УДК 519.24

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ПРОЦЕССА*

Е. Л. Кулешов, Б. Н. Грудин

Дальневосточный федеральный университет,
690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
E-mail: kuleshov@lemoi.phys.dvgu.ru

Модель фрактального броуновского процесса задаётся его структурной функцией с показателем Хёрста $\alpha \in (0, 1)$. Доказано, что спектральная плотность этого процесса существует и совпадает с известной степенной зависимостью только для значений показателя $\alpha \in$ $\in (0, 1/2]$. В интервале $\alpha \in (1/2, 1)$ спектральная плотность не существует, а периодограммная оценка показателя имеет постоянное значение равное 1/2. Теоретические результаты проверялись моделированием траекторий процесса, расчётом периодограмм и оцениванием показателя степени спектральной плотности.

Ключевые слова: фрактальный броуновский процесс, корреляционная функция, спектральная плотность, периодограмма.

Введение. Модели стохастических процессов со свойствами самоподобия широко используются при исследованиях разнообразных явлений в физике, геофизике, биологии, финансовой математике [1–3]. Один из наиболее распространённых критериев самоподобия основан на спектрах. Например, шум можно считать спектрально-масштабно-инвариантным, если его спектральная плотность описывается степенной функцией, убывающей с ростом частоты [1]. Считается, что фрактальный броуновский процесс также имеет степенную спектральную плотность [1, 4–7]. Так, в работах [1, 4] постулируется степенной характер спектральной плотности на основании вида спектра приращений фрактального броуновского процесса. В [5, 6] при нахождении степенной зависимости для спектров используются не вполне строгие, скорее интуитивные, математические приёмы, учитывающие статистическое самоподобие реализаций процесса. В работе [7] степенная зависимость для спектральной плотности получена путём применения к нестационарным процессам соотношений, описывающих в случае стационарных процессов связь между структурной функцией и представлением в виде интеграла Фурье корреляционной функции.

Фрактальные броуновские процессы впервые рассматривались в [8], где они строились исходя из вида корреляционной функции и назывались спиралями Винера. Расчёт спектральной плотности по корреляционной функции представлен в [9]. Здесь спектр процесса вычислялся путём усреднения по времени мгновенного спектра, который, в свою очередь, рассчитывался как фурье-образ корреляционной функции. В итоге для спектральной плотности также получена степенная зависимость. Однако представленные в данной работе результаты несколько настораживают, поскольку найденное выражение для мгновенного спектра является положительной функцией только при показателе Хёрста большем 1/2. Отметим также, что в ряде работ [10–12] в ходе численного моделирования обнаружена нелинейная зависимость фрактальной размерности от показателя степени спектра. Таким

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (госконтракт № 16.552.11.7059, госзадание № 2.1649.2011) и Научного фонда Дальневосточного федерального университета.

образом, уточнение вида спектральной плотности актуально как при оценивании фрактальной размерности сигналов и изображений [13–15], так и при моделировании процессов со свойствами статистического самоподобия [16, 17].

Целью данной работы является точный расчёт спектральной плотности фрактального броуновского процесса, свойства которого заданы его структурной функцией, с последующей проверкой полученного результата численным моделированием.

Спектральная плотность нестационарного случайного процесса. Пусть спектральная плотность $F(\omega)$ нестационарного случайного процесса $\xi(t)$ определяется соотношением

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} F_T(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbf{M}|S(\omega)|^2, \tag{1}$$

где $\mathbf{M}$ — оператор математического ожидания; функция

$$S(\omega) = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \xi(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt \tag{2}$$

— конечное преобразование Фурье процесса $\xi(t)$ по интервалу $[t_0, t_0+T]$;

$$\mathbf{M}|S(\omega)|^2 = \int\limits_{t_0}^{t_0+T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} B(t_1,t_2)\mathrm{e}^{-i\omega(t_1-t_2)}dt_1dt_2, \tag{3}$$

$B(t_1,t_2) = \mathbf{M}\xi(t_1)\xi(t_2)$ — корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$.

В соотношении (3) вместо переменных t_1, t_2 введём новые переменные интегрирования: t_2 и τ, причём $\tau = t_1 - t_2$. В этом случае на плоскости (t_2, τ) интегрирование выполняется в пределах параллелограмма со сторонами: $\tau = t_0 - t_2$, $\tau = t_0 + T - t_2$, $t_2 = t_0$, $t_2 = t_0 + T$. Данный параллелограмм разобьём на два треугольника: $\tau \geq 0$ и $\tau < 0$. Выражение (3) можно представить в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое — это интеграл по верхнему треугольнику и второе — интеграл по нижнему треугольнику. Таким образом,

$$\mathbf{M}|S(\omega)|^2 = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{t_0}^{t_0+T-\tau} dt_2 B(t_2+\tau,t_2)\mathrm{e}^{-i\omega\tau} + \int\limits_{-T}^0 d\tau \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0+T} dt_2 B(t_2+\tau,t_2)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}. \tag{4}$$

Во втором слагаемом заменим переменную интегрирования t_2 новой переменной $u = t_2+\tau$, а в первом — используем равенство $B(t_1,t_2) = B(t_2,t_1)$. Полученный результат подставим в (1), тогда

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} d\tau \mathrm{e}^{-i\omega\tau}\frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} duB(u, u+|\tau|). \tag{5}$$

В частном случае стационарного процесса $B(u, u+|\tau|)$ — функция одного аргумента τ, при этом выражение (5) не зависит от t_0 и сводится к преобразованию Фурье от корреляционной функции $B(\tau)$. Далее покажем, что спектральная плотность (5) фрактального броуновского процесса также не зависит от t_0. Отметим, что определение (1) спектральной плотности нестационарного процесса приводит к очевидному алгоритму оценивания этой характеристики на основе периодограммы по интервалу наблюдения $[t_0, t_0+T]$.

Спектральная плотность фрактального броуновского процесса. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{M}[\xi(t_2)-\xi(t_1)]^2=\sigma^2|t_2-t_1|^{2\alpha},\quad 0<\alpha<1, \tag{6}$$

и начинается в точке t_0, при этом $\xi(t_0)=0$. В этом смысле процесс $\xi(t)$ является фрактальным броуновским. Других ограничений на него не накладывается. Параметр σ^2 определяет приращение дисперсии процесса за единицу времени, α — показатель Хёрста. Из равенства (6) следует

$$B(t_1,t_2)=\frac{\sigma^2}{2}(|t_1-t_0|^{2\alpha}+|t_2-t_0|^{2\alpha}-|t_2-t_1|^{2\alpha}). \tag{7}$$

Затем в соотношении (5) несложно вычисляется интеграл по переменной u:

$$W(\tau)=\int\limits_{t_0}^{t_0+T-|\tau|}B(u,u+|\tau|)du=\frac{\sigma^2}{2}\int\limits_{t_0}^{t_0+T-|\tau|}[(u-t_0)^{2\alpha}+(u+|\tau|-t_0)^{2\alpha}-|\tau|^{2\alpha}]du=$$

$$=\frac{\sigma^2T^{2\alpha+1}}{2}\Big\{\frac{1}{2\alpha+1}\Big[\Big(1-\frac{|\tau|}{T}\Big)^{2\alpha+1}+1-\Big(\frac{|\tau|}{T}\Big)^{2\alpha+1}\Big]-\Big(\frac{|\tau|}{T}\Big)^{2\alpha}\Big(1-\frac{|\tau|}{T}\Big)\Big\}. \tag{8}$$

Подставим (8) в (5) и перейдём к новой переменной интегрирования $z=\tau/T$, тогда с учётом чётности функции $W(\tau)$ получаем представление спектральной плотности через конечное косинус-преобразование от функции $\varphi(z)$:

$$F(\omega)=\lim_{T\to\infty}F_T(\omega)=\lim_{T\to\infty}\sigma^2T^{2\alpha+1}\int\limits_0^1\varphi(z)\cos(\omega zT)dz, \tag{9}$$

где

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\alpha+1}[(1-z)^{2\alpha+1}+1-z^{2\alpha+1}]-z^{2\alpha}(1-z). \tag{10}$$

Из соотношения (9) при $\omega=0$ находим

$$F_T(0)=\sigma^2T^{2\alpha+1}\int\limits_0^1\varphi(z)dz=\frac{\sigma^2T^{2\alpha+1}}{2(\alpha+1)}. \tag{11}$$

Приближённое вычисление конечного косинус-преобразования. Рассмотрим при $\omega\neq0$ и в асимптотике при большом T функцию

$$\Phi(\omega)=\int\limits_0^1\varphi(z)\cos\omega_0 z\,dz, \tag{12}$$

где $\omega_0=\omega T$. Если $T\to\infty$, то $\omega_0\to\infty$, гармоника $\cos\omega_0 z$ имеет период $T_0=2\pi/\omega_0\to0$ и функция $\varphi(z)$ слабо изменяется в пределах одного периода. Интеграл по одному периоду $[0,T_0]$ представим в виде суммы четырёх интегралов по интервалам длительности

$T_0/4$ каждый с центральными точками $T_0/8$, $3T_0/8$, $5T_0/8$, $7T_0/8$. Будем полагать, что функция $\varphi(z)$ остаётся постоянной в пределах каждого интервала, равной её значению в центральной точке этого интервала. Тогда

$$\int\limits_0^{T_0} \varphi(z)\cos\omega_0 z dz \approx \sum_{k=1}^{4} \varphi\Big(\frac{T_0}{8}(2k-1)\Big) \int\limits_{(T_0/4)(k-1)}^{(T_0/4)k} \cos\omega_0 z dz =$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\Big[\varphi\Big(\frac{T_0}{8}\Big)-\varphi\Big(\frac{3T_0}{8}\Big)-\varphi\Big(\frac{5T_0}{8}\Big)+\varphi\Big(\frac{7T_0}{8}\Big)\Big] \approx \frac{T_0}{4\omega_0}\Big[\varphi'\Big(\frac{T_0}{4}\Big)-\varphi'\Big(\frac{3T_0}{4}\Big)\Big] \approx \frac{T_0^3}{16\pi}\varphi''\Big(\frac{T_0}{2}\Big), \quad (13)$$

где $\varphi'(z)$ и $\varphi''(z)$ — первая и вторая производные функции $\varphi(z)$ соответственно.

Пусть $I(x)$ — целая часть числа x. На интервале $[0,\ 1]$ укладывается $N = I(1/T_0)$ полных периодов гармоники $\cos\omega_0 z$. Представим функцию Φ в виде двух слагаемых: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 — это интеграл по интервалу $[0, NT_0]$, на котором укладывается целое число периодов гармоники, и Φ_2 — интеграл по отрезку $[NT_0, 1]$.

Асимптотика функции Φ_1. При большом T с учётом (13) функция Φ_1 принимает вид

$$\Phi_1(\omega) = \int\limits_0^{NT_0} \varphi(z)\cos\omega_0 z dz = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{T_0^3}{16\pi}\varphi''\Big(\frac{T_0}{2}+jT_0\Big). \quad (14)$$

При $T \to \infty$ период $T_0 \to 0$, число слагаемых $N \to \infty$, поэтому сумму в (14) можно заменить интегралом:

$$\Phi_1(\omega) = \int\limits_0^{NT_0-T_0} \frac{T_0^2}{16\pi}\varphi''\Big(\frac{T_0}{2}+x\Big)dx = \frac{T_0^2}{16\pi}\Big[\varphi'\Big(\frac{T_0}{2}+NT_0-T_0\Big)-\varphi'\Big(\frac{T_0}{2}\Big)\Big]. \quad (15)$$

Здесь величина $NT_0 \to 1$, поэтому в (15) полагаем $NT_0 = 1$. Используя равенство $T_0 = 2\pi/\omega_0$, в итоге получаем

$$\Phi_1(\omega) = \frac{\pi}{4\omega_0^2}\Big[\varphi'\Big(1-\frac{\pi}{\omega_0}\Big)-\varphi'\Big(\frac{\pi}{\omega_0}\Big)\Big]. \quad (16)$$

Из соотношения (10) находим производную функции $\varphi(z)$:

$$\varphi'(z) = -(1-z)^{2\alpha} - 2\alpha z^{2\alpha-1} + 2\alpha z^{2\alpha}. \quad (17)$$

Отсюда

$$\varphi'(1-x)-\varphi'(x) = -(1+2\alpha)x^{2\alpha} + (1+2\alpha)(1-x)^{2\alpha} + 2\alpha x^{2\alpha-1} - 2\alpha(1-x)^{2\alpha-1}. \quad (18)$$

Выражение (18) при $x = \pi/\omega_0$ содержится в (16), где $x \to 0$. Поэтому функцию $(1-x)^{2\alpha}$ можно представить рядом Тейлора, оставляя первые два слагаемых, тогда $(1-x)^{2\alpha} = 1 - 2\alpha x$. При этом соотношение (18) принимает вид

$$\varphi'(1-x)-\varphi'(x) = -(1+2\alpha)x^{2\alpha} + 2\alpha x^{2\alpha-1} + 1 - 4\alpha x. \quad (19)$$

Последующая подстановка (19) в формулу (16) приводит к выражению

$$\Phi_1(\omega) = \frac{x^2}{4\pi}\Big[-(1+2\alpha)x^{2\alpha} + 2\alpha x^{2\alpha-1} + 1 - 4\alpha x\Big], \quad x = \pi/\omega_0. \quad (20)$$

Асимптотика функции Φ_2. Вычисление Φ_2 сводится к интегралу по малому интервалу $[NT_0, 1]$, на котором функция $\varphi(z)$ меняется незначительно и её можно разложить в ряд около точки $z = 1$. Из соотношений (10), (17) следует $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(1) = 0$, поэтому для разложения в ряд вычислим вторую производную. Из (17) получаем

$$\varphi''(z) = 2\alpha(1-z)^{2\alpha-1} - 2\alpha(2\alpha-1)z^{2\alpha-2} + (2\alpha)^2 z^{2\alpha-1}. \tag{21}$$

Таким образом, $\varphi''(1) = 2\alpha$, $\varphi(z) \approx \alpha(z-1)^2$ и функция $\Phi_2(\omega)$ принимает вид

$$\Phi_2(\omega) = \alpha \int\limits_{NT_0}^{1} (z-1)^2 \cos\omega_0 z dz = \frac{2\alpha}{\omega_0^3}(\omega_0 - \omega_0 NT_0 - \sin\omega_0). \tag{22}$$

При $T \to \infty$ величина $NT_0 \to 1$, поэтому

$$\Phi_2(\omega) \approx -\frac{2\alpha}{\pi^3}x^3 \sin\frac{\pi}{x}, \quad x = \pi/\omega_0. \tag{23}$$

Асимптотика функции F_T и спектральная плотность. Суммируя (20) и (23), получаем

$$\Phi(\omega) = \frac{x^2}{4\pi}\Big[-(1+2\alpha)x^{2\alpha} + 2\alpha x^{2\alpha-1} + 1 - 4\alpha x - \frac{8\alpha\sin(\pi/x)}{\pi^2}x\Big], \quad x = \pi/\omega_0. \tag{24}$$

Определим, в каком соотношении между собой находятся слагаемые выражения (24). Пусть $0 < \alpha < 0{,}5$, тогда $0 < 2\alpha < 1$ и $-1 < 2\alpha - 1 < 0$. Следовательно, для малого x имеет место соотношение $x < x^{2\alpha} < x^0 < x^{2\alpha-1}$. Поэтому в (24) можно оставить только сумму двух основных слагаемых $2\alpha x^{2\alpha-1} + 1$ и остальными пренебречь. Аналогично для $0{,}5 < \alpha < 1$ получаем $1 < 2\alpha < 2$ и $0 < 2\alpha - 1 < 1$, а также соотношение между степенями $x^{2\alpha} < x < x^{2\alpha-1} < x^0$. Оставляя в (24) два основных слагаемых, имеем такой же, как и в первом случае, результат: $1 + 2\alpha x^{2\alpha-1}$. Заметим, что и при $\alpha = 0{,}5$ главными являются эти же слагаемые, причём они стали одного порядка x^0.

С учётом данного условия из соотношений (9), (11) и (24) следует асимптотика функции $F_T(\omega)$ при большом T:

$$F_T(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2 T^{2\alpha+1}}{2(\alpha+1)}, & \omega = 0, \\ \dfrac{\sigma^2\pi}{4}\Big(2\alpha\dfrac{\pi^{2\alpha-1}}{\omega^{2\alpha+1}} + \dfrac{T^{2\alpha-1}}{\omega^2}\Big), & \omega \neq 0, \end{cases} \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{25}$$

Отсюда

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} F_T(\omega) = \begin{cases} \infty, & \omega = 0,\ 0 < \alpha < 1, \\ \dfrac{\alpha\sigma^2\pi^{2\alpha}}{2}\,\dfrac{1}{\omega^{2\alpha+1}}, & \omega \neq 0,\ 0 < \alpha < 1/2, \\ \dfrac{\sigma^2\pi}{2}\,\dfrac{1}{\omega^2}, & \omega \neq 0,\ \alpha = 1/2, \\ \infty, & \omega \neq 0,\ 1/2 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, относительно вида спектральной плотности фрактального броуновского процесса можно сформулировать следующее утверждение. Если случайный процесс

$\xi(t)$ имеет структурную функцию (дисперсию приращений), удовлетворяющую условию (6), и начинается в точке t_0, то его спектральная плотность $F(\omega)$ вида (1) определяется соотношением (26).

Следовательно, спектральная плотность фрактального броуновского процесса пропорциональна $\omega^{-(2\alpha+1)}$ для $0 < \alpha \leq 1/2$ и не существует для $1/2 < \alpha < 1$. По литературным данным полагается, что спектральная плотность пропорциональна $\omega^{-(2\alpha+1)}$ в более широком интервале параметра $0 < \alpha < 1$. Эти предположения также не соответствуют асимптотике (25). Действительно, для большого T из (25) получаем функцию $F_T(\omega) \sim \omega^{-(2\alpha+1)}$ при $0 < \alpha \leq 1/2$, но при $1/2 < \alpha < 1$ преобладает второе слагаемое в (25) и $F_T(\omega) \sim \omega^{-2}$ независимо от α.

Моделирование траекторий и оценка параметра спектральной плотности. Для проверки соотношений (25), (26) выполнялся численный эксперимент: во-первых, прямое вычисление показателя степени $2\alpha + 1$ для функции $F_T(\omega)$ по формуле (25) и, во-вторых, моделирование траекторий процесса с заданным параметром α, нахождение оценки спектральной плотности и оценки показателя $2\alpha + 1$. Вычисление по формуле (25) осуществлялось при $T = 2^{10}$, шаге дискретизации по частоте $\Delta\omega = 2\pi/T$ и следующих значениях α: 0,1; 0,3; 0,45; 0,5; 0,55; 0,7; 0,9. График функции $\ln F_T(\omega)$ аргумента $\ln\omega$ представляет собой практически идеальную прямую для всех значений α. Поэтому оценка γ показателя $2\alpha+1$ находилась по формуле $\gamma = -[\ln F_T(\omega_2) - \ln F_T(\omega_1)]/(\ln\omega_2 - \ln\omega_1)$, где $\omega_2 = 2^{10}\Delta\omega$, $\omega_1 = 3\Delta\omega$. Последнее обеспечивает условие $\omega \neq 0$ в соотношении (25). Для представленных значений параметра α показатель $2\alpha + 1$ равен 1,2; 1,6; 1,9; 2,0; 2,1; 2,4; 2,8, при этом оценка γ принимала соответственно следующие значения: 1,201; 1,611; 1,928; 2,000; 2,008; 2,009; 2,000.

Для определения оценки $f(\omega)$ функции $F_T(\omega)$ моделировались траектории фрактального броуновского процесса, начинающегося в нуле. Для каждой траектории длительности $T = 2^{10}$ отсчётов вычислялась периодограмма $|S(\omega)|^2/T$ и оценка $f(\omega)$ находилась как средняя по 15 траекториям периодограмма. Расчёты оценки β показателя степени частоты функции $f(\omega)$ выполнялись аналогично определению оценки γ и для тех же значений параметра α. Полученные значения β равны 1,061; 1,591; 1,902; 2,015; 2,065; 1,997; 1,979. Таким образом, результаты моделирования хорошо согласуются с асимптотикой (25) функции $F_T(\omega)$.

Заключение. В предлагаемой работе рассматривается фрактальный броуновский процесс, свойства которого заданы его структурной функцией с показателем Хёрста $\alpha \in (0, 1)$. Выполнен расчёт спектральной плотности этого процесса. Показано, что спектральная плотность существует и совпадает с известной степенной зависимостью только для значений показателя $\alpha \in (0, 1/2]$. В интервале $\alpha \in (1/2, 1)$ спектральная плотность не существует, а периодограммная оценка показателя имеет постоянное значение равное 1/2. Теоретические результаты проверялись моделированием траекторий процесса, расчётом периодограмм и оцениванием показателя степени спектральной плотности. Результаты работы могут быть полезными для построения моделей процессов со свойствами статистического самоподобия, в задачах оценивания фрактальной размерности сигналов и изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мандельброт Б.** Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
2. **Шредер М.** Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: РХД, 2001. 528 с.

3. **Федер Е.** Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
4. **Mandelbrot B. B., van Ness J. W.** Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Rev. 1968. **10**, N 4. P. 422–437.
5. **Saupe D.** Algorithms for random fractals // The Science of Fractals Images /Eds. H. O. Peitgen, D. Saupe. N. Y.: Springer-Verlag, 1988. 312 p.
6. **Кронвер Р. М.** Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
7. **Voss R.** Fractals in nature: from characterization to simulation // The Science of Fractals Images /Eds. H. O. Peitgen, D. Saupe. N. Y.: Springer-Verlag, 1988. 312 p.
8. **Колмогоров А. Н.** Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. 1940. **26**, № 2. С. 115–118.
9. **Flandrin P.** On the spectrum of fractional Brownian motions // IEEE Trans. Inform. Theory. 1989. **35**, N 1. P. 197–199.
10. **Higuchi T.** Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: a numerical investigation // Phys. D: Nonlinear Phenomena. 1990. **46**, N 2. P. 254–264.
11. **Wilson T. H.** Fractal strain distribution and its implications for cross-section balancing further discussion // Journ. Struct. Geol. 1997. **19**, N 1. P. 129–132.
12. **Останин С. А., Шайдук А. М.** Уточнение отношения между фрактальной размерностью и степенью спектра мощности сигнала // Журнал радиоэлектроники. 2012. № 8. С. 1–7.
13. **Сидорова В. С.** Оценка качества классификации многоспектральных изображений гистограммным методом // Автометрия. 2007. **43**, № 1. С. 37–43.
14. **Фаворская М. Н., Петухов Н. Ю.** Распознавание природных объектов на аэрофотоснимках с применением нейронных сетей // Автометрия. 2011. **47**, № 3. С. 34–40.
15. **Плешанов В. С., Напрюшкин А. А., Кибиткин В. В.** Особенности применения теории фракталов в задачах анализа изображений // Автометрия. 2010. **46**, № 1. С. 86–97.
16. **Bruinning J., van Batenburg D., Lake L., Yang A. P.** Flexible spectral methods for the generation of random fields with power-law senivariograms // Math. Geol. 1997. **29**, N 6. P. 823–848.
17. **Грудин Б. Н., Плотников В. С., Смольянинов Н. А.** Моделирование изображений с заданными фрактальными характеристиками // Автометрия. 2010. **46**, № 3. С. 13–21.

Поступила в редакцию 21 января 2013 г.