УДК 519.24 : 621.391

О МОЩНОСТИ ОДНОГО НОВОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ И ДВУХВЫБОРОЧНОГО КРИТЕРИЯ ВИЛКОКСОНА*

Г. И. Салов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6
E-mail: sgi@ooi.sscc.ru

Рассматривается один из подходов к проблеме отыскания подходящих критических значений статистик предложенного ранее автором нового непараметрического статистического критерия для задачи проверки гипотезы об однородности двух и трёх выборок. Критерий Вилкоксона эквивалентен частному («линейному») случаю предложенного критерия. Проводится сравнительный анализ этих критериев для случая, где критерий Вилкоксона является локально наиболее мощным среди ранговых критериев.

Ключевые слова: две выборки, три выборки, непараметрические критерии, критерий Вилкоксона, новый статистический критерий.

Введение. Данная работа является продолжением [1], где была введена форма нового непараметрического статистического критерия. Хорошо известный двухвыборочный критерий Вилкоксона эквивалентен частному («линейному») случаю этого критерия, когда критические значения нового критерия являются линейной функцией от одной из его статистик. Однако проблема отыскания оптимальных (или близких к ним) критических значений в [1] почти не затрагивалась.

Цель предлагаемой работы — исследование одного из подходов к этой проблеме. Поскольку непараметрические статистические критерии чрезвычайно полезны для приложений, изучение отношений между упомянутыми выше критериями — важная задача. Данный вопрос рассматривается, в частности, для случая альтернативной гипотезы, при которой критерий Вилкоксона будет локально наиболее мощным среди всех ранговых критериев. Введём традиционные обозначения [2, 3].

Пусть результатом наблюдений (измерений) являются две стохастически независимые совокупности независимых случайных величин $(X_1, \ldots, X_m)$ и $(Y_1, \ldots, Y_{2n})$ — на языке математической статистики это две выборки; выборка $(Y_1, \ldots, Y_{2n})$ содержит чётное число элементов. И пусть ставится задача проверки основной гипотезы H_0 об однородности этих выборок, согласно которой каждая из случайных величин X_i и Y_j подчиняется одной и той же (неизвестной) функции распределения, скажем F, против альтернативной гипотезы H_1, состоящей в том, что величины X_i имеют тенденцию принимать стохастически бо́льшие значения, чем величины Y_j, т. е. каждая из случайных величин X_i подчиняется уже другой функции распределения, которую обозначим через $G \leq F$, $G \not\equiv F$. Везде далее будем считать, что наблюдателю ничего не известно об истинных функциях F и G, за исключением того, что они непрерывные.

Ещё в 1945 году Вилкоксон [4] для проверки гипотезы об однородности двух выборок, когда ничего не известно о виде непрерывных распределений F и G или их параметрах, предложил тест (критерий), который называют непараметрическим ранговым. В 1947 году

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-07-00068).

Манн и Уитни [5] привели другую форму этого критерия Вилкоксона, именуемую часто критерием Манна — Уитни. Она основана на (считающей) статистике

$$U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2n} \mathbf{I}\{X_i > Y_j\} > C, \tag{1}$$

здесь и далее $\mathbf{I}\{A\}$ обозначает функцию-индикатор события A, равную 1, если событие A произошло, и 0 в противном случае. Критерий Манна — Уитни предписывает отклонять гипотезу H_0 в пользу H_1, когда $U > C$, где критическое значение C выбирается по заранее заданному уровню значимости α (т. е. допустимому значению α вероятности ошибочного отклонения гипотезы H_0, когда на самом деле H_0 верна). Он эквивалентен критерию Вилкоксона, поскольку статистики этих критериев отличаются лишь на константу, т. е. связаны соотношением, имеющим в рассматриваемом случае вид

$$U = 2mn + n(2n + 1) - S,$$

где S — статистика рангового критерия Вилкоксона (см., например, [3, 6]).

Насколько нам известно, возможность получения непараметрического статистического критерия, более мощного для многих распределений F и G, чем критерий Вилкоксона — Манна — Уитни (WMW), до сих пор не была замечена в литературе.

Формы нового S_E-критерия, основные результаты. Чтобы получить более мощный критерий, разобьём выборку $(Y_1, \ldots, Y_{2n})$ на две равные части. Для удобства станем обозначать через $Z_j = Y_{n+j}$, $j = 1, \ldots, n$, элементы второй части и введём в рассмотрение следующие события:

$$E_{ij}^{+} = \{X_i > \max(Y_j, Z_j)\}; \quad E_{ij}^{-} = \{X_i < \min(Y_j, Z_j)\}; \quad E_{ij}^{0} = \bar{E}_{ij}^{+} \cap \bar{E}_{ij}^{-}. \tag{2}$$

При нулевой гипотезе H_0 вероятность p^+ события E_{ij}^+ в точности равна вероятности p^- события E_{ij}^-: $p^+ = p^- = 1/3$. Тогда как при альтернативной гипотезе H_1 вероятность p^+ будет больше $1/3$ и больше вероятности p^-, которая будет уже меньше $1/3$. Таким образом, исходную задачу можно трактовать и как задачу проверки простой параметрической гипотезы $p^+ = p^-$ против сложной альтернативы $p^+ > p^-$. В связи с этим кажется естественным обратиться к следующим статистикам:

$$S_E^{+} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{E_{ij}^{+}\}; \quad S_E^{-} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{E_{ij}^{-}\}; \quad S_E^{0} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{E_{ij}^{0}\}, \tag{3}$$

принимающим значения от 0 до mn с суммой $S_E^+ + S_E^- + S_E^0 = mn$. Большое значение статистики S_E^+ может свидетельствовать против гипотезы H_0. При решении принять или отклонить гипотезу H_0 следует учесть и значения статистики S_E^0 или S_E^-. Эти соображения привели нас в [1] к следующей конструкции нового S_E-критерия:

$$S_E^{+} > h(S_E^{0}). \tag{4}$$

При необходимости проверки гипотезы H_0 против так называемой двусторонней альтернативы, где все величины X_i могут быть как стохастически больше, так и стохастически меньше, чем величины Y_j, конструкцию S_E-критерия можно эквивалентным образом представить и в несколько иной форме:

$$S_E^{+} - S_E^{-} > 2h(S_E^{0}) + S_E^{0} - mn \tag{4a}$$

с её очевидным двусторонним вариантом

$$|S_E^+ - S_E^-| > 2h(S_E^0) + S_E^0 - mn.$$

То, что формы (4), (4а) S_E-критерия эквивалентны, вытекает из равенства (эквивалентности) событий

$$\{S_E^+ > h(S_E^0)\} = \{S_E^+ - (mn - S_E^0)/2 > h(S_E^0) - (mn - S_E^0)/2\}.$$

Простейший и наиболее общий результат здесь состоит в следующем утверждении.

Лемма. Критерий Вилкоксона — Манна — Уитни эквивалентен частному случаю критерия (4), когда $h(z)$ — линейная убывающая функция вида $2h(z) \equiv C - z$, $z = 0, 1, \ldots, mn$ (здесь и далее C есть в точности то же самое число, которое входит в критерий (1)).

Доказательство следует из равенств событий

$$\{S_E^+ > (C - S_E^0)/2\} = \{2S_E^+ + S_E^0 > C\} = \{U > C\},$$

где U — статистика из (1).

Непосредственно из последнего получаем следующий вариант леммы, который не менее полезен в проводимом изучении.

Лемма А. WMW-критерий эквивалентен критерию

$$S_E^+ - S_E^- > C - mn. \tag{5}$$

Поскольку пара статистик (S_E^+, S_E^-) полнее информирует о (p^+, p^-), чем просто разность $S_E^+ - S_E^-$, можно полагать, и опыт до некоторой степени подтверждает это, что выбор в (4) (или (4а)) нелинейной функции $h(z)$ позволит получить критерий (во многих случаях) более высокой мощности, чем WMW-критерий. Это необходимо выяснить. Далее ради простоты в качестве основного будем рассматривать односторонний S_E-критерий вида (4).

Итак, проблема заключается в отыскании $h(z)$. Поскольку о виде распределений F и G нет никакой информации, то едва ли не единственный выход состоит в том, чтобы применить известную в математической статистике концепцию «близких альтернатив», т. е. альтернативных гипотез, близких к основной гипотезе (но отличных от неё), надеясь, что полученная критическая область (критерий) будет так же хороша для далёких альтернатив (см., например, [7, с. 405; 8]). Когда близкая альтернативная гипотеза зависит от параметра, принимающего значения на вещественной прямой, проблему можно в известном смысле редуцировать к значительно более простой задаче.

Точные выражения для мощностей анализируемых здесь критериев S_E и WMW получить нелегко, исключая несколько частных случаев, где возникающие интегралы удаётся отыскать в явном виде. Один из них — случай с альтернативным распределением вида

$$G = (1 - a)F + aF^2 \tag{6}$$

(при $a = 0$ имеем нулевую гипотезу H_0). Этот случай примечателен ещё и тем, что при альтернативе (6) для достаточно малых $a > 0$ WMW-критерий является наиболее мощным среди ранговых критериев (см., например, [2, гл. 6, п. 12, задача 28]), т. е. данная альтернатива весьма благоприятна для WMW-критерия. Поэтому, обращаясь к концепции близких гипотез, чтобы в большем числе случаев застраховаться от нежелательных в будущем ошибочных решений, естественно взять в качестве близкой к H_0 именно гипотезу с распределением (6).

Таким образом, нам требуется для некоторого фиксированного значения a^* параметра a в (6) рассмотреть задачу проверки двух простых гипотез H_0 и $H_1^* = H_1^*(a^*)$ по статистикам S_E^+ и S_E^0. Другими словами, надо найти оптимальную (или близкую к ней) критическую область, а вместе с ней и оптимальные (или близкие к ним) критические значения $h(z)$, $z = 0, \ldots, mn$. Для отыскания такой области воспользуемся нерандомизированным вариантом известной леммы Неймана — Пирсона. При этом будет получено и числовое доказательство, в частности, следующего утверждения, являющегося также одним из главных результатов данной работы.

Утверждение. Применение леммы Неймана — Пирсона при $0 < a^* < \gamma$, где граничное значение $\gamma = \gamma(m, n, \alpha)$ убывает с ростом m и n, приводит к S_E-критерию (4) с функцией $h(z)$ вида $2h(z) \equiv C - z$, $z = 0, 1, \ldots, mn$, т. е. к критерию, эквивалентному WMW-критерию. Применение же леммы Неймана — Пирсона при $a^* > \gamma$ даёт S_E-критерий, который для своего уровня значимости при $a = a^*$ в (6) является более мощным, чем WMW-критерий, при этом часто полученное преимущество возрастает вместе с $a > a^*$.

Преимущество построенного S_E-критерия заметно также и в случаях с экспоненциальными и равномерными распределениями.

Для доказательства этого утверждения получим сначала распределения статистик (3) при каждой из гипотез.

Пусть $\mathfrak{P}(u, v)$ — множество всех упорядоченных представлений $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(n)$ числа n в виде суммы $(m+1)^2$ целых неотрицательных (≥ 0) чисел (представления различаются или порядком следования чисел, или самими числами), обозначенных

$$n_{00}, n_{01}, \ldots, n_{0m}, n_{10}, n_{11}, \ldots, n_{1m}, \ldots, n_{m0}, n_{m1}, \ldots, n_{mm}$$

и таких, что

$$\sum_{h=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} (m - \max(h, q)) n_{hq} = u; \quad \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \min(h, q) n_{hq} = v. \tag{7}$$

Удобно положить $0! = 1$.

Предложение 1 [1]. В соответствии со сделанными предположениями при $m, n \geq 2$

$$\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\, S_E^- = v \,|\, H_0\} = \frac{m!n!}{(m+2n)!} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(u,v)} \Big(\prod_{i=0}^{m} s_i! \Big) \Big(\prod_{h,q=0}^{m} n_{hq}! \Big)^{-1}, \tag{8}$$

здесь и далее

$$s_i = \sum_{h=0}^{m} (n_{hi} + n_{ih}), \quad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Обозначив

$$p_0(u, z) = \mathbf{P}\{S_E^+ = u, S_E^0 = z \,|\, H_0\} = \mathbf{P}\{S_E^+ = u, S_E^- = mn - u - z \,|\, H_0\},$$

уровень значимости S_E-критерия (4) можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{S_E^+ > h(S_E^0) \,|\, H_0\} = \sum_{z=0}^{mn} \sum_{u=h(z)+1}^{mn-z} p_0(u, z). \tag{10}$$

Предложение 2. Пусть $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_{2n}$ — независимые случайные величины и при H_1 каждая из величин Y_j имеет функцию распределения вероятностей F, а каждая из величин X_i — функцию распределения (6). Тогда вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+ = u, S_E^- = v \mid H_1\}$ при $m, n \geq 2$ допускает представление

$$m!n! \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(u,v)} \Big(\prod_{i=0}^{m} s_i!\Big)\Big(\prod_{h,q=0}^{m} n_{hq}!\Big)^{-1} \sum_{i=0}^{m} \frac{(2a)^i(1-a)^{m-i}}{(2n+m+i)!} A_{m,i}, \tag{11}$$

где s_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, как и прежде, определяются формулой (9); $A_{m,0} = 1$; числа $A_{m,i}$, $i = 1, \ldots, m$, могут быть получены повторным применением рекуррентных соотношений для $j = 2, 3, \ldots, m$:

$$A_{j,1} = A_{j-1,1} + S_{j-1};$$

$$A_{j,i} = A_{j-1,i} + A_{j-1,i-1}(S_{j-1} + i - 1), \quad i = 2, 3, \ldots, j-1; \tag{12}$$

$$A_{j,j} = A_{j-1,j-1}(S_{j-1} + j - 1),$$

где $A_{1,1} = s_0 + 1$; $S_{j-1} = s_0 + s_1 + \ldots + s_{j-1} + j$.

Доказательство. В силу предположения непрерывности функций F и G, не теряя общности, можно считать, что величины $X_1, \ldots, X_m$ имеют различные значения (вероятность того, что все X_i, $i = 1, \ldots, m$, попарно различны, равна 1). Обозначим через $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(m)}$ эти величины, расположенные в порядке их возрастания.

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Введём в рассмотрение $m + 1$ открытых промежутков $I_0 = (-\infty, x_1)$, $I_h = (x_h, x_{h+1})$, $h = 1, 2, \ldots, m-1$, $I_m = (x_m, \infty)$ и $(m+1)^2$ прямоугольников вида $I_{hq} = I_h \times I_q$, $h, q = 0, 1, \ldots, m$. Учитывая предположенную непрерывность $F(x)$, для вероятности p_h попадания случайной величины Y_j (или Z_j) в промежуток I_h, $h = 0, 1, \ldots, m$, имеем очевидные равенства

$$p_0 = F(x_1), \qquad p_h = F(x_{h+1}) - F(x_h), \quad h = 1, 2, \ldots, m-1, \; p_m = 1 - F(x_m).$$

Далее, предположение о независимости наблюдений приводит к тому, что вероятность попадания пары (Y_j, Z_j) в прямоугольник I_{hq} есть $p_{hq} = p_h p_q$.

Отсюда вероятность того, что из всех n пар (Y_j, Z_j) ровно n_{00} пар попадёт в прямоугольник I_{00}, а также в свою очередь ровно n_{hq} пар попадёт в прямоугольник I_{hq} $(h, q = 0, 1, \ldots, m)$, даётся полиномиальным распределением и равна

$$\frac{n!}{n_{00}!n_{01}!\ldots n_{0m}!n_{10}!n_{11}!\ldots n_{m(m-1)}!n_{mm}!} p_{00}^{n_{00}} p_{01}^{n_{01}} \ldots p_{0m}^{n_{0m}} p_{10}^{n_{10}} p_{11}^{n_{11}} \ldots p_{m(m-1)}^{n_{m(m-1)}} p_{mm}^{n_{mm}} =$$

$$= \frac{n!}{n_{00}!n_{01}!\ldots n_{0m}!n_{10}!n_{11}!\ldots n_{m(m-1)}!n_{mm}!} \{F(x_1)\}^{2n_{00}} \{F(x_1)[F(x_2) - F(x_1)]\}^{n_{01}} \times \ldots$$

$$\ldots \times \{F(x_1)[1 - F(x_m)]\}^{n_{0m}} \{[F(x_2) - F(x_1)]F(x_1)\}^{n_{10}} \{F(x_2) - F(x_1)\}^{2n_{11}} \times \ldots$$

$$\ldots \times \{[F(x_m) - F(x_{m-1})][1 - F(x_m)]\}^{n_{m(m-1)}} \{1 - F(x_m)\}^{2n_{mm}} =$$

$$= \frac{n!}{n_{00}!n_{01}!\dots n_{0m}!n_{10}!n_{11}!\dots n_{m(m-1)}!n_{mm}!}[F(x_1)]^{s_0}[F(x_2)-F(x_1)]^{s_1}\times$$

$$\times[F(x_3)-F(x_2)]^{s_2}\dots[F(x_m)-F(x_{m-1})]^{s_{m-1}}[1-F(x_m)]^{s_m}.$$

Если при этом $X_{(1)}=x_1, X_{(2)}=x_2,\dots,X_{(m)}=x_m$, то согласно (3) будем иметь

$$S_E^+=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{h,q=0}^{i}n_{hq};\quad S_E^-=\sum_{i=1}^{m}\sum_{h,q=i}^{m}n_{hq}. \tag{13}$$

Из представлений (13) с помощью индукции (по m) следуют левые части равенств (7), более простые с вычислительной точки зрения.

Таким образом, условная вероятность

$$\mathbf{P}\{S_E^+=u,\ S_E^-=v\,|\,X_{(1)}=x_1,\dots,X_{(m)}=x_m\}$$

может быть записана в виде

$$n!\sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}(u,v)}\Big(\prod_{h,q=0}^{m}n_{hq}!\Big)^{-1}[F(x_1)]^{s_0}[F(x_2)-F(x_1)]^{s_1}\times$$

$$\times[F(x_3)-F(x_2)]^{s_2}\dots[F(x_m)-F(x_{m-1})]^{s_{m-1}}[1-F(x_m)]^{s_m}.$$

Чтобы получить вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+=u, S_E^-=v\,|\,H_1\}$, надо проинтегрировать последнее выражение по распределению величин $X_{(1)},\dots,X_{(m)}$. Напомним, что элемент распределения величин $X_{(1)},\dots,X_{(m)}$ при H_1 равен $m!dG(x_1)\dots dG(x_m)$ внутри области, где $-\infty<x_1<x_2<\dots<x_m<\infty$, и 0 вне её [9]. Поэтому

$$\mathbf{P}\{S_E^+=u,\ S_E^-=v\,|\,H_1\}=m!n!\sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}(u,v)}\Big(\prod_{h,q=0}^{m}n_{hq}!\Big)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}[1-F(x_m)]^{s_m}dG(x_m)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{x_m}[F(x_m)-F(x_{m-1})]^{s_{m-1}}dG(x_{m-1})\times\dots\times\int_{-\infty}^{x_3}[F(x_3)-F(x_2)]^{s_2}dG(x_2)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{x_2}[F(x_2)-F(x_1)]^{s_1}F(x_1)^{s_0}dG(x_1)=$$

$$=m!n!\sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}(u,v)}\Big(\prod_{h,q=0}^{m}n_{hq}!\Big)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}[1-F(x_m)]^{s_m}[(1-a)+2aF(x_m)]dF(x_m)\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{x_m} [F(x_m) - F(x_{m-1})]^{s_{m-1}} [(1-a) + 2aF(x_{m-1})] dF(x_{m-1}) \times \ldots$$

$$\ldots \times \int_{-\infty}^{x_3} [F(x_3) - F(x_2)]^{s_2} [(1-a) + 2aF(x_2)] dF(x_2) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{x_2} [F(x_2) - F(x_1)]^{s_1} F(x_1)^{s_0} [(1-a) + 2aF(x_1)] dF(x_1). \qquad (14)$$

Переходя последовательно к новым переменным $y_1, \ldots, y_m$ по формуле $y_i = F(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$, m-кратный интеграл в (14) приведём к виду

$$\int_0^1 [1 - y_m]^{s_m} [(1-a) + 2ay_m] dy_m \int_0^{y_m} [y_m - y_{m-1}]^{s_{m-1}} [(1-a) + 2ay_{m-1}] dy_{m-1} \times \ldots$$

$$\ldots \times \int_0^{y_3} [y_3 - y_2]^{s_2} [(1-a) + 2ay_2] dy_2 \int_0^{y_2} [y_2 - y_1]^{s_1} y_1^{s_0} [(1-a) + 2ay_1] dy_1. \qquad (15)$$

Для интеграла по y_1 имеем (см., например, [10, п. 855.51])

$$\int_0^{y_2} [y_2 - y_1]^{s_1} y_1^{s_0} [(1-a) + 2ay_1] dy_1 = (1-a) \int_0^{y_2} [y_2 - y_1]^{s_1} y_1^{s_0} dy_1 + 2a \int_0^{y_2} [y_2 - y_1]^{s_1} y_1^{s_0+1} dy_1 =$$

$$= (1-a) \frac{s_0! s_1!}{(s_0 + s_1 + 1)!} y_2^{s_0+s_1+1} + 2a \frac{s_0! s_1!}{(s_0 + s_1 + 2)!} (s_0 + 1) y_2^{s_0+s_1+2}.$$

Подставив это выражение в (15) и обозначив $A_{1,1} = s_0 + 1$, для интеграла по y_2 подобным образом получим

$$(1-a) \frac{s_0! s_1!}{(s_0 + s_1 + 1)!} \times$$

$$\times \Big[(1-a) \frac{(s_0 + s_1 + 1)! s_2!}{(s_0 + s_1 + s_2 + 2)!} y_3^{s_0+s_1+s_2+2} + 2a \frac{(s_0 + s_1 + 2)! s_2!}{(s_0 + s_1 + s_2 + 3)!} y_3^{s_0+s_1+s_2+3} \Big] +$$

$$+ \Big[(1-a) \frac{(s_0 + s_1 + 2)! s_2!}{(s_0 + s_1 + s_2 + 3)!} y_3^{s_0+s_1+s_2+3} + 2a \frac{(s_0 + s_1 + 3)! s_2!}{(s_0 + s_1 + s_2 + 4)!} y_3^{s_0+s_1+s_2+4} \Big] =$$

$$= (1-a)^2 \frac{s_0!s_1!s_2!}{(s_0+s_1+s_2+2)!} y_3^{s_0+s_1+s_2+2} + 2a(1-a)\frac{s_0!s_1!s_2!}{(s_0+s_1+s_2+3)!} A_{2,1} y_3^{s_0+s_1+s_2+3} +$$

$$+ 4a^2 \frac{s_0!s_1!s_2!}{(s_0+s_1+s_2+4)!} A_{2,2} y_3^{s_0+s_1+s_2+4}, \tag{16}$$

где $A_{2,1} = A_{1,1} + (s_0+s_1+2)$; $A_{2,2} = A_{1,1}(s_0+s_1+3)$.

Подставляя (16) в (15), для интеграла по y_3 от первого слагаемого в (16) будем иметь

$$(1-a)^3 \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!}{(s_0+s_1+s_2+s_3+3)!} y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+3} +$$

$$+ 2a(1-a)^2 \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!(s_0+s_1+s_2+3)}{(s_0+s_1+s_2+s_3+4)!} y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+4}.$$

Аналогично для интеграла от второго слагаемого в (16) находим

$$2a(1-a)^2 \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!}{(s_0+s_1+s_2+s_3+4)!} A_{2,1} y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+4} +$$

$$+ 4a^2(1-a) \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!}{(s_0+s_1+s_2+s_3+5)!} A_{2,1}(s_0+s_1+s_2+4) y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+5}.$$

Наконец, интеграл от третьего слагаемого имеет вид

$$4a^2(1-a) \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!}{(s_0+s_1+s_2+s_3+5)!} A_{2,2} y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+5} +$$

$$+ 8a^3 \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!}{(s_0+s_1+s_2+s_3+6)!} A_{2,2}(s_0+s_1+s_2+5) y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+6}.$$

Суммируя найденные соотношения, для интеграла по y_1, y_2, y_3 в (15) получаем

$$(1-a)^3 \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!}{(s_0+s_1+s_2+s_3+3)!} y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+3} +$$

$$+ 2a(1-a)^2 \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!}{(s_0+s_1+s_2+s_3+4)!} A_{3,1} y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+4} +$$

$$+ 4a^2(1-a) \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!}{(s_0+s_1+s_2+s_3+5)!} A_{3,2} y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+5} +$$

$$+ 8a^3 \frac{s_0!s_1!s_2!s_3!}{(s_0+s_1+s_2+s_3+6)!} A_{3,3} y_4^{s_0+s_1+s_2+s_3+6},$$

где $A_{3,1} = A_{2,1}+(s_0+s_1+s_2+3)$; $A_{3,2} = A_{2,2}+A_{2,1}(s_0+s_1+s_2+4)$; $A_{3,3} = A_{2,2}(s_0+s_1+s_2+5)$.

Завершается доказательство представления для интеграла в (15) по $y_1, \ldots, y_k$ математической индукцией по $k > 3$ с учётом того, что согласно (9)

$$\sum_{i=0}^{m} s_i = \sum_{i=0}^{m}\sum_{q=0}^{m}(n_{qi} + n_{iq}) = 2n.$$

Предложение 2 доказано.

Обозначим через $H_1^* = H_1^*(a^*)$ альтернативную гипотезу с распределением (6) при заданном (фиксированном) значении $a = a^*$ и введём в рассмотрение совместное распределение $p_1^*(u, z)$ статистик S_E^+ и S_E^0 при этой гипотезе:

$$p_1^*(u, z) = \mathbf{P}\{S_E^+ = u,\ S_E^0 = z \,|\, H_1^*\} = \mathbf{P}\{S_E^+ = u,\ S_E^- = mn - u - z \,|\, H_1^*\}.$$

Тогда мощность S_E-критерия вида (4) для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1^* можно записать в виде (ср. с (10))

$$\mathbf{P}\{S_E^+ > h(S_E^0) \,|\, H_1^*\} = \sum_{z=0}^{mn}\ \sum_{u=h(z)+1}^{mn-z} p_1^*(u, z). \tag{17}$$

Обратимся теперь к отысканию оптимальных (или близких к ним) критических значений $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, mn$. Если гипотеза H_0 отклоняется, когда пара значений статистик S_E^+ и S_E^0 попадает в область W, и принимается в противном случае, то область W называют критической (часто для краткости отождествляют её с понятием критерия), а вероятность $\mathbf{P}\{(S_E^+, S_E^0) \in W \,|\, H_1^*\}$ попадания в эту область, когда верна альтернативная гипотеза H_1^*, — мощностью этой области и критерия. Оптимальная критическая область (ОКО) W_L^* с уровнем значимости, не превосходящим заранее заданный уровень значимости α (в нашем случае в качестве заранее заданного уровня α будет выступать уровень значимости WMW-критерия), в соответствии с фундаментальной леммой Неймана — Пирсона (см., например, [2, гл. 3, п. 2]) может быть построена следующим образом. Обозначим через e_{ij} событие $(u_i, z_j) \equiv \{S_E^+ = u_i, S_E^0 = z_j\}$. Все возможные события e_{ij} удобно пронумеровать (расположить в памяти ЭВМ) в порядке убывания (не возрастания) величин $L^*(e_i) = p_1^*(e_i)/p_0(e_i)$, т. е. так, чтобы

$$L^*(e_1) \geq L^*(e_2) \geq \ldots \geq L^*(e_k) \geq L^*(e_{k+1}) \geq \ldots .$$

Именно в этом порядке надо включать события e_k в ОКО W_L^*. Процедура включения продолжается до события с номером K (включительно) такого, что добавление очередного события e_{K+1} приводит к неравенству («перескоку»)

$$\sum_{i=1}^{K+1} p_0(e_i) = \alpha_{K+1} > \alpha.$$

Область W_L^* является оптимальной в том смысле, что не существует другой области с уровнем значимости, не превосходящим α_K, которая имеет бóльшую мощность, чем W_L^*.

В случае $\alpha_K < \alpha$ для более точного сравнения с WMW-критерием может быть построена критическая область (области) W^* с уровнем значимости, не превосходящим α, более мощная, чем W_L^*, но уже не оптимальная. Элементами (событиями) такой области

W^* являются все (или почти все) элементы ОКО W_L^* и некоторые из последующих элементов $e_{K+2}, e_{K+3}, \ldots$ (соответственно $e_{K+1}, e_{K+2}, \ldots$).

Если событие $e = (u, z)$ попало в ОКО W_L^*, может интуитивно показаться, что последней должно принадлежать и событие $e' = (u+1, z)$, когда оно возможно. Оказывается, возможны ситуации (довольно редкие), где это не так. Однако поскольку для такого события значение $L^*(e')$ обычно сравнительно большое, для удобства оно может быть включено в критическую область W^*. Это позволит всякий раз для фиксированного z в качестве $h(z)$ взять $c(z) - 1$, где $c(z)$ — наименьшее из тех значений u, для которых пара (u, z) принадлежит W^*.

Сравнение критериев. Числовые примеры. Приведём теперь числовые примеры, которые не только иллюстрируют в какой-то мере отношение между рассматриваемыми статистическими критериями при различных значениях a, m и n, но и подсказывают некоторые соображения для отыскания подходящих критических значений $h(z)$. В примерах сначала с помощью леммы Неймана — Пирсона находятся варианты $W^* = W^*(a^*)$ критической области W и определяемые ими критические значения $h^*(z) = h(z, a^*)$, $z = 0, 1, \ldots, mn$. Затем для сравнения полученных таким образом вариантов S_E-критерия с WMW-критерием вычисляются их мощности при разных значениях a в случае (6), а также θ в случаях альтернатив с экспоненциальными и равномерными распределениями, для которых удаётся получить возникающие интегралы в явном виде. Для определённости и простоты положим

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \quad \text{при } x \geq 0, \tag{18}$$

$$G(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(x-\theta)} \quad \text{при } x \geq \theta,\ \theta > 0, \tag{19}$$

и соответственно

$$F(x) = x \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \tag{20}$$

$$G(x) = \frac{x-\theta}{1-\theta} \quad \text{при } \theta \leq x \leq 1,\ 0 \leq \theta < 1. \tag{21}$$

Предложение 3 [1]. Пусть $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_{2n}$ — независимые случайные величины и пусть каждая из величин Y_j имеет функцию распределения вероятностей (18), а каждая из величин X_i — функцию распределения (19), что соответствует альтернативной гипотезе H_1.

Тогда вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\ S_E^- = v \mid H_1\}$ можно записать в виде

$$m!n! \sum_{\mathfrak{p}(n) \in \mathfrak{P}(n)} \Big(\prod_{k=0}^{m} s_k!\Big)\Big(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}!\Big)^{-1} \sum_{r=0}^{s_0} b_0^{s_0 - r} b_1^{2n - s_0 + r}[(m+2n-s_0+r)!(s_0-r)!]^{-1}, \tag{22}$$

где $b_0 = 1 - \exp(-\theta)$; $b_1 = 1 - b_0$.

Представление (22) будет верным и для равномерного распределения (20), (21), если в случае последнего переобозначить $b_0 = \theta$ [1].

Чтобы не выйти далеко за рамки объёма публикации, обратимся лишь к нескольким случаям с различными значениями m и n. Применение леммы Неймана — Пирсона при всех достаточно малых фиксированных значениях параметра a в (6), а именно при $a^* < \gamma(m, n, \alpha)$, даёт такую ОКО $W_L^* = W_L^*(a^*)$, что определяемые ею критические значения равны $2h(z) \equiv C - z$, $z = 0, 1, \ldots, mn$, т. е. даёт ОКО и определяемый ею S_E-критерий,

Таблица 1

Значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 10$, определяемые областью $W_L^*(0{,}52)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	8	7	7	6	5	4	4	3	2	1	0

эквивалентные выбранному для сравнения WMW-критерию с уровнем значимости α (см. лемму). Начнём с простейшего случая.

Случай с $m = 5$, $2n = 4$. Остановимся на этом случае несколько подробнее. Значение C в (1) взято равным 15. Соответствующий этому значению C уровень значимости WMW-критерия $\alpha = 0{,}(095238)$ — бесконечная периодическая десятичная дробь. Применение леммы Неймана — Пирсона при значении a^* меньшем или равном, в частности, 0,337 приводит к S_E-критерию, эквивалентному WMW-критерию. Применение при $a^* = 0{,}338$ даёт S_E-критерий, который уже отличается от эквивалентного и в соответствии с леммой Неймана — Пирсона, по меньшей мере при $a = 0{,}338$, является для своего уровня значимости более мощным, чем WMW-критерий. Эта картина полностью сохраняется до использования леммы Неймана — Пирсона при значении a^* близком к 0,52. Эта лемма при $a^* = 0{,}52$ даёт третий (последний) вариант ОКО $W_L^* = W_L^*(0{,}52)$ с уровнем значимости равным 0,0(925). Определяемые этой областью критические значения для S_E-критерия приведены в табл. 1.

В табл. 2–4 сравниваются значения мощности WMW-критерия (в третьей строке каждой из таблиц с точностью, достаточной для сравнения) и построенного S_E-критерия

Таблица 2

Мощности критериев Вилкоксона и S_E при альтернативе (6)

a^*	a									
	0,0	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,75	0,8	0,9	1,0
—	0,0952	0,0966	0,1096	0,1430	0,1829	0,2298	0,2427	0,2560	0,2840	0,3139
0,52	0,0925	0,0938	0,1063	0,1389	0,1794	0,2290	0,2430	0,2577	0,2891	0,3236

Таблица 3

Мощности критериев Вилкоксона и S_E при альтернативе (19)

a^*	θ									
	0,0	0,01	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0
—	0,0952	0,0993	0,140	0,375	0,634	0,797	0,887	0,936	0,963	0,987
0,52	0,0925	0,0973	0,146	0,431	0,724	0,881	0,952	0,981	0,993	0,999

Таблица 4

Мощности критериев Вилкоксона и S_E при альтернативе (21)

a^*	θ									
	0,0	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95
—	0,0952	0,0956	0,099	0,143	0,288	0,486	0,712	0,821	0,920	0,963
0,52	0,0925	0,0930	0,097	0,149	0,326	0,560	0,802	0,902	0,973	0,992

Таблица 5

Значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, определяемые ОКО $W_L^*(0{,}11)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
h	35	35	35	34	34	33	33	32	31	31	30	30	29	29	28	28	27	27	26
z	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	...	50
h	26	25	25	24	24	23	22	22	21	21	20	20	19	18	17	16	15	...	0

при разных a в (6), а также θ в (19) и (21). В вертикальных колонках с заголовком $a = 0{,}0$ (или $\theta = 0{,}0$) даны уровни значимости критериев.

Случай с $m = 2n = 10$. Пусть сначала C в (1) равно 71. Тогда уровень значимости WMW-критерия $\alpha = 0{,}0525612$ (с точностью до семи цифр после запятой). Область, где S_E-критерий для своего уровня значимости является более мощным, чем WMW-критерий, здесь значительно шире, а число вариантов ОКО W_L^* гораздо больше, чем в предыдущем случае. Уже при $a^* = 0{,}08$ применение леммы Неймана — Пирсона дало S_E-критерий, для своего уровня значимости более мощный, чем WMW-критерий, а при $a^* = 0{,}11$ привело к S_E-критерию, более мощному при $a \geq 0{,}11$, чем WMW-критерий с уровнем значимости α.

Переходя к более подробному изложению, остановимся на последнем случае. Применение леммы Неймана — Пирсона при $a^* = 0{,}11$ дало ОКО $W_L^*(0{,}11)$ с уровнем значимости $\simeq 0{,}0525333$ и мощностью 0,0689008 при $a = 0{,}11$, что несколько меньше мощности WMW-критерия, которая равна 0,0689344. Определяемые ОКО $W_L^*(0{,}11)$ критические значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, приведены в табл. 5.

Чтобы по возможности точнее приблизить уровень значимости S_E-критерия к значению α только для более аккуратного (корректного) сравнения мощности критериев, в критическую область $W^*(0{,}11)$ были включены все события ОКО $W_L^*(0{,}11)$, кроме (36, 0) и (36, 1), а из числа не попавших в $W_L^*(0{,}11)$ включено событие (35, 2). Для этого приведённые в табл. 5 критические значения были переопределены следующим образом: $h(0) = h(1) = 36$, $h(2) = 34$. При этом уровень значимости переопределённого S_E-критерия оказался равен 0,0525610 (с точностью до семи цифр после запятой), что меньше уровня значимости WMW-критерия, в то время как мощность при $a = 0{,}11$ в (6) оказалась равной 0,0689348, что уже больше мощности WMW-критерия с уровнем значимости α (см. выше).

Весьма важно выяснить, что получается при других значениях a и a^* (при других близких альтернативах). Применение леммы Неймана — Пирсона при $a^* = 0{,}5$ дало ОКО $W_L^*(0{,}5)$ с уровнем значимости $\simeq 0{,}0520899$ и мощностью 0,159353 при $a = 0{,}5$, что меньше мощности WMW-критерия, которая равна 0,159557. Отвечающие этой области критические значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, приведены в табл. 6.

Для более аккуратного сравнения критериев в критическую область $W^*(0{,}5)$ были включены все события ОКО $W_L^*(0{,}5)$ и дополнительно событие (33, 7).

Таблица 6

Значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, определяемые ОКО $W_L^*(0{,}5)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
h	36	36	35	35	34	34	33	33	32	32	31	30	30	29	28	28	27	27	26
z	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	...	50
h	25	25	24	24	23	22	22	21	20	20	19	18	18	17	16	16	15	...	0

Таблица 7

Значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, определяемые ОКО $W_L^*(0{,}8)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
h	37	36	36	36	35	35	34	33	33	32	31	31	30	29	29	28	27
z	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
h	27	26	25	25	24	23	22	22	21	20	20	19	18	17	17	16	15
z	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
h	15	14	13	12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Обратимся теперь к случаю $a^* = 0{,}8$. Применение леммы Неймана — Пирсона при $a^* = 0{,}8$ дало ОКО $W_L^*(0{,}8)$ (с уровнем значимости $\simeq$0,0520899 и с мощностью 0,2742 при $a = 0{,}8$), которая уже сама является более мощной, чем WMW-критерий (с уровнем значимости α и с мощностью равной 0,2705). Определяемые этой областью критические значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, приведены в табл. 7.

Чтобы приблизить уровень значимости S_E-критерия к значению α, в критическую область $W^*(0{,}8)$ были включены все события ОКО $W_L^*(0{,}8)$ и дополнительно следующие события: (36, 1), (36, 3), (35, 5), (20, 27).

В табл. 8–10 сравниваются при разных a в (6), а также θ в (19) и (21) значения мощности WMW-критерия (приведены в третьей строке каждой из таблиц с точностью, достаточной для сравнения) и трёх построенных вариантов S_E-критерия. В вертикальных колонках с заголовком $a = 0{,}0$ (или $\theta = 0{,}0$) даны уровни значимости критериев.

Желательно проверить, сохраняется ли преимущество S_E-критерия при малых уров-

Таблица 8

Мощности критериев при $m = 2n = 10$ и альтернативе (6)

a^*	a								
	0,0	0,01	0,11	0,2	0,3	0,5	0,8	0,9	1,0
—	0,0525612	0,053909	0,0689344	0,08505	0,10615	0,1595	0,270	0,315	0,365
0,11	0,0525610	0,053908	0,0689348	0,08506	0,10620	0,1598	0,271	0,317	0,367
0,5	0,0525583	0,053898	0,0688712	0,08500	0,10621	0,1604	0,275	0,322	0,374
0,8	0,0525596	0,053883	0,0686890	0,08467	0,10579	0,1599	0,276	0,325	0,378

Таблица 9

Мощности критериев при $m = 2n = 10$ и альтернативе (19)

a^*	θ								
	0,0	0,01	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
—	0,0525612	0,05652	0,102	0,464	0,837	0,964	0,9933	0,9988	0,99979
0,11	0,0525610	0,05658	0,103	0,471	0,844	0,967	0,9940	0,9989	0,99982
0,5	0,0525583	0,05679	0,110	0,495	0,860	0,971	0,9948	0,9990	0,99983
0,8	0,0525596	0,05700	0,109	0,512	0,868	0,972	0,9949	0,9990	0,99981

Таблица 10

Мощности критериев при $m = 2n = 10$ и альтернативе (21)

a^*	θ									
	0,0	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95
—	0,0525612	0,05294	0,0565	0,105	0,319	0,643	0,910	0,975	0,9976	0,99978
0,11	0,0525610	0,05295	0,0566	0,106	0,324	0,651	0,915	0,977	0,9979	0,99982
0,5	0,0525583	0,05297	0,0567	0,110	0,342	0,675	0,925	0,980	0,9982	0,99983
0,8	0,0525596	0,05299	0,0570	0,113	0,357	0,690	0,929	0,981	0,9981	0,99981

Таблица 11

Значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, определяемые ОКО $W_L^*(0{,}5)$ с уровнем значимости 0,0009865

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	50
h	45	44	44	43	42	42	41	41	40	39	39	38	37	37	36	35	34	...	0

нях значимости критериев. Для этого кратко рассмотрим случай, где $C = 88$ в (1) и уровень значимости WMW-критерия $\alpha = 0{,}00104462$ (с точностью до восьми цифр после запятой).

Применение леммы Неймана — Пирсона при $a^* = 0{,}5$ дало ОКО $W_L^*(0{,}5)$ с уровнем значимости приближённо равным 0,0009865 и мощностью 0,006028 при $a = 0{,}5$, что меньше мощности WMW-критерия, которая равна 0,006303. Отвечающие этой области критические значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 50$, приведены в табл. 11.

Чтобы приблизить уровень значимости S_E-критерия к значению α, в критическую область $W^*(0{,}5)$ были включены все события ОКО $W_L^*(0{,}5)$, кроме (46, 0) и (44, 3), а из числа не попавших в $W_L^*(0{,}5)$ включены события (44, 2) и (41, 7).

В табл. 12 сравниваются при разных θ в (19) значения мощности WMW-критерия (приведены в третьей строке таблицы с точностью, достаточной для сравнения) и варианта S_E-критерия, построенного при $a^* = 0{,}5$. В вертикальной колонке с заголовком $\theta = 0{,}0$ даны уровни значимости критериев.

Полезно знать, что происходит с мощностью критериев, когда объёмы выборок не совпадают. Рассмотрим кратко случай с той же суммой объёмов выборок и уровнями значимости критериев, близкими к уровням значимости критериев в предыдущем случае.

Случай с $m = 12$, $2n = 8$, $C = 85$ в (1). Здесь уровень значимости WMW-критерия $\alpha = 0{,}0010796$ (с точностью до семи цифр после запятой). Применение леммы Неймана — Пирсона при $a^* = 0{,}5$ дало ОКО $W_L^*(0{,}5)$ с уровнем значимости приближённо равным 0,001008 и мощностью 0,00615 при $a = 0{,}5$ в (6), что меньше мощности WMW-критерия, которая равна 0,00648. Определяемые этой областью критические значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 48$, приведены в табл. 13.

Таблица 12

Мощности критериев при $m = 2n = 10$ и альтернативе (19)

a^*	θ									
	0,0	0,01	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
—	0,0010446	0,001151	0,00271	0,0488	0,274	0,575	0,793	0,910	0,963	0,9858
0,5	0,0010440	0,001153	0,00277	0,0535	0,296	0,602	0,812	0,920	0,968	0,9877

Таблица 13

Значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 48$, при $m = 12$, $2n = 8$, определяемые ОКО $W_L^*(0{,}5)$ с уровнем значимости 0,00100863

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	48
h	43	43	42	41	41	40	40	39	38	38	37	36	36	35	34	33	...	0

Таблица 14

Мощности критериев при $m = 12$, $2n = 8$ и альтернативе (19)

a^*	θ									
	0,0	0,01	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
—	0,0010796	0,00120	0,00320	0,057	0,275	0,541	0,738	0,856	0,921	0,955
0,5	0,0010787	0,00121	0,00328	0,064	0,304	0,585	0,782	0,891	0,945	0,972

Чтобы приблизить уровень значимости S_E-критерия к значению α, в критическую область $W^*(0{,}5)$ были включены все события ОКО $W_L^*(0{,}5)$ и дополнительно события (43, 0), (43, 1), (41, 4). После этого уровень значимости S_E-критерия оказался равным 0,0010787 (с точностью до семи цифр после запятой), что меньше уровня значимости WMW-критерия, но мощность при $a = 0{,}5$ в (6) стала равной 0,00651, что больше мощности WMW-критерия.

В табл. 14 сравниваются при разных θ в (19) значения мощности WMW-критерия и варианта S_E-критерия, построенного при $a^* = 0{,}5$.

Из сравнения табл. 12 и 14 видно, что мощности критериев WMW и S_E при несовпадающих объёмах выборок могут оказаться заметно меньше, чем в случае с совпадающими объёмами, особенно это касается WMW-критерия.

Далее, из табл. 1 и 8, относящихся к альтернативной гипотезе с распределением (6), вытекает, что преимущество в мощности, которое может иметь WMW-критерий при $0 < a < \gamma(m, n, \alpha)$, слишком мало и не может играть существенной роли ни в одной практической задаче, кроме того, граничное значение $\gamma(m, n, \alpha)$ убывает с ростом m и n. С другой стороны, при удалении a от точки $\gamma(m, n, \alpha)$ вправо заметно возрастает преимущество S_E-критерия. Наконец, сравнение таблиц, приведённых для случаев альтернатив (19) и (21), показывает то преимущество S_E-критерия, которое получается при использовании даже отличных от оптимальных (изменённых оптимальных) критических значений $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, mn$.

Заключение. Исследование, проведённое в данной работе, в основном имело своей целью изучение возможности (целесообразности) применения известной в математической статистике концепции близких альтернативных гипотез для отыскания подходящих критических значений нового S_E-критерия. Табл. 8 при близком альтернативном распределении (6) с параметром a показывает, что критические значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, mn$, полученные при небольшом фиксированном значении параметра $a^* > \gamma(m, n, \alpha)$, положительно действуют на мощность S_E-критерия при наиболее широком множестве значений a в (6), но особенно подходят при сравнительно небольших отклонениях от гипотезы H_0. С другой стороны, критические значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, mn$, полученные при значении $a^* = 0{,}8$, придают S_E-критерию наибольшую мощность при больших значениях a в (6), однако эти критические значения $h(z)$ оказались непригодными при больших значениях параметра сдвига θ в альтернативах (19) и (21) с экспоненциальными и равномерными распределениями (вызывают потерю мощности). По-видимому, предпочтительнее использовать критические значения $h(z)$, $z = 0, 1, \ldots, mn$, полученные при $a^* = 0{,}5$ (см. табл. 1, 6, 11, 13), и с большой осторожностью — при $a^* = 0{,}8$.

Так как непараметрические критерии сравнительно мало подвержены влиянию отклонений от использованных при их построении конкретных распределений и полученный S_E-критерий оказался более мощным в довольно широкой области значений параметров a и θ, чем критерий Вилкоксона, то предлагаемый подход для отыскания критических значений нового S_E-критерия можно считать вполне оправданным. Нет оснований сомневаться в том, что S_E-критерий будет более мощным, чем критерий Вилкоксона, в более широком ряде случаев, а не только в проверенных нами случаях с экспоненциальными и равномерными распределениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Салов Г. И.** Новый статистический критерий для задач с двумя и тремя выборками, более мощный, чем критерии Вилкоксона и Уитни // Автометрия. 2011. **47**, № 4. С. 58–70.
2. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964. 498 с.
3. **Гаек Я., Шидак З.** Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971. 375 с.
4. **Wilcoxon F.** Individual comparisons by ranking methods // Biometrics Bull. 1945. **1**, N 6. P. 80–83.
5. **Mann H. B., Whitney D. R.** On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other // Ann. Math. Stat. 1947. **18**, N 1. P. 50–60.
6. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 899 с.
7. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 547 с.
8. **Боровков А. А.** Математическая статистика. М.: Физматлит, 2007. 703 с.
9. **Wilks S. S.** Order statistics // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. **54**, N 1. P. 5–50.
10. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.

Поступила в редакцию 19 марта 2013 г.