УДК 681.324

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ СО СТРУКТУРНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ*

В. А. Павский, К. В. Павский

Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 13
E-mail: pkv@isp.nsc.ru

Одним из вариантов повышения надёжного и живучего функционирования большемасштабных вычислительных систем является введение в их состав резерва (системы структурной избыточности). Предложена модель для анализа функционирования распределённых вычислительных систем. Приведены результаты аналитического и имитационного моделирования. Рассматриваются потоки событий с распределением Вейбулла (значения параметра формы 1 и 0,78).

Ключевые слова: распределённые большемасштабные вычислительные системы, структурная избыточность, математические модели, оценки показателей.

Введение. Большемасштабные (10^4–10^6) вычислительные системы (ВС) со структурной избыточностью состоят из большого числа N достаточно высоконадёжных элементарных машин (ЭМ) [1], из которых структурную избыточность составляют $n < N$ ЭМ (рис. 1) [1]. Вышедшая из строя ЭМ основной подсистемы заменяется ЭМ из резерва, а сама попадает в восстанавливающую систему. Наличие структурной избыточности при достаточном числе машин позволяет поддерживать необходимую производительность в течение длительного промежутка времени. Пока множество ЭМ, составляющих структурную избыточность, непустое, считается, что ВС имеет высокую производительность, иначе она переходит в состояние низкой производительности с сохранением работоспособности других функций ВС. Следовательно, системы такого масштаба не должны отказывать. Эту дополнительную информацию можно использовать при анализе времени нахождения ВС в состоянии высокой производительности и, не усложняя модели, предложить рекомендации по повышению эффективности работы вычислительной системы.

Итак, объектами исследования являются структурная избыточность и система восстановления, изучив состояния которой, мы постараемся получить оценки для показателей, численно характеризующих функционирование данной ВС. При этом использовались методы теории массового обслуживания [2, 3].

Модель функционирования распределённых вычислительных систем со структурной избыточностью. В систему массового обслуживания (СМО) поступает поток требований интенсивностью $N\lambda$. Число k требований, поступивших в систему за время t, является случайной величиной ξ, удовлетворяющей пуассоновскому закону с интенсивностью $N\lambda$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Требование, прибывшее в СМО, вместе с другими $k-1$ требованиями ждёт начала обслуживания. Через случайное время начинается обслуживание сразу всех k требований с интенсивностью μ независимо от их числа в СМО. Вре-

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-07-00145, № 13-07-00160) и Президиума РАН в рамках Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (направление 2).

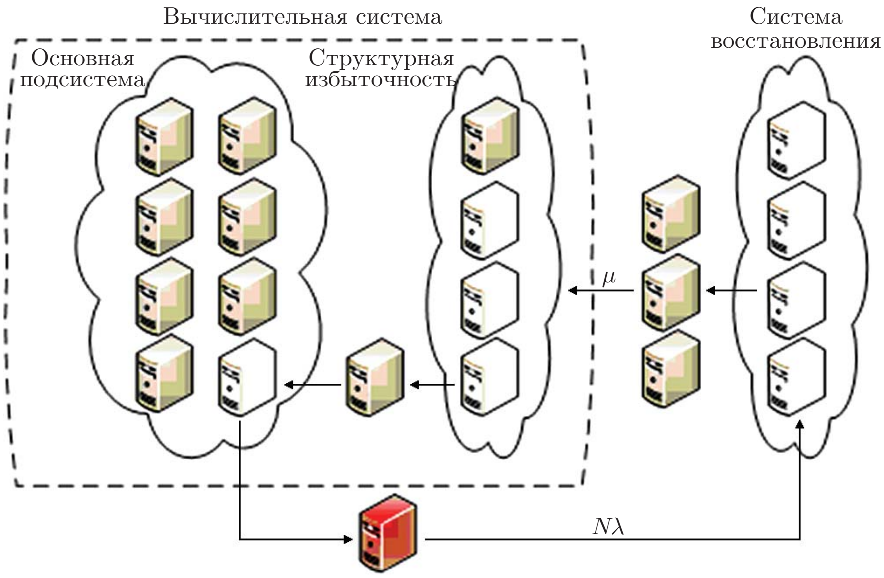

Рис. 1. Модель функционирования вычислительной системы со структурной избыточностью

мя обслуживания является случайной величиной η, удовлетворяющей экспоненциальному закону с групповой интенсивностью $\mu = 1/t_{\text{ср}}$.

Требуется найти $P_k(t)$ — вероятность того, что в момент времени t в СМО находится k требований: $t \in [0, \infty)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Предполагается, что $n \ll N$, $N\lambda < \infty$ и $N \to \infty$.

Расчёт вероятностей состояний восстанавливающей системы. Для нахождения вероятностей $P_k(t)$ воспользуемся методами теории массового обслуживания. Система дифференциальных уравнений [4] запишется в виде

$$\begin{cases} P_k'(t) = -(N\lambda + \mu)P_k(t) + N\lambda P_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \\ P_0'(t) = -N\lambda P_0(t) + \mu \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k(t), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$P_i(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad k \neq i, \tag{2}$$

— начальные условия;

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1, \quad \forall t \in [0, \infty),$$

— условие нормировки.

Решение (1) с учётом (2) будет иметь вид

$$\begin{cases} P_k(t) = \dfrac{\mu(N\lambda)^k}{(N\lambda+\mu)^{k+1}} - \mu(N\lambda)^k \mathrm{e}^{-(N\lambda+\mu)t} \sum\limits_{j=0}^{k} \dfrac{t^{k-j}}{(k-j)!(N\lambda+\mu)^{j+1}}, \quad k < i, \\ P_k(t) = \dfrac{\mu(N\lambda)^k}{(N\lambda+\mu)^{k+1}} + \mathrm{e}^{-(N\lambda+\mu)t} \times \\ \times \Big(\sum\limits_{j=0}^{k} \dfrac{(N\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} t^{k-j} - (N\lambda)^k \mu \sum\limits_{j=0}^{k} \dfrac{t^{k-j}}{(k-j)!(N\lambda+\mu)^{j+1}} \Big), \quad k \geq i. \end{cases} \tag{3}$$

В стационарном случае ($p_k = \lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) > 0$) из (3) получаем

$$p_0 = \frac{\mu}{(N\lambda+\mu)}; \quad p_k = \frac{\mu}{N\lambda+\mu}\Big(\frac{N\lambda}{N\lambda+\mu}\Big)^k, \quad k = 1, 2, \ldots\ . \tag{4}$$

Условие сохранения высокой производительности распределённой ВС. По состоянию ВС можно оценить требуемый объём структурной избыточности (резерва) для поддержки высокой производительности ВС. Действительно, пусть $P_{\text{отк}}(n,t)$ — вероятность нахождения ВС в состоянии низкой производительности в момент времени t, тогда

$$P_{\text{отк}}(n,t) = \sum_{k=n}^{\infty} P_k(t). \tag{5}$$

Наличие простой зависимости (5) открывает возможность в рамках заданной модели исследовать объём структурной избыточности (под которым понимается число n), причём при проведении анализа будут использоваться как сами вероятности состояний, так и их математическое ожидание и дисперсия.

Для стационарного режима функционирования ВС при $p_{\text{отк}}(n) = \lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) > 0$ получаем

$$p_{\text{отк}}(n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \Big(\frac{N\lambda}{N\lambda+\mu}\Big)^n, \quad n = 1, 2, \ldots\ . \tag{6}$$

На рис. 2 представлена зависимость вероятности $p_{\text{отк}}(n)$ от объёма структурной избыточности. Увеличение объёма от 0,02 до 0,2 % числа N ЭМ ВС (при $N = 1{,}5\cdot 10^4$ ЭМ) приводит к уменьшению значения вероятности нахождения ВС в состоянии низкой производительности с 0,824 до 0,144 при суммарном восстановлении отказавших машин в течение 10 ч. Более того, видно, что, начиная с $n = 90$ ЭМ ($p_{\text{отк}}(n) \approx 0{,}003$), дальнейшее увеличение числа ЭМ резерва экономически нецелесообразно.

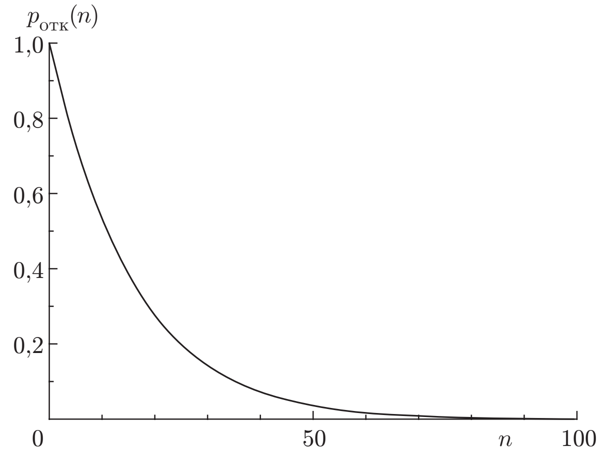

Рис. 2. Зависимость вероятности невыхода ВС в состояние высокой производительности от размера структурной избыточности (при $N = 1{,}5\cdot 10^4$ ЭМ, $\lambda = 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $i = 0$ ЭМ, $\mu = 0{,}1$ ч$^{-1}$)

Оценим по заданной вероятности $p_{\text{отк}}(n)$ величину резерва $n \approx k_{\text{ср}}$, гарантирующего сохранение высокой производительности ВС.

Зададим доверительную вероятность γ того, что ВС находится в состоянии высокой производительности [4], тогда, полагая $\gamma = p_{\text{отк}}(n)$, из (6) получаем средний объём резерва

$$k_{\text{ср}} \geq \left[\frac{\ln(1-\gamma)}{\ln N\lambda - \ln(N\lambda + \mu)}\right] + 1, \tag{7}$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Результаты расчёта по формуле (7) позволяют утверждать, что, например, при $\lambda = 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $\mu = 0{,}1$ ч$^{-1}$, $N = 1{,}5 \cdot 10^4$ ЭМ и надёжности ВС 99 % достаточен размер резерва 0,48 % от числа машин ВС, при надёжности 95 % — размер резерва 0,3 %.

Функция распределения $F(t)$ времени нахождения вычислительной системы в состоянии низкой производительности. Пусть η — случайная величина, характеризующая время восстановления элементарных машин в восстанавливающей системе, тогда нахождение ВС в состоянии низкой производительности в течение времени t соответствует продолжительности восстановления всех вышедших ЭМ из строя, $t \in [0, \infty)$ [3]. Положим $F(t) - \Delta(t, m) = \tilde{F}(t) = P\{\eta \geq t\}$.

Рассмотрим стационарный режим функционирования ВС при $P\{\eta = 0\} = p_{\text{отк}}(n)$ ($\tilde{F}(t)$ имеет разрыв в точке $t = 0$), т. е. в этом случае для любого момента времени $p_{\text{отк}}(n) = \text{const}$. Предположим, что резерв состоит из n ЭМ и $p_k = \dfrac{\mu}{N\lambda + \mu}\Big(\dfrac{N\lambda}{N\lambda + \mu}\Big)^k$ — вероятность того, что k ЭМ ожидают обслуживания, тогда

$$P\{\eta \geq t\} = \sum_{k=n}^{m} p_k P_k\{\eta \geq t\},$$

где $P_k\{\eta > t\}$ — вероятность того, что за время t восстановлено k ЭМ, а m ($n < m \leq N$) — число, используемое при оценке погрешности функции $F(t)$.

Поскольку в стационарном режиме поток восстановлений ЭМ простейший, то

$$P_k\{\eta \geq t\} = \sum_{r=0}^{[k/n]-1} \frac{(\mu t)^r}{r!} \exp(-\mu t).$$

Учитывая, что $k \geq n$ (по условию $n \neq 0$) и $p_k = p_{\text{отк}}(n) p_{k-n}$, при $i = k - n$ будем иметь

$$\tilde{F}(t) = p_{\text{отк}}(n) \sum_{i=0}^{m-n} \frac{\mu}{N\lambda + \mu}\Big(\frac{N\lambda}{N\lambda + \mu}\Big)^i \sum_{r=0}^{[(n+i)/n]-1} \frac{(\mu t)^r}{r!} \exp(-\mu t). \tag{8}$$

После преобразований (принимая $N \to \infty$ и соответственно $m \to \infty$) и упрощений окончательно имеем

$$F(t) = p_{\text{отк}}(n) \exp(-(1 - p_{\text{отк}}(n))\mu t).$$

Из рис. 3 следует (при увеличении объёма структурной избыточности с 10 до 36 ЭМ и восстановлении всех ЭМ резерва в среднем в течение 10 ч), что значение вероятности пребывания ВС в состоянии низкой производительности не превышает 0,1. Увеличение структурной избыточности до 108 ЭМ делает ВС высоконадёжной.

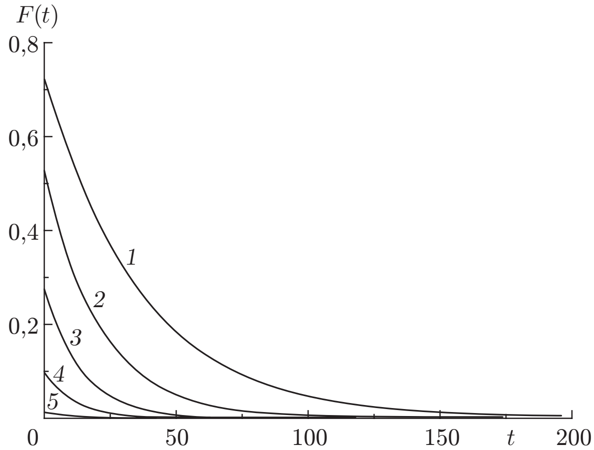

Рис. 3. Зависимость $F_n(t)$ от времени t (при $\lambda = 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $N = 1{,}5 \cdot 10^4$ ЭМ, $\mu = 0{,}1$ ч$^{-1}$): кривая *1* — $n = 5$; *2* — 10; *3* — 20; *4* — 36; *5* — 70

Погрешность функции $F(t)$. Погрешность $\Delta(t, m)$ функции $F(t)$ [4] (определяемой формулой (8)), связанная с допущением бесконечности объёма резерва и условием $m \to \infty$, имеет вид

$$\Delta(t, m) = (1 - p_0)^{m - n + 1} F(t).$$

Следовательно, число m есть то число, на которое нужно увеличить объём резерва, чтобы ВС оставалась в состоянии высокой производительности достаточно долго.

Математическое ожидание и дисперсия числа машин в ВС. Для нахождения среднего числа машин $M(t)$ в ВС и соответствующей дисперсии $D(t)$ введём производящую функцию [2]

$$F(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(t) \tag{9}$$

и применим её к системе (1).

Дифференцируя (9) по переменным t и z, получим

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{dP_k(t)}{dt}, \quad \frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} P_k(t).$$

Суммируя уравнения системы (1), умноженные на z^k, $k \in E_1^{\infty}$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} F(z,t) = -(N\lambda + \mu) F(z,t) + N\lambda z F(z,t) + \mu.$$

Продифференцировав последнее равенство по переменной z 1 раз для математического ожидания и 2 раза для дисперсии [4] и положив $z = 1$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} M(t) + \mu M(t) = N\lambda, \\ \dfrac{d}{dt}(D(t) - M(t) + M^2(t)) + \mu(D(t) - M(t) + M^2(t)) = 2N\lambda M(t) \end{cases} \tag{10}$$

с начальными условиями $M(0) = i$, $D(0) = 0$.

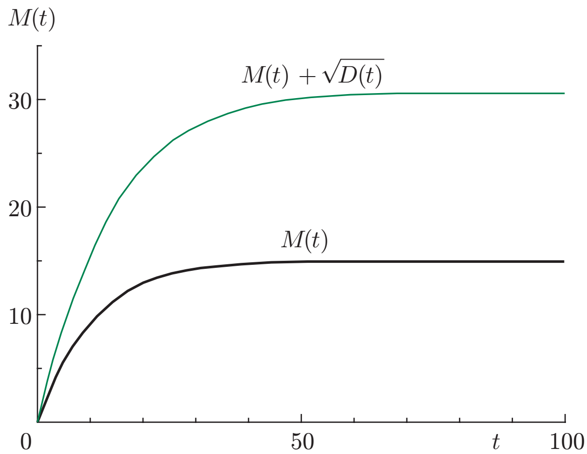

Рис. 4. Зависимость среднего числа отказавших машин в ВС от времени (при $\lambda = 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $N = 1{,}5 \cdot 10^4$ ЭМ, $i = 0$, $\mu = 0{,}1$ ч$^{-1}$)

Решением (10) при начальном условии (2) является

$$\begin{cases} M(t) = \dfrac{N\lambda}{\mu} + \dfrac{i\mu - N\lambda}{\mu}\,\mathrm{e}^{-\mu t}, \\[2ex] D(t) = 2\Big(\dfrac{N\lambda}{\mu}\Big)^2(1 - \mathrm{e}^{-\mu t}) + 2N\lambda\Big(i - \dfrac{N\lambda}{\mu}\Big)t\mathrm{e}^{-\mu t} + (i^2 - i)\mathrm{e}^{-\mu t} + M(t) - M^2(t). \end{cases} \tag{11}$$

Среднее число отказавших машин, ожидающих восстановления, с учётом соответствующего среднего квадратичного отклонения для ВС (11) приведено на рис. 4. Из рисунка видно, что при восстановлении отказавших машин в течение 10 ч ожидают восстановления 30 ЭМ из $1{,}5 \cdot 10^4$ ЭМ ВС (в среднем ждёт восстановления 15 ЭМ).

Имитационная модель. В работах [5, 6] проводилось исследование отказов в распределённых ВС. На основе статистики отказов в 20 кластерных ВС [7] предпочтительнее считать, что время между отказами распределено по закону Вейбулла с параметром формы $\delta = 0{,}78$ (для экспоненциального закона $\delta = 1$).

Для предложенной модели была разработана имитационная модель. На рис. 5 приведены графики математического ожидания числа отказавших ЭМ с учётом дисперсии (по-

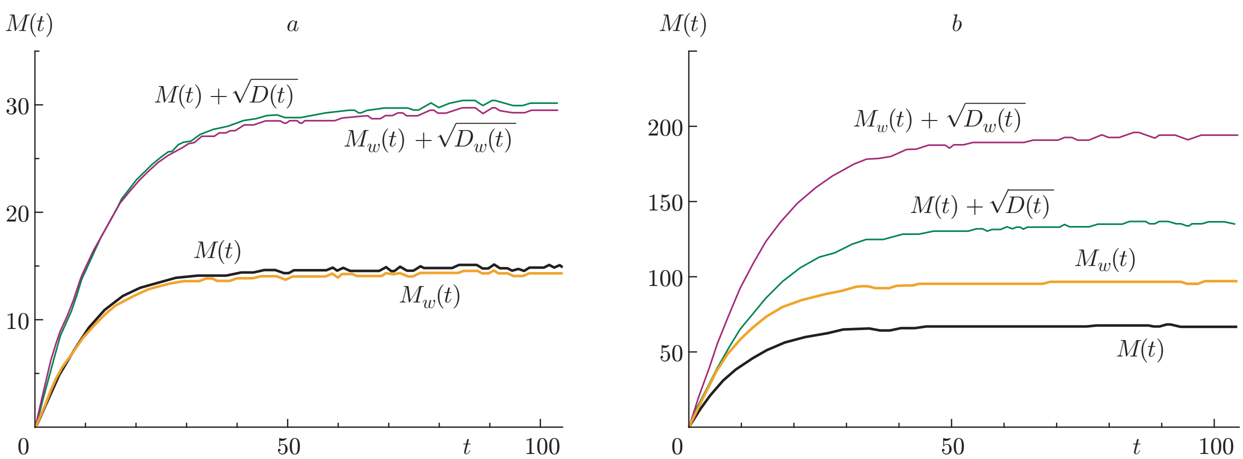

Рис. 5. Зависимости среднего числа отказавших ЭМ, находящихся в ВС, от времени (при $\lambda = 10^{-4}$ ч$^{-1}$, $\mu = 0{,}1$ ч$^{-1}$): *a* — для $N = 1{,}5 \cdot 10^4$; *b* — для $N = 7{,}5 \cdot 10^4$

лученные при имитационном моделировании по данным 10000 экспериментов) в сравнении с решением численными методами (7). (Величины $M(t)$ и $M_w(t)$ — математические ожидания среднего числа отказавших машин; время работы до отказа любой ЭМ предполагалось распределённым по закону Вейбулла со значениями параметра формы $\delta = 1$ и $\delta = 0{,}78$. Моделирование восстановлений выполнено согласно экспоненциальному закону.) На рис. 5 видно также влияние параметра $N\lambda$ на различие между $M(t)$ и $M_w(t)$. При $N\lambda \approx 1{,}5$ значения $M(t)$ и $M_w(t)$ практически совпадают, $M(t) \approx 15$ (см. рис. 4 и 5, a).

Из дальнейшего анализа следует, что если $\delta \to 1 - 0$, $\delta \in [0{,}78, 1)$, и $n\mu$ сравнимо с $N\lambda$, то различие в числовых результатах незначительно.

Заключение. В данной работе предложена математическая модель функционирования большемасштабных вычислительных систем со структурной избыточностью. Найдена функция распределения времени нахождения ВС в состоянии низкой производительности в зависимости от размера структурной избыточности. Предложен расчёт среднего числа отказавших машин и дисперсии в зависимости от времени. Приведены результаты сравнения среднего числа ЭМ в восстанавливающей системе, построенной по полученным аналитическим решениям и имитационной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хорошевский В. Г.** Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 520 с.
2. **Саати Т. Л.** Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 520 с.
3. **Назаров А. А., Семенова И. А.** Исследование систем массового обслуживания с повторными вызовами методом асимптотического анализа // Автометрия. 2011. **47**, № 4. С. 104–113.
4. **Павский В. А., Павский К. В.** Стохастическая модель и оценки показателей функционирования вычислительных систем со структурной избыточностью // Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4. С. 100–107.
5. **Schroeder B., Gibson G. A.** A large-scale study of failures in high-performance computing systems // Proc. of the Intern. Conf. on Dependable Systems and Networks. Philadelphia, USA, 25–28 June, 2006. P. 249–258.
6. **Gibson G.** Analyzing failure data. URL: http://www.pdl.cmu.edu/FailureData/ (дата обращения 16.06.2013).
7. **Computer** Science Research: Failure Data. URL: http://institutes.lanl.gov/data/fdata/ (дата обращения 16.06.2013).

Поступила в редакцию 2 июля 2013 г.