} \mathbf{D}(\mathbf{C} + \mathbf{N}\mathbf{I})^{-1} \mathbf{D}^* z - \ln(\det R) + \text{const}. \quad (4)$$

Так как $\mathbf{C} + N\mathbf{I}$ — вещественная корреляционная матрица, её обратная матрица — теплицева с элементами λ_{ik} . С учётом этого выражение (4) преобразуется в квадратичную форму:

$$\ln p(z, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}/\omega) = - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} z_i^* \lambda_{i-k} z_k \exp[j\omega(i-k)T] + \ln(\det R^{-1}). \quad (5)$$

Приравняв частные производные (5) по λ_{i-k} и ω к нулю, можно получить систему уравнений правдоподобия и, решив её, найти совместные максимально правдоподобные оценки значений ω и λ_{i-k} . Зная λ_{i-k} , легко определить неизвестную ширину спектра.

В общем случае такая операция затруднительна, поскольку требует решить большое количество совместных нелинейных уравнений. Мало того, решения в замкнутой форме могут быть получены лишь в некоторых частных случаях, например когда ширина спектра сигнала и отношение сигнал/шум известны [8]. При этом элементы матрицы $(\mathbf{C} + N\mathbf{I})$ и элементы λ_{i-k} обратной матрицы легко вычисляются, поскольку являются функциями только ширины спектра. Теперь, исходя из выражения для логарифма функции правдоподобия (5), МПО доплеровской частоты можно найти следующим образом:

$$\omega_{\text{МПО}} = \arg \min T^{-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} z_i^* \lambda_{i+k} z_k \exp[j\omega(i-k)T]. \quad (6)$$

Отметим, что выражение (6) не определяет оценку ω в явном виде, но путём замены переменных оно может быть преобразовано как

$$\omega_{\text{МПО}} = \arg \min T^{-1} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{M-1} r_m \exp(-j\omega kT) \right], \quad (7)$$

где $r_m = \sum_{i=0}^{M-m-1} z_i^* \lambda_{i+m} z_{i+m}$. Из (7) ясно, что оценку доплеровской частоты можно также вычислить с помощью стандартной программы быстрого преобразования Фурье (БПФ) для значений r_m .

Несколько другой подход к получению МПО доплеровской частоты представлен в [9]. В предположении известной ширины спектра доплеровского сигнала и отношения сигнал/шум выведено уравнение правдоподобия и найдено его решение при произвольном числе отсчётов

$$\omega_{\text{МПО}} = T^{-1} \arg \left\{ \sum_{k=1}^{M-1} C_k R(kT) \exp[-j\omega(k-1)T] \right\}. \quad (8)$$

Здесь коэффициенты C_k также определяются элементами матрицы, обратной $(\mathbf{C} + N\mathbf{I})$, а $R(kT)$ — коэффициенты корреляции при всех задержках для заданного числа отсчётов M . Поскольку решения (7) и (8) получены в неявном виде, в [9] предложены итерационные процедуры вычисления оценок. Нижняя граница Рао — Крамера (ГРК), характеризующая минимальную погрешность измерения частоты, определяется следующим образом:

$$\text{ГРК} \geq \frac{-1}{T^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} (i-j)^2 \lambda_{ij} \rho_{ij}},$$

где ρ_{ij} и λ_{ij} — коэффициенты прямой $(\mathbf{C} + N\mathbf{I})$ и обратной $(\mathbf{C} + N\mathbf{I})^{-1}$ матриц соответственно.

Максимально правдоподобные оценки частоты сигналов лазерных доплеровских анемометров, работающих в многочастичном режиме. Вышеуказанные пути получения МПО доплеровской частоты могут (с определённой модификацией) применяться и для оптимальных оценок частоты сигналов лазерных доплеровских анемометров, работающих в многочастичном режиме рассеяния. Отличия алгоритмов обработки связаны с тем, что характеристики сигналов этих устройств существенно различаются. Поскольку у лидаров диаметр зондирующего луча достаточно велик, а длительность зондирующего импульса очень мала, рассеивающие частицы пересекают луч в течение импульса не успевают. Вследствие этого длительность сигнала от каждой частицы равна длительности зондирующего импульса, соответственно ширина спектра сигнала от скорости не зависит. В отсутствие турбулентности она постоянна и равна обратной величине длительности зондирующего импульса.

Сигнал доплеровского анемометра образуется в процессе пересечения частицей зондирующих лучей. Поэтому длительность одночастичного сигнала определяется скоростью частицы. В результате ширина спектра сигнала ЛДА зависит от скорости и обратно пропорциональна ей.

Отсюда следует, что корреляционные функции сигналов доплеровского лидара и доплеровского анемометра существенно различаются. Например, при гауссовых формах зондирующих импульсов лидара и зондирующих пучков анемометра эти нормированные функции соответственно имеют вид

$$R(kT) = \exp\{-(k\nu T)^2\} \cdot \exp(j\omega kT), \quad (9)$$

$$R(kT) = \exp\{-(\xi\omega kT)^2/2\} \cdot \exp(j\omega kT),$$

где $\xi = 1/(2\sqrt{2}\pi L)$ — известный параметр оптической схемы, L — число реальных или виртуальных интерференционных полос в измерительном объёме ЛДА.

С учётом (9) элементы матрицы \mathbf{C} в (3) будут теперь зависеть от доплеровской частоты и иметь вид $\exp[-(\xi\omega kT)^2/2]$. Пути получения МПО доплеровской частоты рассматриваются в работе [10]: предложено оценку определять непосредственно как значение аргумента функции правдоподобия в точке её максимума. Также обсуждаются результаты моделирования процесса получения этих оценок для ряда наиболее распространённых конструкций ЛДА с числом реальных или виртуальных интерференционных полос в измерительном объёме 6, 10, 14 и 20 при числе используемых отсчётов комплексного доплеровского сигнала 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Таблицы в [10] с результатами моделирования содержат максимально правдоподобные оценки средних значений доплеровской частоты и их среднеквадратичные отклонения, характеризующие качество оценок. Анализ результатов показал, что оценки практически не смещены, а их среднеквадратичные отклонения (погрешности измерений) с увеличением числа отсчётов с 2 до 4 падают в 3–4 раза, а затем очень медленно снижаются.

Максимально правдоподобные оценки параметров одночастичного доплеровского сигнала лазерного анемометра при наличии независимого белого нормального шума. Эта задача актуальна при исследовании воздушных потоков с естественным запылением, когда вероятность перекрытия сигналов от разных частиц очень мала. Попытки её решения были предприняты в [11–13], однако результаты [12, 13] ошибочны, так как авторы не учли зависимостей длительности получаемого сигнала и ширины его спектра от доплеровской частоты. В [11] задача решена для анемометра, но уравне-

ние правдоподобия представлено в общем виде, а ГРК определены только для амплитуды сигнала и доплеровской частоты. Как следует из [11], они не зависят от периода дискретизации сигнала, что не может соответствовать действительности.

Отметим также работу [14], посвящённую оптимальным оценкам доплеровской частоты одночастичного сигнала, где использовался метод наименьших квадратов, а не алгоритмы максимального правдоподобия. Суть предложенного состоит в том, что на первом этапе оцифровываются компоненты комплексного доплеровского сигнала, затем определяется текущая фаза сигнала, далее методом наименьших квадратов находится линейное приближение полученной функции и на последнем этапе вычисляется её производная как оптимальная оценка частоты. Интерес к этой работе вызван тем, что автор путём сравнения дисперсий оценок с известными значениями для ГРК показал эффективность такой оценки. Основная цель работы — определение оптимального отрезка времени, в течение которого осуществляется оценка частоты. Показано, что в случае учёта дробового шума данный отрезок равен длительности сигнала на уровне e^{-1} , а когда превалирует тепловой шум — на уровне e^{-2} .

К этому же циклу можно отнести публикации [15, 16], в которых та же задача решается с учётом ускоренного движения рассеивающих частиц. Цель работы [15] — во-первых, вывести выражения для оценок ГРК центральной доплеровской частоты и коэффициента, учитывающего ускорение, во-вторых, показать путём сравнения их дисперсий с вычисленными ГРК, что выбранная методика даёт эффективные оценки. Выражение для оценок ГРК центральной доплеровской частоты имеет вид

$$\text{ГРК} \geq \frac{2\sigma^2}{A^2 T^2 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4} K_w^3 \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2N}}{K_w} \right) - N K_w^2 \exp \left(\frac{-2N^2}{K_w^2} \right) \right)},$$

где A — амплитуда сигнала; $2N + 1$ — число используемых отсчётов сигнала; $K_w = T_w/T$ (T_w — период квантования сигнала); σ^2 — дисперсия шума. Что касается технологии обработки сигнала, то авторы выбрали быстрое преобразование Фурье в варианте алгоритма Герцеля, а не технологию максимального правдоподобия. При этом обработка сигнала выполняется в два этапа. На первом этапе над сигналом производят БПФ во всей полосе частот и получают грубую оценку доплеровской частоты и границы существования спектра сигнала, а на втором этапе БПФ осуществляют в границах спектра и таким образом получают окончательные оценки как частоты, так и ускорения. Показано, что эти оценки эффективны. Основным недостатком работы в том, что не учтено изменение огибающей с изменением измеряемой частоты. В [16] задача МПО решается на основе времячастотного представления сигнала с применением вейвлет-анализа. Первый шаг обработки состоит в получении времячастотной spectroграммы сигнала, а оценка центральной доплеровской частоты находится на втором шаге как положение центра тяжести ординат этой spectroграммы. Оценка ускорения β осуществляется с использованием результатов измерений мгновенной частоты и процедуры метода наименьших квадратов со взвешиванием. Граница Рао — Крамера имеет вид

$$\text{ГРК} = (\pi^{-2}(0,25d)^{-3} + \beta^2 d) \sigma^2 / \pi^{0,5} A^2.$$

Здесь d — время прохождения частицы через измерительный объём, σ — среднеквадратичное значение шума. Авторами путём моделирования методом Монте-Карло показано, что дисперсия оценки доплеровской частоты весьма близка к рассчитанной ГРК, а оценки ускорения смещены. Недостаток работы тот же, что и в [15].

Точное решение задачи, поставленной в данном разделе, представлено в [17]. Неизвестными, подлежащими оценке, в этом случае являются доплеровская частота ω_D , амплитуда

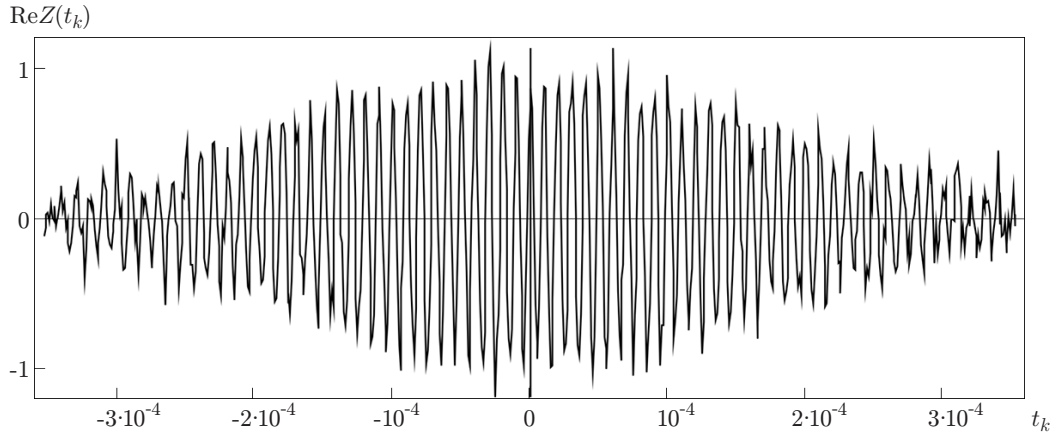


Рис. 1

A и момент прибытия частицы в центр измерительного объёма t_0 . Форма одночастичного доплеровского сигнала с наложенным белым шумом представлена на рис. 1.

Нормальный закон распределения значений белого шума с дисперсией σ^2 позволяет представить функцию правдоподобия сигнала в виде

$$P(z/\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^{2K+1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=-K}^K [(X_k - \mu_k)^2 + (Y_k - \nu_k)^2] \right\},$$

где X_k и Y_k — оцифрованные квадратурные компоненты доплеровского сигнала вместе с шумом; $2K + 1$ — число отсчётов на интервале наблюдения; μ_k и ν_k — действительная и мнимая компоненты одночастичного доплеровского сигнала в отсутствие шума. С учётом этого логарифм функции правдоподобия

$$\ln P(z, \omega) = \mathbf{C} + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=-K}^K [(2X_k\mu_k - \mu_k^2) + (2Y_k\nu_k - \nu_k^2)],$$

где \mathbf{C} не зависит от оцениваемых параметров. На основе этого выражения получена система уравнений правдоподобия для каждого из неизвестных параметров — доплеровской частоты, амплитуды и момента времени t_0 соответственно:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Ah_T(\omega_D)}{2T} \frac{1}{\xi\omega_D^2} = 2\xi^2\omega_D \sum_{k=-K}^K (t_k - t_0)^2 \times$$

$$\times \exp[-\xi^2\omega_D^2(t_k - t_0)^2] (X_k \cos \omega_D(t_k - t_0 - T/2) + Y_k \sin \omega_D(t_k - t_0 - T/2)) +$$

$$+ \sum_{k=-K}^K (t_k - t_0 - T/2) \exp[-\xi^2\omega_D^2(t_k - t_0)^2] (X_k \sin \omega_D(t_k - t_0 - T/2) - Y_k \cos \omega_D(t_k - t_0 - T/2));$$

$$2\xi^2\omega_D \sum_{k=-K}^K (t_k - t_0) \exp[-\xi^2\omega_D^2(t_k - t_0)^2] (X_k \cos \omega_D(t_k - t_0 - T/2) + Y_k \sin \omega_D(t_k - t_0 - T/2)) +$$

$$+ \sum_{k=-K}^K \exp[-\xi^2 \omega_D^2 (t_k - t_0)^2] (X_k \sin \omega_D (t_k - t_0 - T/2) - Y_k \cos \omega_D (t_k - t_0 - T/2)) = 0;$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi \omega_D \frac{T}{h_T(\omega_D)} \sum_{k=-K}^K \exp[-\xi^2 \omega_D^2 (t_k - t_0)^2] \times \\ \times (X_k \cos \omega_D (t_k - t_0 - T/2) + Y_k \sin \omega_D (t_k - t_0 - T/2)),$$

где $h_T(\omega_D) = \sin\left(\frac{\omega_D T}{2}\right) / \left(\frac{\omega_D T}{2}\right)$. Эта система нелинейных уравнений аналитически не решается, однако современные компьютерные технологии справляются с нею в доли секунды. Минимальные относительные среднеквадратичные отклонения, полученные на основе ГРК, имеют вид

$$\frac{\sigma_{\omega_D}}{\omega_D} = \sqrt{\frac{2}{Q}} \frac{\xi}{\sqrt{1+2\xi^2}}, \quad \frac{\sigma_{t_0}}{T_w} = \sqrt{\frac{1}{Q}} \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad \frac{\sigma_A}{A} = \sqrt{\frac{1}{2Q}} \sqrt{\frac{1+3\xi^2}{1+2\xi^2}},$$

где Q — отношение сигнал/шум, $Q = 2E_D/S_0$, $E_D = \sqrt{\pi/2} A^2 / (2\xi \omega_D)$ — энергия доплеровского сигнала, $S_0 = 2\sigma_A^2 T$ — односторонняя спектральная плотность. Так, например, если амплитуда доплеровского сигнала 10^{-6} Вт, $\xi = 0,01$ и отношение сигнал/шум 10 дБ, то погрешность оценки частоты составит 1,41 %.

Более сложная задача при использовании ЛДА в одночастичном режиме решена в работе [18]. В ней оцениваются не только скорость рассеивающей частицы, но и амплитуда, и фаза акустического поля, если оно присутствует в потоке. Предложенный алгоритм не основан на методе максимального правдоподобия, но авторами показано, что полученные оценки удовлетворяют ГРК. Алгоритм оценки неизвестных параметров выполняется в два этапа. На первом этапе с помощью частотно-временной обработки оценивается мгновенная частота сигнала (мгновенная скорость), а на втором с использованием вышеуказанных оценок и статистической модели мгновенной скорости потока методом наименьших квадратов находятся оптимальные оценки значений средней скорости, амплитуды и фазы акустических колебаний. В качестве модели модулированной амплитуды одночастичного сигнала от q -й частицы служило выражение

$$A_q(t) = K_q \exp \left[-\beta \left(v_{cq}(t - t_q) + \frac{V_{ac}}{2\pi F_{ac}} \sin(2\pi F_{ac} t + \varphi_{ac}) \right)^2 \right],$$

где K_q — амплитуда сигнала, соответствующая центру измерительного объёма; β^{-1} — размер измерительного объёма ЛДА вдоль траектории частицы; v_{cq} — скорость частицы; V_{ac} — амплитуда акустической скорости; F_{ac} — частота акустических колебаний; φ_{ac} — их фаза.

Максимально правдоподобные оценки параметров сигнала лазерного доплеровского анемометра, работающего в одночастичном режиме рассеяния, с учётом дробового шума. Отметим, что источниками погрешностей лазерных доплеровских систем являются [19, 20]:

- случайный характер доплеровского сигнала при многочастичном режиме рассеяния;
- внешняя паразитная засветка фотоприёмника;
- темновой шум фотодетектора;
- шумы усиливающей электроники;
- дробовой шум при детектировании самого оптического сигнала.

Если на входе фотоприёмника применить узкополосную оптическую фильтрацию сигнала и мощное зондирующее излучение, то всеми источниками погрешностей, кроме последнего, можно пренебречь. Тогда основной помехой останется дробовой шум, а погрешности измерений будут минимальными. Решение этой задачи с использованием критерия максимального правдоподобия представляет большой интерес, поскольку позволит определить наименьшие возможные ошибки измерения параметров исследуемого потока. В широкой постановке проблема получения максимально правдоподобных оценок параметров оптических сигналов с учётом дробового шума нашла своё отражение в работе [21], а применительно к лазерной анемометрии для случая одночастичного режима рассеяния решена в [22].

Из теории фотоэффекта известно, что электрический сигнал на выходе фотодетектора при изменяющейся интенсивности света представляет собой нестационарный поток электронов, скорость эмиссии которых пропорциональна интенсивности оптического сигнала. Если подсчитывать число электронов на заданном интервале времени, то вероятность получения n_i электронов на интервале Δt подчиняется закону Пуассона

$$P(n_i, \Delta t) = \frac{(\lambda(t)_i \Delta t)^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda(t)_i \Delta t},$$

где $\lambda(t) = \frac{I(t)\chi}{h\nu}$ ($I(t)$ — интенсивность света, проинтегрированная по площади детектора, χ — его квантовая эффективность, $h\nu$ — энергия кванта света). Учитывая статистическую независимость пуассоновских случайных величин, совместную плотность вероятности (функцию правдоподобия) полученного сигнала можно представить как

$$P(n_1, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^K P(n_i, \Delta t),$$

где K — число отсчётов на интервале наблюдения, $T = \Delta t K$. Исходя из этого логарифм функции правдоподобия получается в виде

$$\ln P(n_1, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^K [n_i (\ln \lambda_i + \ln \Delta t) - \ln(n_i!) - \lambda_i \Delta t]. \quad (10)$$

Если продифференцировать (10) по интересующему нас неизвестному параметру x , то при условии, что весь сигнал уместается на интервале наблюдения, уравнение примет вид

$$\sum_{i=1}^K \frac{n_i \lambda'_i}{\lambda_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' dt, \quad (11)$$

где $\lambda' = \frac{d\lambda(t, x)}{dx}$. Расписывая (11) для неизвестных параметров сигнала: амплитуды A_0 , доплеровской частоты ω_D и момента времени t_0 появления рассеивающей частицы в центре измерительного объёма, — авторы получили соответствующую систему нелинейных уравнений:

$$A_0^2 = \frac{\xi \omega_D}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^K n_i,$$

$$2\xi^2\omega_D \sum_{i=1}^K n_i(t_i - t_0)^2 + \sum_{i=1}^K n_i(t_i - t_0) \operatorname{tg} \frac{\omega_D(t_i - t_0)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}A_0}{\xi\omega_D},$$

$$2\xi^2\omega_D^2 \sum_{i=1}^K n_i(t_i - t_0) + \sum_{i=1}^K n_i\omega_D \operatorname{tg} \frac{\omega_D(t_i - t_0)}{2} = 0.$$

Эта система аналитически не решается, однако существует множество приближённых или численных способов, позволяющих достаточно просто решить данную задачу.

Для того чтобы определить эффективность полученных оценок, найдены ГРК, а минимальные относительные среднеквадратичные ошибки оценок имеют вид

$$\frac{\sigma_{A_0}}{A_0} = \sqrt{\frac{\xi\omega_D}{A_0\sqrt{\pi}}}, \quad \frac{\sigma_{\omega_D}}{\omega_D} = \sqrt{\frac{2\xi^3\omega_D}{A_0\sqrt{\pi}}}, \quad \frac{\sigma_{t_0}}{t_0} = \sqrt{\frac{\xi}{t_0^2 A_0 \omega_D \sqrt{\pi}}}.$$

Если, например, амплитуда сигнала 10^6 электрон/с, $\xi = 0,01$ и доплеровская частота равна 10^6 Гц, то относительная среднеквадратичная погрешность оценки частоты составляет 0,35 %.

Алгоритм максимально правдоподобных оценок доплеровской частоты многочастичного сигнала лазерного анемометра, работающего в режиме частотного дискриминатора. При использовании достаточно мощного источника излучения, когда дробовым шумом и другими источниками аддитивных шумов можно пренебречь, основным мешающим фактором является так называемый фазовый шум, возникающий вследствие случайного положения рассеивающих частиц в исследуемом потоке. Один из эффективных путей решения задачи определения оценки доплеровской частоты в этой ситуации — частотная демодуляция получаемого сигнала. Соответствующие максимально правдоподобные оценки доплеровской частоты найдены в [23].

Выражения для совместной плотности вероятности мгновенной частоты не существует, поэтому напрямую применить методику получения МПО доплеровской частоты не представляется возможным. Однако обычно сигнал мгновенной частоты на выходе демодулятора подвергается низкочастотной фильтрации, инерционные свойства фильтра нормализуют его, и указанное выше ограничение снимается. Если в качестве низкочастотного фильтра применяется интегрирующая RC -цепь, то корреляционная функция сигнала на выходе фильтра принимает вид [2]

$$B(\tau) = \frac{S(0)\alpha}{4} \exp(-\alpha\tau) = 1,153\alpha\xi\omega_D \exp(-\alpha\tau),$$

где $\alpha = 1/(RC)$. Здесь, как известно [24, формула (1.3.4)], функционал совместной плотности вероятности значений сигнала (мгновенной частоты $\omega(t)$)

$$P[\omega(t) | \omega_D] = k \exp \left[-\omega_D \int_0^{T_0} \omega(t)\nu(t)dt - \frac{\omega_D^2}{2} \int_0^{T_0} \nu(t)dt \right], \quad (12)$$

где k — нормировочный множитель; T_0 — интервал оценивания; $\nu(t)$ — решение интегрального уравнения вида

$$\int_0^{T_0} B(\tau)\nu(t)dt = \omega_D.$$

Приравнивая производную логарифма выражения (12) по ω_D к нулю, автор получил уравнение правдоподобия и его решение:

$$\int_0^{T_0} \omega(t) dt = \hat{\omega}_D T_0, \quad \hat{\omega}_D = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \omega(t) dt.$$

Чтобы охарактеризовать качество оценки частоты, найдено её математическое ожидание

$$\langle \hat{\omega}_D \rangle = \left\langle \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \omega(t) dt \right\rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\omega_D + \langle \dot{\varphi}(t) \rangle] dt = \omega_D.$$

Таким образом, показано, что математическое ожидание оценки $\hat{\omega}_D$ не смещено. Дисперсия оценки частоты имеет вид

$$\sigma^2(\hat{\omega}_D) = \frac{2,306\xi\omega_D}{T_0} \left[1 - \frac{1}{\alpha T_0} (1 - e^{-\alpha T_0}) \right]. \quad (13)$$

Полоса пропускания сглаживающего фильтра, включённого после частотного дискриминатора, выбирается равной наивысшей частоте спектра изменений скорости. В данном случае $\alpha T_0 \ll 1$. Тогда выражение (13) упрощается и относительное среднеквадратичное отклонение оценки принимает вид

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega_D} = \left(\frac{2,306\xi\alpha}{\omega_D} \right)^{0,5}.$$

Если, например, число интерференционных полос $M = 10$ (т. е. $\xi = 0,011$), $\omega_D = 2\pi \cdot 10^6$ Гц, а $\alpha = 2\pi \cdot 10^4$ Гц, то $\sigma_\omega/\omega_D = 1,6\%$.

На рис. 2 представлена функциональная схема лазерного анемометра, реализующего предложенный алгоритм.

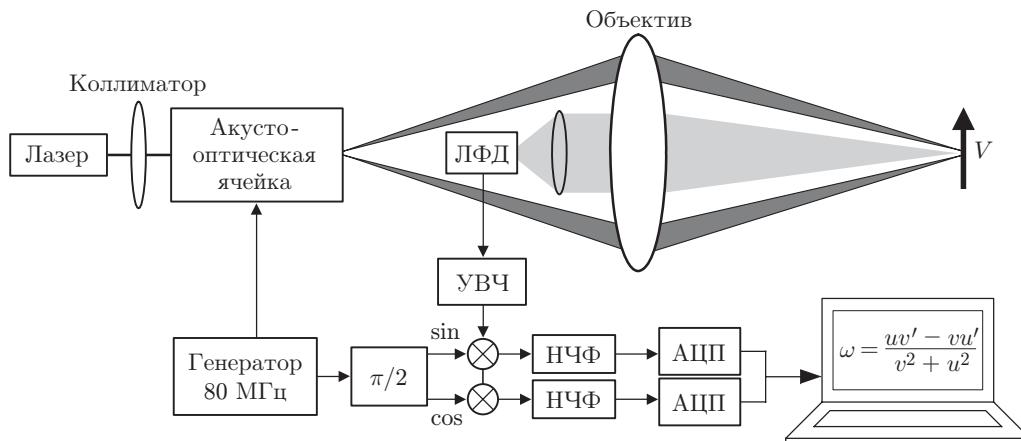


Рис. 2

Максимально правдоподобные оценки частоты сигналов доплеровских систем в частотной области можно получить обработкой сигнала в частотной области, используя в качестве наблюдаемых координат отсчёты его спектральной плотности. Примером этому может служить алгоритм, предложенный в [25] и применённый для получения оценок параметров вихрей в следе больших самолётов [26–28]. Он основан на предположении, что компоненты спектра мощности сигнала являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному распределению, а совместную плотность вероятности вектора спектральных компонент можно считать функцией правдоподобия оцениваемой доплеровской частоты. Тогда, учитывая взаимную независимость значений этих компонент, функция правдоподобия будет равна произведению одномерных плотностей вероятности, а её логарифм определится следующим выражением:

$$\ln P(f_D) = -T \int \log \pi P(f - f_D) df - T \int \Phi^*(f)/P(f - f_D) df,$$

где $P(f - f_D)$ — априори известная форма спектральной плотности доплеровского сигнала; $\Phi^*(f)$ — оценка спектральной плотности мощности сигнала (периодограмма); f и f_D — текущая и доплеровская частоты. Первый член этой суммы от доплеровской частоты не зависит, и окончательное выражение для логарифма функции правдоподобия принимает вид

$$\int \Phi^*(f)/P(f - f_D) df.$$

Если сигнал сопровождается шумом со спектральной плотностью Φ_0 , $P(f - f_D) = \Phi_0 + p(f - f_D)$ при $f \geq 0$ и модуль известной формы спектра сигнала $p(f - f_D)$ в отсутствие шума много меньше Φ_0 , то оптимальную оценку доплеровской частоты можно найти максимизацией выражения

$$\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \Phi^*(f)p(f - f_D) df, \quad (14)$$

где границы интегрирования выбраны симметрично относительно положения максимума полученной периодограммы. Процедура формирования МПЮ частоты состоит в следующем: вначале выбирается реализация сигнала такой длины, чтобы оценка отвечала значениям мгновенной скорости исследуемого потока (и не сглаживала бы её турбулентные флуктуации), затем вычисляется периодограмма спектра мощности. Далее найденные значения спектральных компонент и значения априори известной формы спектра подставляются в дискретную свёртку, эквивалентную интегралу (14). Оптимальное значение доплеровской частоты получают как первый момент этой свёртки.

Заключение. Можно констатировать, что к настоящему моменту накоплен большой теоретический материал, позволяющий строить алгоритмы максимально правдоподобных оценок параметров сигналов лазерных доплеровских систем, работающих как в одночастичном, так и многочастичном режимах рассеяния. Для современных методов фотодетектирования выведены уравнения правдоподобия и предложены пути их решения. Найденны выражения, определяющие границы Рао — Крамера, позволяющие оценить минимальные дисперсии получаемых оценок.

К перспективным направлениям развития методологии максимального правдоподобия можно отнести:

- исследование точности получаемых оценок параметров доплеровских сигналов как функции аддитивных окрашенных, мультипликативных и дробовых (зависимых) шумов;
- исследование зависимости погрешностей оценок от числа используемых отсчетов сигнала;
- оценку степени и причин расхождения дисперсий максимально правдоподобных оценок и границ Рао — Крамера;
- разработку и исследование быстродействующих алгоритмов максимального правдоподобия с тем, чтобы создать доплеровские системы оценки параметров турбулентных потоков on-line;
- создание адаптивных доплеровских систем, работающих по критерию максимального правдоподобия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Котельников В. А.** Теория потенциальной помехоустойчивости. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1956. 263 с.
2. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 672 с.
3. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1968. Кн. 2. 503 с.
4. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3. 662 с.
5. **Doviak R. J., Zrnich D. S.** Doppler Radar and Weather Observations. Dover Publications, 2006. 562 p.
6. **Frehlich R. G., Yadlowsky M. J.** Performance of mean-frequency estimators for Doppler radar and lidar // Journ. Atmos. Oceanic Technol. 1994. **11**, N 5. P. 1217–1230.
7. **Frehlich R. G.** Cramer — Rao bound for Gaussian random processes and applications to radar processing of atmospheric signals // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing. 1993. **31**, N 6. P. 1123–1131.
8. **Chornoboy E. S.** Optimal mean velocity estimation Doppler weather radars // IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing. 1993. **31**, N 3. P. 575–586.
9. **Novak L. M., Lindgren N. E.** Maximum likelihood estimation of spectral parameters using burst waveforms // Proc. of the 16th Asilomar Conf. on Circuits, Systems, and Computers. N. Y.: IEEE Computer Society Press, 1982. P. 318–324.
10. **Соболев В. С., Журавель Ф. А.** Максимально правдоподобные оценки частоты сигналов лазерных доплеровских анемометров // Радиотехника и электроника. 2014. № 4. С. 322–330.
11. **Besson O., Galtier F.** Estimation particles velocity from laser measurements: Maximum likelihood and Cramer — Rao bounds // IEEE Trans. Signal Process. 1996. **44**, N 12. P. 3056–3068.
12. **Shu W.-Q.** Cramer — Rao bound of laser Doppler anemometr // IEEE Trans. Signal Process. 2001. **50**, N 6. P. 1770–1772.
13. **Гречихин В. А.** Потенциальная точность оценки доплеровской частоты сигнала лазерного доплеровского анемометра // Радиотехнические тетради. 2009. № 40. С. 15–20.
14. **Czarske J.** Statistical frequency measuring error of the quadrature demodulation technique for noisy single-tone pulse signals // Meas. Sci. Technol. 2001. **12**, N 5. P. 597–614.
15. **Zhou J., Long X.** Estimation of parameters of a laser Doppler velocimeter and their Cramer — Rao lower bounds // Appl. Opt. 2011. **50**, N 23. P. 4594–4603.

16. **Baral-Baron G., Lahalle E., Fleury G., Schlotterbeck J.-B.** Signal parameter estimation using time-frequency representation for laser Doppler anemometry // 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2012). Bucharest, Romania, August, 27–31, 2012. P. 2318–2322.
17. **Sobolev V. S., Feshenko A. A.** Accurate Cramer — Rao bounds for a laser Doppler anemometer // IEEE Trans. Instrum. Meas. 2006. **55**, N 2. P. 659–664.
18. **Richoux O., Legroot A., Lionet L.** Laser Doppler velocimetry for joint measurements of acoustic and mean flow velocities: LMS-based algorithm and CRB calculation // IEEE Trans. Instrum. Meas. 2008. **57**, N 7. P. 1455–1464.
19. **Василенко Ю. Г., Дубнищев Ю. Н., Соболев В. С. и др.** Лазерные доплеровские измерители скорости. Новосибирск: Наука, 1975. 161 с.
20. **Коронкевич В. П., Соболев В. С., Дубнищев Ю. Н.** Лазерная интерферометрия. Новосибирск: Наука, 1983. 214 с.
21. **Соболев В. С.** Оптимальные оценки параметров оптических сигналов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2011. 134 с.
22. **Соболев В. С., Прокопенко М. Н.** Максимально правдоподобные оценки частоты и других параметров сигналов лазерных доплеровских измерительных систем, работающих в режиме одночастичного рассеяния // Квантовая электроника. 2000. **30**, № 12. С. 1109–1114.
23. **Соболев В. С.** К оценке частоты сигнала лазерного доплеровского анемометра // Автометрия. 2000. № 5. С. 108–115.
24. **Куликов Е. И.** Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М: Сов. радио, 1968. 244 с.
25. **Levin M. J.** Power spectrum parameter estimation // IEEE Trans. Inform. Theory. 1965. **IT-11**, N 1. P. 100–107.
26. **Смалихо И. Н.** Ветровое зондирование когерентными доплеровскими лидарами: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2011. 39 с.
27. **Баных В. А., Смалихо И. Н.** Когерентные доплеровские ветровые лидары в турбулентной атмосфере. Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2013. 303 с.
28. **Frehlich R., Sharman R.** Maximum likelihood estimates of vortex parameters from simulated coherent Doppler lidar data // Journ. Atmos. Oceanic Technol. 2005. **21**, Is. 2. P. 117–130.
29. **Дубнищев Ю. Н.** Теория и преобразование сигналов в оптических системах: Учеб. пособие. С.-Пб.: Изд-во «Лань», 2011. 368 с.
30. **Гречихин В. А., Титов Д. А.** Квазиоптимальная нелинейная фильтрация сигнала лазерного доплеровского виброметра // Автометрия. 2014. **50**, № 5. С. 99–107.

Поступила в редакцию 4 сентября 2013 г.
