

УДК 621.391

МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО ИЗМЕРЕНИЯ СКОЛЬЗЯЩЕГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СПЕКТРА ФУРЬЕ

В. А. Пономарев¹, О. В. Пономарева¹, А. В. Пономарев²

¹Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова,
426000, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7

²Центральная избирательная комиссия Удмуртской Республики,
426000, г. Ижевск, пл. 50 лет Октября, 15
E-mail: ponva@mail.ru

Рассмотрены основные методы обнаружения отдельных тональных компонент и алгоритмы их реализации; проанализированы достоинства и недостатки. Предложено обобщение однобинового скользящего параметрического дискретного преобразования Фурье. Алгоритм, реализующий данное преобразование, позволяет существенно сократить число операций, необходимых для выхода алгоритма на режим скользящего измерения.

Ключевые слова: параметрическое дискретное преобразование Фурье, скользящее параметрическое дискретное преобразование Фурье, гармоническая компонента, алгоритм Герцеля, гребенчатый фильтр.

Введение. В различных областях научных исследований приходится сталкиваться с задачами выявления скрытых периодичностей [1–8] (т. е. с цифровой обработкой случайных сигналов, содержащих гармонические (тональные) компоненты). Из предметных областей, где необходимо решать задачи такого рода, можно назвать анализ сигналов в пассивной гидролокации для обнаружения и классификации как надводных, так и подводных судов [9]. В машиностроении при виброакустическом функциональном диагностировании объектов используется тот факт, что структура виброакустических сигналов характеризуется наличием гармонических рядов, порождаемых теми или иными дефектами в процессе работы различных узлов и механизмов [10]. Существуют области, где для решения определённого круга задач такие сигналы создаются искусственно, например при реализации тонального набора в телефонии.

На практике решение задачи определения параметров скрытых периодичностей часто осложняется тем, что исследуемые сигналы имеют спектр Фурье, изменяющийся во времени. Одним из методов эффективного выявления скрытых периодичностей в таких сигналах является измерение спектра Фурье в скользящем временном окне в N отсчётов (измерение скользящих спектров Фурье) [4]. Анализ существующих методов измерения скользящих спектров Фурье показал, что их общий недостаток — необходимость выполнения большого числа операций при выходе на режим скользящего измерения.

Цель предлагаемого исследования — разработка метода и алгоритма измерения скользящих спектров Фурье, обеспечивающих сокращение числа этих операций при одновременном обеспечении высокой разрешающей способности спектрального анализа.

Методы и алгоритмы выявления скрытых периодичностей. Эффективным методом вычисления однобинового дискретного преобразования Фурье (ДПФ) для действительных последовательностей является алгоритм Герцеля [11, 12]. Стандартная структура фильтра Герцеля приведена на рис. 1, а. Этот алгоритм широко применяется при декодировании DTMF-сигналов (Dual-Tone Multi-Frequency) — двухтональных многочастотных сигналов, используемых при тональном наборе телефонного номера.

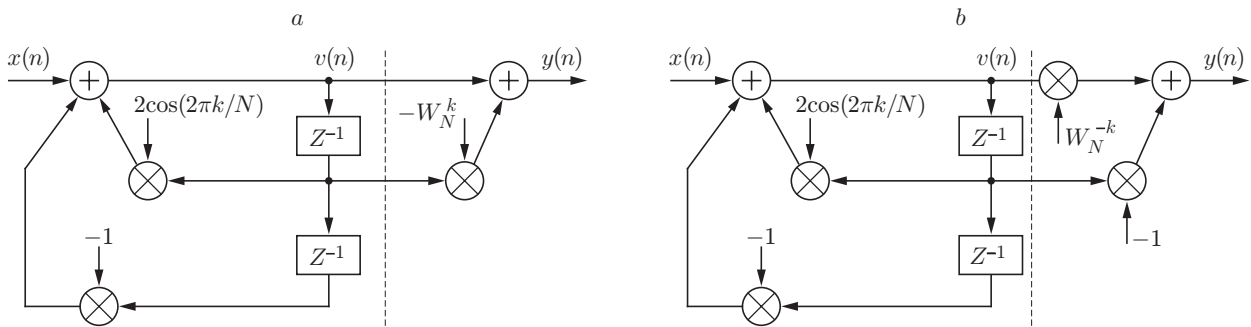


Рис. 1. Структуры БИХ-фильтров, реализующие алгоритм Герцеля: первый (а) и второй (b) варианты реализации прямой цепи фильтра Герцеля

Алгоритм Герцеля позволяет вычислять значение k -го бина N -точечного ДПФ [13, 14]:

$$S_N(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n)W_N^{kn}, \quad W_N^{kn} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right), \quad (1)$$

и представляет собой БИХ-фильтр второго порядка с двумя действительными коэффициентами в обратной цепи (слева от пунктирной линии) и одним комплексным коэффициентом в прямой цепи фильтра (справа от пунктирной линии). Возможен вариант реализации алгоритма Герцеля в виде БИХ-фильтра, структура которого приведена на рис. 1, b [4]. Варианты отличаются друг от друга реализацией прямой цепи фильтра. Разностные уравнения фильтра Герцеля задаются следующими соотношениями:

$$v(n) = 2 \cos(2\pi k/N)v(n-1) - v(n-2) + x(n) \quad (2)$$

— обратная цепь фильтра (см. рис. 1, a, b),

$$y(n) = v(n) - W_N^k v(n-1); \quad y(n) = W_N^{-k} v(n) - v(n-1) \quad (3)$$

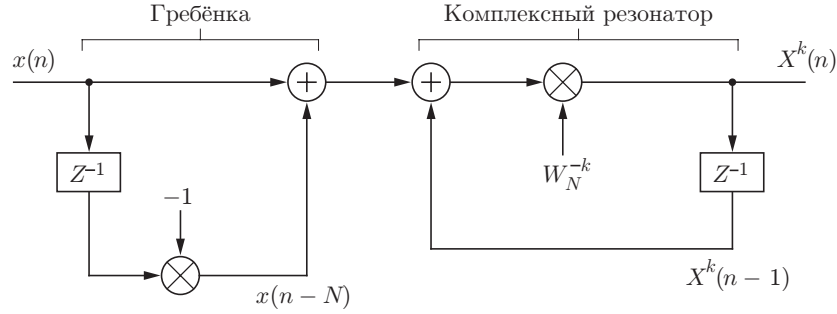
— прямая цепь фильтра (см. рис. 1, a, b соответственно).

Обычно фильтр Герцеля, как справедливо отмечено в [4], используется нестандартно, не как традиционный фильтр, в котором сохраняются и запоминаются все выходные отсчеты. В алгоритме Герцеля обработка сигнала проводится блочно: запоминается только каждое $(N-1)$ -е значение выходного отсчета, т. е. сохраняется $(N-1)$ -й отсчет k -го коэффициента, $(2N-1)$ -й отсчет k -го коэффициента и т. д.

Несложно видеть, что именно отказ от получения всех выходных отсчетов (следовательно, и их сохранения) в прямой цепи фильтра обеспечивает алгоритму Герцеля экономии в количестве вычислений по сравнению с определением k -го коэффициента ДПФ $S_N(k)$ согласно соотношению (1).

Недостатком фильтра Герцеля является фиксированность набора анализируемых частот: $\{2\pi(k)/(sN)\}$, где $k = 0, N/2 - 1, 0 \leq \theta < 1, N$ — число отсчетов сигнала в блоке, s — число блоков.

Следующим алгоритмом обнаружения отдельного тона, который обеспечивает получение значений спектральных отсчетов в реальном масштабе времени, является алгоритм скользящего ДПФ (СДПФ) [11].

Рис. 2. Структура фильтра однобинового СДПФ на k -й частоте

Алгоритм однобинового СДПФ позволяет рекуррентно вычислять значение k -го бина N -точечного ДПФ из скользящего окна в N отсчётов. Разностное уравнение СДПФ имеет вид [4]

$$X^k(n) = W_N^{-k}[X^k(n-1) + x(n) - x(n-N)], \quad (4)$$

реализация которого приводит к структуре КИХ-фильтра, приведённого на рис. 2.

Недостаток СДПФ такой же, как и у алгоритма Герцеля, — фиксированность набора анализируемых частот.

Рассмотрим ещё один алгоритм скользящего измерения, который является результатом обобщения однобинового СДПФ [4]. На основе понятий параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П)

$$\text{def}_p(p, l, \theta) = W_N^{(p+\theta)l} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(p+\theta)l\right], \quad 0 \leq \theta < 1, \quad p, l = \overline{0, N-1}, \quad (5)$$

и параметрического ДПФ (ДПФ-П)

$$S_N(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(k+\theta)n}, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (6)$$

введённых и исследованных в [13–21], в работе [4] предложено обобщение алгоритма однобинового СДПФ в виде однобинового скользящего ДПФ-П (СДПФ-П). Алгоритм СДПФ-П, во-первых, позволяет рекуррентно вычислять значение k -го бина N -точечного ДПФ-П из скользящего окна в N отсчётов; во-вторых, в отличие от стандартного СДПФ, даёт возможность проводить оценку спектра в окне в N отсчётов не на фиксированных частотах, а из набора частот, значения которых варьируются параметром θ :

$$\{2\pi(k+\theta)/N\}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (7)$$

Из соотношения (7) непосредственно следует, что алгоритм СДПФ-П обеспечивает полный контроль над резонансной частотой фильтра ДПФ-П.

Алгоритм СДПФ-П позволяет рекуррентно вычислять значения спектра $S_N(k)$ из скользящего окна длиной в N отсчётов при сдвиге сигнала в окне на каждом шаге на один отсчёт влево:

$$S_N^{(r)}(k, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+r)W_N^{(k+\theta)n}. \quad (8)$$

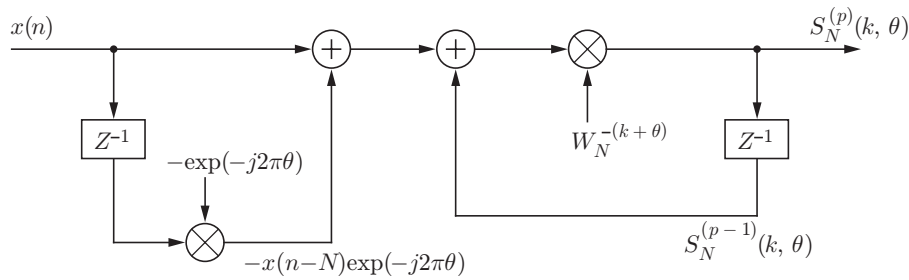


Рис. 3. Структура фильтра однобинового СДПФ-П на k -й частоте, $0 \leq \theta \leq 1$

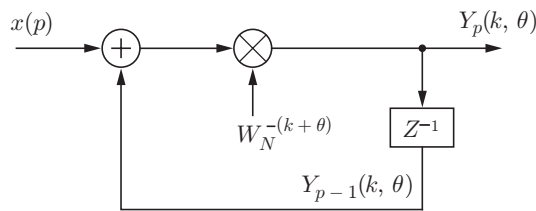


Рис. 4. Структура комплексного резонатора 2

Изменив в (8) индексирование отсчётов во времени так, чтобы входные отсчёты $x(n)$ и выходные отсчёты $S_N^{(r)}(k, \theta)$ имели одни и те же значения индекса времени, разностное уравнение СДПФ-П запишем в следующем виде [4]:

$$S_N^{(p)}(k, \theta) = W_N^{-(k+\theta)} [S_N^{(p-1)}(k, \theta) + x(p) - x(p-N) \exp(-j2\pi\theta)], \quad p = N, N+1, N+2, \dots \quad (9)$$

Данное уравнение может быть реализовано в виде обобщённого КИХ-фильтра [4].

Необходимо отметить, что переходная характеристика фильтра СДПФ-П (как и переходная характеристика фильтра СДПФ) имеет длину в N отсчётов.

Результаты сравнения эффективности рассмотренных методов приведены в работах [4, 7, 12], где показано, что алгоритмы СДПФ и СДПФ-П существенно проигрывают алгоритму Герцеля в числе операций, которые необходимо выполнить для выхода на установившийся режим (примерно в 4 раза по операциям действительных умножений и в 2 раза по операциям действительных сложений). После выхода на установившийся режим алгоритмы СДПФ и СДПФ-П во столько же раз превосходят алгоритм Герцеля.

Прежде чем перейти к изложению обобщённого алгоритма СДПФ-П (ОСДПФ-П), рассмотрим алгоритм работы комплексных резонаторов в структурах, показанных на рис. 2 и 3. Обозначим их как комплексные резонаторы 1 и 2 соответственно. Указанные резонаторы отличаются друг от друга резонансными частотами, значения которых определяются значениями k и $k + \theta$. Приведём вычисление выходных отсчётов комплексного резонатора 2 (рис. 4) как более общего случая.

Согласно (6) значение k -го бина ДПФ-П описывается соотношением

$$S_N(k, \theta) = x(0)W_N^{(k+\theta)0} + x(1)W_N^{(k+\theta)1} + \dots \\ \dots + x(N-2)W_N^{(k+\theta)(N-2)} + x(N-1)W_N^{(k+\theta)(N-1)}. \quad (10)$$

Комплексный резонатор 2 является БИХ-фильтром, разностное уравнение которого имеет вид

$$Y_p(k, \theta) = W_N^{-(k+\theta)} [x(p) + Y_{p-1}(k, \theta)], \quad (11)$$

где $p = 0, 1, \dots$ — номер шага. На шаге $p = (N - 1)$ значение выходного отсчёта комплексного резонатора 2 задаётся соотношением

$$Y_{N-1}(k, \theta) = x(0)W_N^{-(k+\theta)N} + x(1)W_N^{-(k+\theta)(N-1)} + \dots \\ \dots + x(N-2)W_N^{-(k+\theta)2} + x(N-1)W_N^{-(k+\theta)1}. \quad (12)$$

Вынося в выражении (12) $W_N^{-(k+\theta)N}$ за скобки, а также учитывая, что $W_N^{-kN} = 1$ и $W_N^{-\theta N} = \exp(j2\pi\theta)$, получим

$$Y_{N-1}(k, \theta) = \exp(j2\pi\theta)[x(0) + x(1)W_N^{(k+\theta)1} + \dots \\ \dots + x(N-2)W_N^{(k+\theta)(N-2)} + x(N-1)W_N^{(k+\theta)(N-1)}]. \quad (13)$$

Сравнивая полученное выражение с соотношением (10), устанавливаем, что на шаге $p = (N - 1)$ значение выходного отсчёта рассматриваемого резонатора имеет вид

$$Y_{N-1}(k, \theta) = \exp(j2\pi\theta)S_N(k, \theta). \quad (14)$$

Таким образом, если для комплексного резонатора 1 (значение параметра $\theta = 0$) выходной отсчёт на $(N - 1)$ -м шаге в точности равен k -му коэффициенту ДПФ (1), то для комплексного резонатора 2 выходной отсчёт на $(N - 1)$ -м шаге отличается от k -го коэффициента ДПФ-П (7) приращением фазы на $\varphi = \exp(j2\pi\theta)$.

Полученные результаты позволяют сделать важные выводы.

1. Действительно, выходной отсчёт резонатора 1 на шагах, удовлетворяющих соотношению $p = s(N - 1)$, где $s = 1, 2, \dots$, будет в точности равен k -му коэффициенту ДПФ, вычисленному по формуле

$$S_{sN}(k) = \sum_{p=0}^{sN-1} x(p)W_{sN}^{kp}, \quad W_{sN}^{kp} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{sN}kp\right), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

что позволяет проводить блочную обработку. Так как дискретные экспоненциальные функции $\text{def}(k, n) = \exp(-j(2\pi/N)kn) = W_N^{kn}$ обладают свойством периодичности $\text{def}(k, n \pm rN) = \text{def}(k, n)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, то сумму (15) можно представить в виде s сумм:

$$S_{sN}(k) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p)W_N^{kp} + \sum_{p=N}^{2N-1} x(p)W_N^{kp} + \dots + \sum_{p=(s-1)N}^{sN-1} x(p)W_N^{kp}. \quad (16)$$

Следовательно, разбив исходный сигнал на s блоков по N отсчётов в каждом, вычислив ДПФ каждого блока согласно (1) и просуммировав полученные значения, будем иметь результат, в точности совпадающий с (15), в чём несложно убедиться.

2. Выходной отсчёт резонатора 2 ($\theta \neq 0$) на шагах кратных $N - 1$ не будет равен k -му коэффициенту ДПФ-П, задаваемому формулой (6):

$$S_{sN}(k, \theta) = \sum_{p=0}^{sN-1} x(p)W_{sN}^{(k+\theta)p}, \quad (17)$$

так как ДЭФ-П (5) $\text{def}_p(k, n, \theta) = W_{sN}^{(k+\theta)p} = \exp(-j(2\pi/sN)(k + \theta)p)$, $k = \overline{0, sN - 1}$, $s = 1, 2, \dots$, не обладают свойством периодичности по переменной n : $\text{def}(k, n \pm rN, \theta) \neq \text{def}(k, n, \theta)$, $r = 0, 1, 2, \dots$.

Покажем, что и в этом случае возможно применение процедуры блочной обработки при её определённом обобщении (модификации).

Обобщение блочной обработки входного сигнала основывается на том, что ДЭФ-П, не обладая свойством периодичности по переменной n , обладают более общим свойством, названным одним из авторов [13, 14] свойством параметрической периодичности ДЭФ-П по переменной n :

$$\text{def}(k, n \pm rN, \theta) = \text{def}(k, n, \theta)W_N^{\pm\theta Nr}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Используя параметрическую периодичность ДЭФ-П, сумму (17) также можно записать в виде s сумм:

$$S_{sN}(k, \theta) = \exp(-j2\pi\theta) \sum_{p=0}^{N-1} x(p)W_N^{(k+\theta)p} +$$

$$+ [\exp(-j2\pi\theta)]^2 \sum_{p=N}^{2N-1} x(p)W_N^{(k+\theta)p} + \dots + [\exp(-j2\pi\theta)]^s \sum_{p=(s-1)N}^{sN-1} x(p)W_N^{(k+\theta)p}. \quad (19)$$

Исходя из выражения (19), модифицированную обработку входного сигнала можно представить в виде выполнения следующих этапов.

Этап 1. Разбиение исходного сигнала на s блоков по N отсчётов.

Этап 2. Вычисление k -го коэффициента ДПФ-П i -го блока (k_i) согласно (7).

Этап 3. Проведение фазового поворота k_i -го коэффициента ДПФ-П путём его умножения на $\{[\exp(-j2\pi\theta)]^i\}$.

Этап 4. Суммирование полученных результатов.

Несложно убедиться в том, что результат суммирования в точности совпадает с k -м коэффициентом ДПФ-П, вычисленным в соответствии с выражением (17).

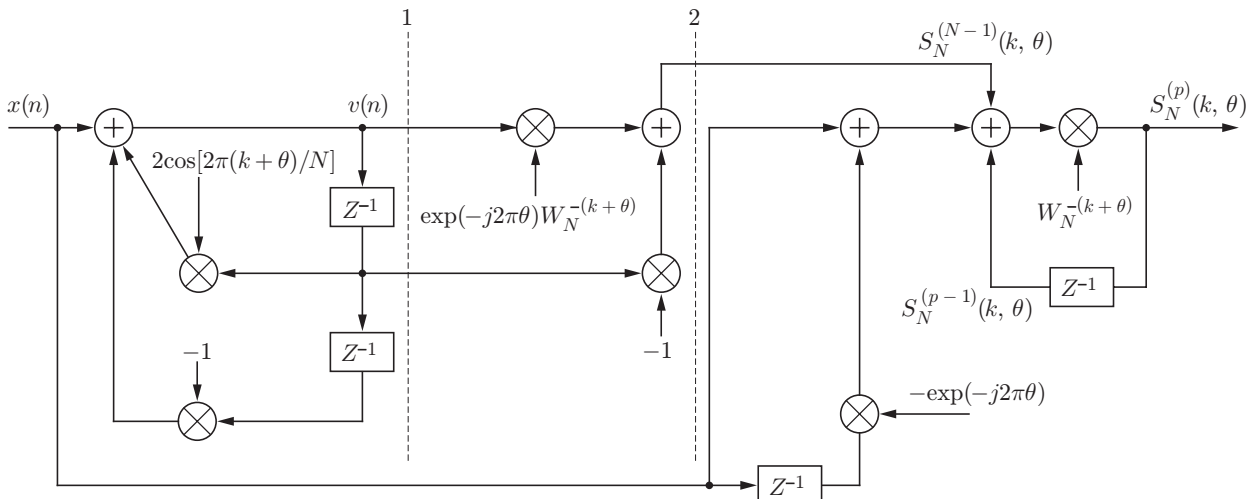


Рис. 5. Структура фильтра, реализующего ОСДФ-П на k -й частоте, $0 \leq \theta \leq 1$

Обобщение однобинового скользящего параметрического ДПФ. Как уже отмечалось, алгоритм СДПФ-П (и СДПФ) проигрывает алгоритму Герцеля в числе операций, которые необходимо выполнить для выхода на режим скользящего измерения.

Идея алгоритма ОСДПФ-П заключается в том, что, обобщая на основании выражения (14) структуру резонатора алгоритма Герцеля, её можно использовать для выхода алгоритма ОСДПФ-П на режим скользящего измерения. При проведении собственно скользящего измерения коэффициента ДПФ-П в дальнейшем переходим от БИХ-фильтра к КИХ-фильтру.

Структура предлагаемого обобщённого алгоритма приведена на рис. 5.

Заключение. Обобщённый алгоритм СДПФ-П, рассмотренный в данной работе, существенно сокращает по сравнению со стандартным алгоритмом СДПФ-П число операций, необходимых для выхода алгоритма СДПФ-П на режим скользящего измерения: примерно в 4 раза по операциям действительных умножений и в 2 раза по операциям действительных сложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Серебренников М. Г., Первозванский А. А.** Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965. 244 с.
2. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Бондаренко Ю. В.** О минимизации ошибки восстановления непрерывного периодического сигнала при его равномерной дискретизации // Автометрия. 2013. **49**, № 2. С. 3–11.
3. **Соколова Д. О., Спектор А. А.** Классификация движущихся объектов по спектральным признакам сейсмических сигналов // Автометрия. 2012. **48**, № 5. С. 112–119.
4. **Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.** Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 4. С. 2–7.
5. **Пономарева О. В., Алексеев В. А., Пономарев В. А.** Цифровой периодограмм-анализ и проблемы его практического применения // Вестн. ИжГТУ. 2013. № 2. С. 130–133.
6. **Пономарева О. В., Пономарева Н. В.** Модификация фильтра на основе частотной выборки для решения задач цифровой обработки случайных процессов со скрытыми периодичностями // Интеллектуальные системы в производстве. 2012. № 2(20). С. 122–129.
7. **Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарев В. А.** Обобщение алгоритма Герцеля для решения задач выявления скрытых периодичностей // Интеллектуальные системы в производстве. 2013. № 1(21). С. 41–46.
8. **Пономарев В. А., Пономарева О. В.** Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. 1983. № 9. С. 18–21.
9. **Оппенгейм Э.** Применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1980. 552 с.
10. **Неразрушающий контроль.** Справочник /Под общ. ред. В. В. Клюева. М.: Машиностроение, 2007. Т. 7. 829 с.
11. **Лайонс Р.** Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. М.: ООО «Бином-Пресс», 2007. 656 с.
12. **Пономарева О. В., Пономарева Н. В.** Повышение точности и расширение функциональных возможностей цифровых фильтров на основе частотной выборки // Приборы и методы измерений. 2013. № 2(5). С. 114–119.
13. **Пономарева О. В.** Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. 2010. № 2. С. 7–12.

14. **Пономарев В. А., Пономарева О. В.** Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2011. № 1. С. 2–6.
15. **Пономарев В. А., Пономарева О. В.** Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. 1984. **29**, № 8. С. 1561–1570.
16. **Пономарев В. А., Пономарева О. В.** Обобщение дискретного преобразования Фурье для интерполяции во временной области // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. **XXVI**, № 9. С. 67–68.
17. **Пономарева О. В.** Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 2. С. 2–5.
18. **Пономарева О. В.** Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2010. № 2(10). С. 36–42.
19. **Пономарев В. А., Пономарева О. В.** Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автометрия. 1983. № 4. С. 39–45.
20. **Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В.** Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. 2013. № 2. С. 10–15.
21. **Алексеев В. А., Пономарев В. А., Пономарева О. В.** Методология определения погрешностей измерения вероятностных характеристик случайных процессов, реализуемых процессорными измерительными средствами // Интеллектуальные системы в производстве. 2010. № 2(10). С. 91–99.

Поступила в редакцию 13 мая 2013 г.
