

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.2.08

О МИНИМИЗАЦИИ ОШИБКИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПРИ ЕГО РАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ*

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, Ю. В. Бондаренко

*Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su*

Рассматриваются различные подходы к решению задачи фильтрации непрерывного периодического сигнала, искажённого стационарным аддитивным некоррелированным шумом. Особое внимание уделяется случаю некрatности известного периода сигнала интервалу его дискретизации.

Ключевые слова: фильтрация, некоррелированный шум, некрatность интервала дискретизации периода сигнала.

Введение. Задача выделения непрерывного периодического сигнала $S(t)$ [1] из смеси сигнала и аддитивного амплитудного некоррелированного шума $\xi(t)$ оказывается простой, если известен период сигнала T :

$$S(t) = S(t + mT), \quad m - \text{целое.} \quad (1)$$

В этом случае достаточно объединить M подлежащих обработке периодов сигнала, например, на нулевом периоде и произвести обычное усреднение:

$$S^0(t) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (S(t) + \xi(t + mT)). \quad (2)$$

Здесь $\xi(t + mT)$ — аддитивный шум на m -м периоде.

Если при дискретизации смеси сигнала и шума период сигнала T содержит целое число $2L + 1$ интервалов дискретизации Δ , то соотношение (2) переходит в

$$S^0(0,5\Delta + r\Delta) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (S(0,5\Delta + r\Delta) + \xi(0,5\Delta + r\Delta + mT)), \quad r = \overline{0, 2L}. \quad (3)$$

Такая обработка при стационарном некоррелированном шуме с дисперсией σ_ξ^2 и нулевым средним приводит к уменьшению отношения шум/сигнал в M раз, т. е. дисперсия шума становится равной σ_ξ^2/M . Среднеарифметические значения последовательностей (3) могут быть заменены, например, их медианами, если такая замена даёт несмещённую и более эффективную оценку для значений сигнала $S(0,5\Delta + r\Delta)$.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00361), Президиума РАН (проект № 15.11/2012) и Сибирского отделения РАН (интеграционный проект СО РАН и НАН Беларуси № 16/2012).

Дальнейшая обработка периодического сигнала, содержащего конечное количество гармоник $2L + 1$, сводится к традиционному вычислению коэффициентов ряда Фурье a_k ($k = \overline{0, L}$) и b_k ($k = \overline{1, L}$). При этом средняя мощность сигнала на периоде $P_S = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L (a_k^2 + b_k^2)$. Средняя мощность шума на периоде $P_\xi = \sigma_\xi^2$ не уменьшается, так как $a_{\xi_0}^2 = \sigma_\xi^2 / (M(2L + 1))$, а $a_{\xi_k}^2 = b_{\xi_k}^2 = \sigma_\xi^2 / (M(2L + 1))$. Если число гармоник сигнала равно $2K + 1$ ($K < L$), то средняя мощность шума на периоде уменьшается и будет иметь вид $P_\xi = \sigma_\xi^2(2K + 1) / (M(2L + 1))$.

Постановка задачи. Восстановление периодического сигнала, искажённого стационарным аддитивным некоррелированным шумом, значительно усложняется, если известный период T не кратен интервалу дискретизации Δ . Цель данной работы — найти и обосновать методы, обеспечивающие минимизацию ошибки восстановления сигнала при различных режимах такой дискретизации.

Обработка периодического сигнала при некрatности его периода интервалу дискретизации. *Остаток от деления T/Δ — простая дробь.* Сначала рассмотрим случай, когда период сигнала можно представить в виде

$$T = (N + q/s)\Delta, \quad (4)$$

где величина q/s — рациональная дробь ($0 < q/s < 1$).

Анализ последовательности примыкающих друг к другу периодов сигнала показывает, что число различных вариантов распределения отсчётов по периоду T совпадает со знаменателем дроби s . Например, при $q/s = 1/2$ эта последовательность может выглядеть следующим образом (см. таблицу):

$$(1/4 + N + 1/4)\Delta, \quad (3/4 + (N - 1) + 3/4)\Delta, \quad (1/4 + N + 1/4)\Delta, \dots$$

Она состоит из двух различных повторяющихся периодов сигнала, внутри каждого из которых последовательности отсчётов сигнала расположены со сдвигом на $\Delta/2$. Поэтому при наложении двух периодов сигнала получается период $T = (2N + 1)\Delta/2$ с интервалом дискретизации $\Delta/2$, кратным периоду T .

Таблица иллюстрирует последовательности примыкающих друг к другу периодов сигнала при различных значениях величины q/s . Видна периодичность последовательностей с периодом s ; N — число целых интервалов дискретизации, попадающих в период сигнала. Алгоритм построения таблицы очевиден.

Если число обрабатываемых периодов равно sM , то сначала группируются периоды с одинаковым расположением отсчётов внутри периода, а затем они обрабатываются в соответствии с (3). Это приводит к уменьшению отношения шум/сигнал в M раз.

Объединив полученные s периодов в один, будем иметь период

$$T = (sN + q)\Delta/s, \quad (5)$$

внутри которого отсчёты располагаются с интервалом дискретизации Δ/s . Так как число отсчётов на объединённом периоде примерно в s раз больше, чем на отдельном периоде, то это может быть использовано для дальнейшего уменьшения отношения шум/сигнал в s раз. Общее же уменьшение этого отношения окажется равным sM без искажения периодического сигнала с ограниченным числом гармоник.

Возможен другой способ фильтрации периодического сигнала. Если умножить левую и правую части равенства (4) на знаменатель рациональной дроби q/s , то получим другой период (T_1), кратный интервалу дискретизации Δ :

$$T_1 = sT = (sN + q)\Delta. \quad (5a)$$

q/s	Номер периода сигнала			
	1	2	3	4
1/2	$1/4 + N + 1/4$	$3/4 + (N - 1) + 3/4$	$1/4 + N + 1/4$	$3/4 + (N - 1) + 3/4$
1/3	$1/6 + N + 1/6$	$5/6 + (N - 1) + 3/6$	$3/6 + (N - 1) + 5/6$	$1/6 + N + 1/6$
2/3	$1/3 + N + 1/3$	$2/3 + N + 0$	$3/3 + (N - 1) + 2/3$	$1/3 + N + 1/3$
1/4	$1/8 + N + 1/8$	$7/8 + (N - 1) + 3/8$	$5/8 + (N - 1) + 5/8$	$3/8 + (N - 1) + 7/8$
3/4	$3/8 + N + 3/8$	$5/8 + N + 1/8$	$7/8 + (N - 1) + 7/8$	$1/8 + N + 5/8$
1/5	$1/10 + N + 1/10$	$9/10 + (N - 1) + 3/10$	$7/10 + (N - 1) + 5/10$	$5/10 + (N - 1) + 7/10$
2/5	$1/5 + N + 1/5$	$4/5 + (N - 1) + 2/5$	$2/5 + N + 0$	$5/5 + (N - 1) + 2/5$
3/5	$3/10 + N + 3/10$	$7/10 + (N - 1) + 9/10$	$1/10 + N + 5/10$	$5/10 + N + 1/10$
4/5	$2/5 + N + 2/5$	$3/5 + N + 1/5$	$4/5 + N + 0$	$5/5 + (N - 1) + 4/5$

q/s	Номер периода сигнала		
	5	6	7
1/2	$1/4 + N + 1/4$	$3/4 + (N - 1) + 3/4$	$1/4 + N + 1/4$
1/3	$5/6 + (N - 1) + 3/6$	$3/6 + (N - 1) + 5/6$	$1/6 + N + 1/6$
2/3	$2/3 + N + 0$	$3/3 + (N - 1) + 2/3$	$1/3 + N + 1/3$
1/4	$1/8 + N + 1/8$	$7/8 + (N - 1) + 3/8$	$5/8 + (N - 1) + 3/8$
3/4	$3/8 + N + 3/8$	$5/8 + N + 1/8$	$7/8 + (N - 1) + 7/8$
1/5	$3/10 + (N - 1) + 9/10$	$1/10 + N + 1/10$	$9/10 + (N - 1) + 3/10$
2/5	$3/5 + (N - 1) + 4/5$	$1/5 + N + 1/5$	$4/5 + (N - 1) + 2/5$
3/5	$9/10 + (N - 1) + 7/10$	$3/10 + N + 3/10$	$7/10 + (N - 1) + 9/10$
4/5	$1/5 + N + 3/5$	$2/5 + N + 2/5$	$3/5 + N + 1/5$

Этот период содержит подлежащие последующему вычислению гармоники с индексом кратным величине s . Например (см. таблицу), объединение двух периодов сигнала с величиной $q/s = 1/2$ даёт период $(1/2 + 2N + 1/2)\Delta$, на котором вычисляются амплитуды гармоник $\{a_0, a_{2k}, b_{2k}\}$. Уменьшение дисперсии шума ≥ 2 .

При $q/s = 1/3$ объединяются три периода сигнала $(1/2 + 3N + 1/2)\Delta$. Вычисляются амплитуды гармоник $\{a_0, a_{3k}, b_{3k}\}$. Дисперсия шума уменьшается минимум в 3 раза. Для $q/s = 2/3$ объединяются три периода сигнала $(1/2 + 3N + 1 + 1/2)\Delta$, вычисляются амплитуды гармоник $\{a_0, a_{3k}, b_{3k}\}$ и т. д.

Использование аналитических преобразований. Рассмотрим периодический сигнал с нечётным числом гармоник (величина $N + 1$ нечётна):

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + \sum_{k=1}^{N/2} b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right). \quad (6)$$

Если известны его значения $\{f(t_r)\}$ на множестве абсцисс $\{t_r\}$ ($r = \overline{0, N}$) на интервале времени T ($-0,5T < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r < \dots < t_N < 0,5T$), то этот сигнал может быть безошибочно описан тождественным выражением [2]

$$f(t) = \sum_{r=0}^N f(t_r)W_r(t - t_r), \quad (6a)$$

где отсчётная функция $W_r(t - t_r)$ является решением системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{N/2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt_r\right)W_r(t - t_r) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right), \quad r = \overline{0, N}; \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{N/2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt_r\right)W_r(t - t_r) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}kT\right).$$

Для нечётного числа отсчётов отсчётная функция [2]

$$W_r(t - t_r) = \prod_{\substack{u=0 \\ u \neq r}}^N \frac{\sin(\pi/T(t - t_u))}{\sin(\pi/T(t_r - t_u))}, \quad r = \overline{0, N}. \quad (8)$$

Эта функция является периодической и разлагается в тригонометрический ряд

$$W_r(t - t_r) = \sum_{k=0}^{N/2} a_{kr} \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + \sum_{k=1}^{N/2} b_{kr} \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right).$$

Если подставить данное соотношение в (7), то получим системы уравнений для определения коэффициентов $\{a_{kr}, b_{kr}\}$:

$$\sum_{r=0}^N a_{kr} \cos\left(\frac{2\pi}{T}mt_r\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = k, \\ 0 & \text{при } m \neq k, \end{cases} \quad m = \overline{0, N/2},$$

$$\sum_{r=0}^N a_{kr} \sin\left(\frac{2\pi}{T}mt_r\right) = 0, \quad m = \overline{1, N/2},$$

$$\sum_{r=0}^N b_{kr} \cos\left(\frac{2\pi}{T}mt_r\right) = 0, \quad m = \overline{1, N/2},$$

$$\sum_{r=0}^N b_{kr} \sin\left(\frac{2\pi}{T}mt_r\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = k, \\ 0 & \text{при } m \neq k, \end{cases} \quad m = \overline{1, N/2}.$$

Формулы для величин $\{a_{0r}\}$, $\{a_{kr}\}$ и $\{b_{kr}\}$ могут быть получены непосредственно из (8), или их значения вычисляются путём интегрирования:

$$a_{0r} = \frac{1}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} W_r(t - t_r) dt, \quad a_{kr} = \frac{1}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) W_r(t - t_r) dt,$$

$$b_{kr} = \frac{1}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) W_r(t - t_r) dt.$$

Если величина $N + 1$ (число отсчётов) чётна, то ход изложения остаётся прежним. Отличие заключается в том, что

1) в формуле для отсчётной функции перед произведением появляется множитель $\cos\left(\frac{\pi}{T}\left(t + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^N t_k\right)\right) / \cos\left(\frac{\pi}{T} \sum_{k=0}^N t_k\right)$,

2) число косинусов равно $(N - 1)/2$,

3) число синусов $(N + 1)/2$.

При наличии амплитудного шума возникает погрешность воспроизведения

$$\xi(t) = \sum_{r=0}^N \xi(t_r) W_r(t - t_r).$$

Для некоррелированного шума $\{\xi(t_r)\}$ с нулевым средним мощность погрешности воспроизведения

$$\langle \varepsilon_\xi^2 \rangle = \sigma_\xi^2 \sum_{r=0}^N \frac{1}{T} \int_{-0,5T}^{0,5T} dt W_r^2(t - t_r) \geq \sigma_\xi^2. \quad (9)$$

Далее исследуются возможности фильтрации сигнала с использованием аналитических соотношений для отсчётных функций $\{W_r(t - t_r)\}$.

Рассмотрим одиночный период, структура которого определяется формулой

$$T = (x + N + x)\Delta. \quad (10)$$

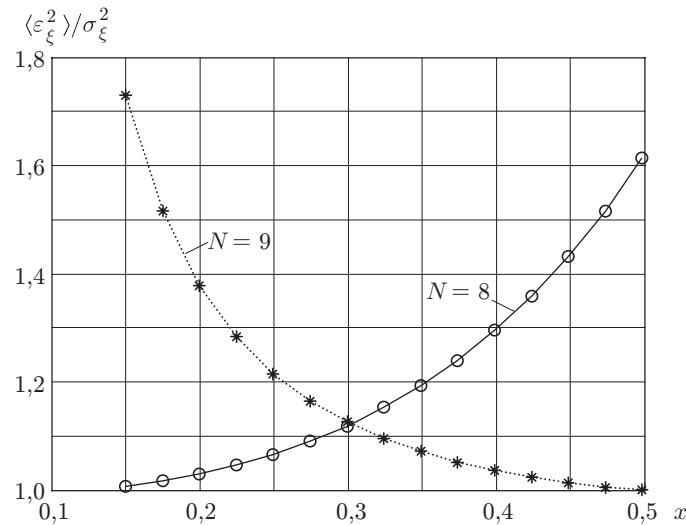
В центре этого периода расположены N интервалов дискретизации ($N + 1$ отсчёт), а по краям периода — два отрезка интервалов размером $x < 1$ каждый. Периодический сигнал на этом интервале может быть описан соотношением (6а), где величины $f(t_r)$ — амплитуды отсчётов, а аргументы t_r — их абсциссы, равные $-N\Delta/2 + x\Delta + r\Delta$ ($r = \overline{0, N}$).

Если отрезки $x\Delta$ устремляются к нулю ($T \rightarrow N\Delta$), то знаменатели отсчётных функций $W_0(t + N\Delta/2)$ и $W_0(t - N\Delta/2)$ также стремятся к нулю и величина отсчётных функций неограниченно возрастает. При наличии амплитудного шума дисперсия ошибки воспроизведения также неограниченно увеличивается. Чтобы избежать этого эффекта, выбросим из периода (10) отсчёт t_0 и получим новый период той же длины:

$$T = ((x + 1) + (N - 1) + x)\Delta, \quad (10a)$$

в котором длина левого отрезка равна $(x + 1) > 1$; далее идут $N - 1$ интервалов дискретизации и правый отрезок длиной x . Математическое описание сигнала на данном периоде имеет вид

$$f(t) = \sum_{r=1}^N f(t_r) W_r^*(t - t_r).$$



В этом соотношении все амплитуды отсчётов совпадают с соответствующими амплитудами и их абсциссами на периоде (10), а отсчётные функции новые, так как построены для N отсчётов. Такая простая процедура позволяет сделать дисперсию ошибки воспроизведения при $x \rightarrow 0$ близкой к дисперсии шума σ_{ξ}^2 .

На рисунке дан график отношения дисперсии ошибки воспроизведения $\langle \varepsilon_{\xi}^2 \rangle$ к дисперсии шума σ_{ξ}^2 для случая $0 \leq x \leq 0,5$ при использовании математического описания сигнала для периодов (10) и (10а) и их предпочтительного применения (расчёт проведён для $N = 9$ и $N = 8$).

Следует добавить, что удаление одного отсчёта на периоде приводит к уменьшению общего числа гармоник в описании сигнала на одну.

Если число гармоник в описании сигнала является избыточным, то фильтрация шума на одном периоде путём соответствующей обработки сигнала (6а), отсчётные значения которого искажены амплитудным шумом, может быть осуществлена двумя способами.

При первом из них по формулам (6а) и (8) составляется математическое описание сигнала и вычисляются амплитуды L необходимых гармоник этого описания. Очевидно, что дисперсия погрешности полученного сигнала уменьшается приблизительно в $R = (N + 1)/L$ раз.

При втором способе все отсчёты сигнала на периоде делятся на $R = (N + 1)/L$ групп из равномерно расположенных отсчётов. Первая группа отсчётов имеет абсциссы с индексом r :

$$0, R, 2R, \dots, (L - 1)R,$$

индексы t_{2r} абсцисс второй группы отсчётов увеличиваются на единицу:

$$1, 1 + R, 1 + 2R, \dots, 1 + (L - 1)R,$$

индексы t_{3r} абсцисс третьей группы отсчётов увеличиваются на два:

$$2, 2 + R, 2 + 2R, \dots, 2 + (L - 1)R$$

и так далее. Индексы абсцисс последней, R -й, группы отсчётов увеличиваются на $R - 1$:

$$R - 1, R - 1 + R, R - 1 + 2R, \dots, R - 1 + (L - 1)R.$$

Для каждой группы из L отсчётов строится математическое описание сигнала $\{W_{ir}(t-t_{ir})\}$ ($i = \overline{1, R}$). Эти R менее громоздких описаний суммируются, результат делится на R . Дисперсия погрешности воспроизведения так же, как и в предыдущем способе, уменьшается примерно в R раз.

Отличие первого способа от второго заключается в том, что необходимые гармоники могут быть произвольными.

Отметим, что при выборе интервала дискретизации желательно руководствоваться правилом: интервал дискретизации равен интервалу корреляции аддитивного шума, поскольку при этом фильтрация близка к максимальной и её алгоритмы наиболее просты.

Рассмотрим ситуацию, когда периоды сигнала следуют друг за другом, а нулевой период определяется формулой (10а). В этом случае периоды образуют последовательность

$$(x + N + x)\Delta, [(1 - x) + (N - 1) + 3x]\Delta, [(1 - 3x) + (N - 1) + 5x]\Delta, \dots$$

Анализ показывает, что при $x \ll 1$ эта последовательность периодов распадается примерно на $1/(2x)$ подпоследовательностей периодов, в каждой из которых в одном периоде отбрасывается отсчёт и дисперсия погрешности воспроизведения становится одинаковой во всех периодах.

После предварительной обработки всей совокупности периодов и составления математического описания на каждом из периодов окончательная фильтрация сводится к суммированию математических описаний всех M периодов и последующему делению этой суммы на их число.

Дисперсия погрешности воспроизведения сигнала, вызванная амплитудным некоррелированным шумом отсчётов, при этом становится в M раз меньше, чем при фильтрации сигнала на одном его периоде.

Использование фильтров с конечной импульсной характеристикой. Рассмотрим применение фильтров длин $L = 2n + 1$ [3] и $L = 2n$ с отсчётными функциями

$$W_p = \cos(\omega\Delta p) / \sum_{r=-n}^n \cos^2(\omega\Delta r), \quad p = \overline{-n, n}, \quad (11a)$$

$$W_p = \cos(\omega\Delta(2|p| - 1)/2) / 2 \sum_{r=1}^n \cos^2(\omega\Delta(2r - 1)/2), \quad p = \overline{-n, n}, \quad p \neq 0. \quad (11b)$$

Эти фильтры не искажают сигнала частоты ω и приводят к уменьшению отношения шум/сигнал, так как после фильтрации дисперсия шума

$$\langle \varepsilon_\xi^2 \rangle = \sigma_\xi^2 / \sum_{r=-n}^n \cos^2(\omega\Delta r), \quad (12a)$$

$$\langle \varepsilon_\xi^2 \rangle = \sigma_\xi^2 / 2 \sum_{r=1}^n \cos^2(\omega\Delta(2r - 1)/2). \quad (12b)$$

Если сигнал содержит только одну гармонику, не кратную периоду T интервалу дискретизации Δ не влияет на процесс подавления некоррелированного шума и с увеличением

длины фильтра остаточная дисперсия шума в соответствии с (12а), (12б) уменьшается примерно в n раз. Когда сигнал содержит несколько гармоник, не кратность периода T интервалу Δ приводит к взаимопроникновению гармоник в результате фильтрации отдельной гармоники.

Коэффициент пропускания частоты λ фильтром, настроенным на частоту ω , определяется очевидным соотношением для фильтра длиной $L = 2n + 1$:

$$W_\omega(\lambda) = C(\omega, \lambda)_{2n+1} / \sum_{r=-n}^n \cos^2(\omega \Delta r), \quad (13а)$$

а для фильтра длиной $L = 2n$:

$$W_\omega(\lambda) = C(\omega, \lambda)_{2n} / 2 \sum_{r=1}^n \cos^2(\omega \Delta (2r - 1)/2). \quad (13б)$$

Здесь и далее по тексту для удобства чтения формул введены обозначения

$$C(\omega, \lambda)_{2n+1} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(\omega - \lambda)\Delta\right)}{2 \sin\left(\frac{(\omega - \lambda)\Delta}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(\omega + \lambda)\Delta\right)}{2 \sin\left(\frac{(\omega + \lambda)\Delta}{2}\right)},$$

$$C(\omega, \lambda)_{2n} = \frac{\sin(2n(\omega - \lambda)\Delta)}{2 \sin((\omega - \lambda)\Delta)} + \frac{\sin(2n(\omega + \lambda)\Delta)}{2 \sin((\omega + \lambda)\Delta)}.$$

Коэффициенты пропускания $W_\lambda(\omega)$ определяются соотношениями, в которых числитель совпадает с числителем (13а) или (13б), а в знаменателях этих соотношений частота ω заменяется частотой λ .

Используя соотношения (11а), (11б), (12а), (12б) и (13а), (13б), можно построить систему линейных уравнений, которая позволит исключить взаимное проникновение гармоник. Например, для двух гармоник и фильтра (11а), содержащего нечётное число отсчётов, получим следующее решение для искомых сигналов:

$$S_\omega = (S(\omega, \lambda)W_\lambda(\lambda) - S(\lambda, \omega)W_\omega(\lambda)) / (W_\omega(\omega)W_\lambda(\lambda) - W_\omega(\lambda)W_\lambda(\omega)); \quad (14)$$

$$S_\lambda = (S(\lambda, \omega)W_\omega(\omega) - S(\omega, \lambda)W_\lambda(\omega)) / (W_\omega(\omega)W_\lambda(\lambda) - W_\omega(\lambda)W_\lambda(\omega)).$$

В соотношениях (14) $S(\omega, \lambda)$, $S(\lambda, \omega)$ — сигналы на выходе фильтров (11а), (11б) с частотой ω и λ соответственно; $W_\omega(\omega) = W_\lambda(\lambda) = 1$. Математическое ожидание величин $\langle S_\omega \rangle = S_\omega$ и $\langle S_\lambda \rangle = S_\lambda$, а дисперсии

$$\langle \varepsilon_{\xi\omega}^2 \rangle = \sigma_\xi^2 \left(\sum_{r=-n}^n \cos^2(\lambda \Delta r) \right) / \left[\left(\sum_{r=-n}^n \cos^2(\omega \Delta r) \right) \left(\sum_{r=-n}^n \cos^2(\lambda \Delta r) \right) - C^2(\omega, \lambda)_{2n+1} \right], \quad (15)$$

$$\langle \varepsilon_{\xi\lambda}^2 \rangle = \sigma_\xi^2 \left(\sum_{r=-n}^n \cos^2(\omega \Delta r) \right) / \left[\left(\sum_{r=-n}^n \cos^2(\omega \Delta r) \right) \left(\sum_{r=-n}^n \cos^2(\lambda \Delta r) \right) - C^2(\omega, \lambda)_{2n+1} \right]. \quad (16)$$

Если отношение $(2n + 1)\Delta/T$ является целым числом, то соотношения (15) и (16) совпадают с формулой (12а).

Заключение. Выполненный в данной работе анализ позволяет оценить минимально возможную ошибку при фильтрации непрерывного периодического сигнала, искажённого стационарным аддитивным некоррелированным шумом, а при незначительном усложнении алгоритмов обработки также учесть некрatность периода сигнала T интервалу дискретизации сигнала Δ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Джексон Д.** Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: ГИИЛ, 1948. 260 с.
2. **Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В.** Отсчётные функции при неравномерной дискретизации периодического сигнала // Автометрия. 2010. **46**, № 6. С. 16–31.
3. **Ефимов В. М.** О предельных возможностях одного из способов статистической обработки результатов измерений стационарного случайного процесса // Автометрия. 1965. № 6. С. 112–115.

Поступила в редакцию 26 октября 2012 г.
