УДК 658.512

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ

А. В. Саушев

Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций,
198035, Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
E-mail: saushev@bk.ru

Рассматривается метод определения оптимальных значений внутренних параметров технических систем, основанный на аналитическом описании области работоспособности, заданной в виде совокупности линейных ограничений. Формируется выражение для целевой функции, которая позволяет использовать любой известный поисковый метод оптимизации системы по критерию запаса работоспособности.

Ключевые слова: параметрический синтез, область работоспособности, запас работоспособности, R-функции.

Введение. Параметрический синтез технических систем (ТС) предполагает решение двух основных задач: определение номинальных значений внутренних параметров системы и допустимых пределов их изменения. Внутренние параметры — это параметры элементов ТС, которые характеризуют состояние и свойства самой системы. При проектировании они определяют вектор $\mathbf{X}$ управляемых параметров. Математическая модель ТС представляет собой алгоритм вычисления вектора выходных параметров $\mathbf{Y}$ при заданных векторах внутренних $\mathbf{X}$ и внешних $\mathbf{V}$ параметров. Внешние параметры характеризуют свойства внешней среды по отношению к ТС и оказывают влияние на её функционирование. Выходные параметры характеризуют свойства ТС, интересующие потребителя. Они представляют собой параметры-функционалы, т. е. функциональные зависимости фазовых переменных ТС и параметры, являющиеся граничными значениями диапазонов внешних переменных, в которых сохраняется работоспособность системы. К выходным параметрам при параметрическом синтезе относятся показатели назначения, параметрической надёжности и экономичности [1]. Показателем параметрической надёжности при ограниченных статистических данных о законах распределения внутренних параметров ТС во времени является запас работоспособности [1, 2]. Область работоспособности $\mathbf{G} = \mathbf{P} \cap \mathbf{M}$ задаёт множество допустимых значений внутренних параметров, при которых выполняются все требования к выходным параметрам ТС, и определяется условиями работоспособности

$$
\begin{gathered}
Y_{j\,\min} \le Y_j = F_j(\mathbf{X}) \le Y_{j\,\max}, \quad j = \overline{1, m}; \\
X_{i\,\min} \le X_i \le X_{i\,\max}, \quad i = \overline{1, n},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $Y_{j\,\max}(X_{i\,\max})$, $Y_{j\,\min}(X_{i\,\min})$ — максимально и минимально допустимые значения j-го выходного Y_j (i-го внутреннего X_i) параметра; F — оператор, устанавливающий связь между внутренними и выходными параметрами; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ — допусковые области, определяемые первым и вторым неравенствами (1). Области $\mathbf{D}$ в пространстве внутренних параметров соответствует допусковая область $\mathbf{M}$.

В данной работе рассматривается поисковый метод оптимизации, который предполагает, что каждая из функций-ограничений неравенства (1): $Y_{j\max} - F_j(\mathbf{X}) \geq 0$ и $F_j(\mathbf{X}) - Y_{j\min} \geq 0$ — аппроксимирована конечным множеством линейных гиперповерхностей f_j [1, 3, 4] и область $\mathbf{M}$ задана системой неравенств

$$\sum_{j=1}^{2m} f_j(\mathbf{X}) \geq 0, \quad f_j(\mathbf{X}) = b_{j0} + \sum_{i=1}^{n} b_{ji} X_i \geq 0,$$

где b_{j0}, b_{ji} — коэффициенты модели.

В отличие от известных методов параметрической оптимизации [1, 2] предлагаемый метод позволяет сформировать такую целевую функцию, для которой возможно применение любого известного алгоритма поисковой оптимизации. При этом обеспечивается максимально возможный или заданный запас работоспособности ТС.

Выбор целевой функции. Рассмотрим методологические аспекты выбора целевой функции при оптимизации ТС. В основу методологии положен аксиоматический принцип.

Постулат 1. Основополагающий постулат методологии — констатация того факта, что любая ТС характеризуется двумя обобщёнными параметрами: эффективностью (полезностью) и затратами (платой за полезность). Постулат логически вытекает из фундаментального философского закона диалектического единства противоположностей. Следствием постулата является формулировка двух критериев оценки ТС: эффективности (Q_1) и цены (Q_2). Критерий цены характеризует ТС значением параметра Q_2 при фиксированном значении параметра Q_1, а критерий эффективности — значением параметра Q_1 при фиксированном значении параметра Q_2.

Постулат 2. Обобщённые параметры ТС Q_1 и Q_2 могут быть представлены в виде функциональных зависимостей от её выходных и ресурсных параметров, под которыми понимаются параметры системы, определяющие величину затрат и характеризующие потребление различных ресурсов при её создании и эксплуатации.

Постулат 3. Два варианта S_1 и S_2 решения задачи оптимизации считаются равно эффективными ($Q_1(S_1) = Q_2(S_2)$) лишь в том случае, когда равны попарно их соответствующие выходные параметры ($Y_j(S_1) = Y_j(S_2)$). На основе постулата 3 функция $Q_1(\mathbf{Y})$ конкретизируется в форме вектора.

Постулат 4. Ресурсы ТС тождественны товарам. При этом любой товар как экономическая категория принципиально имеет цену и она может быть установлена. Следствием постулата является конкретизация функции цены в форме $Q_2 = \Sigma\beta T$, где β — стоимость (цена) единицы ресурса (товара) T. Эта формула по своей сути принципиально отличается от похожей по форме аддитивной функции записи обобщённого показателя качества, которую вводят в целях сведения векторной оценки ТС к скалярной [2].

Задача оптимизации критерия цены налагает на обобщённый параметр Q_1 условие его постоянства. Единственно возможный способ удовлетворить этому требованию — фиксирование всех выходных параметров ТС, т. е. задание определённых потребительских свойств системы. При этом само выражение и, следовательно, методология оптимизации инвариантны относительно величины фиксированного значения цели системы и устанавливают лишь форму её задания.

Задача оптимизации критерия эффективности Q_1 предполагает нахождение его максимума. Вместе с тем операция оптимизации вектора не имеет смысла. Единственным логически возможным способом разрешения этого противоречия является фиксация всех компонентов вектора, кроме одного, который и подлежит максимизации. При этом $Q_1 = (Y_q, Y_j = \text{const})$, $j = \overline{1, m}$, $j \neq q$, где q — нефиксированный выходной параметр ТС.

Выражение для критерия Q_1 накладывает на параметр Y_j, $j \neq q$, только требование фиксированности, но оставляет полную свободу выбора его конкретных значений.

Анализ литературных источников показывает, что для большинства ТС на первое место выдвигается требование высокой надёжности. Для ТС, характеризующихся параметрической нестабильностью, особую актуальность приобретает требование обеспечения параметрической надёжности. Применительно к решаемой задаче это означает, что в качестве параметра Y_q целесообразно выбрать запас работоспособности ТС, который необходимо максимизировать. Обоснование и особенности выбора предлагаемой целевой функции рассматриваются в работе [2].

Формирование целевой функции. В пространстве R^n внутренних параметров введём метрику l, которая является функцией координат двух любых точек этого пространства, например точек A и B. При этом

$$l = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i(A) - X_i(B))^2},$$

где $X_i(A)$, $X_i(B)$ — координаты векторов точек A и B соответственно; μ_i — нормирующий множитель по i-й координате параметров $\mathbf{X}$. Если одна из точек, например точка A, является граничной точкой области работоспособности, а точка B находится внутри этой области и её координаты характеризуют состояние ТС в данный момент времени, то эта метрика будет определять запас работоспособности и служить критерием поиска координат оптимальной точки.

Для формирования целевой функции представим область работоспособности в виде единого аналитического выражения. С этой целью введём в рассмотрение логические R-функции и воспользуемся их свойствами [5]. При этом область работоспособности может быть задана следующим неравенством [6]:

$$(((\varphi_1 \wedge_{\alpha 1}^k \varphi_2) \wedge_{\alpha 2}^k \varphi_3) \wedge_{\alpha 3}^k \ldots) \wedge_{\alpha (g-1)}^k \varphi_d = \mathop{\wedge_{\alpha g}^k}_{g=1}^{d} \varphi_g \geq 0, \tag{2}$$

где $\wedge_{\alpha g}^k$ — R-конъюнкция R-функций φ_g, обеспечивающая возможность взятия k производных; α_g, $g = \overline{1, d}$, — величины, принадлежащие интервалу $[-1; 1]$.

Если все ограничения (1) являются двухсторонними, то $d = 2(m + n)$. При этом для функций-ограничений $f_j(\mathbf{X})$: $Y_{j\,\max} - F_j(\mathbf{X}) \geq 0$ и $F_j(\mathbf{X}) - Y_{j\,\min} \geq 0$ — функция $\varphi_g = f_j(\mathbf{X})$, $g = j$, $j = \overline{1, 2m}$, а для функций-ограничений $f_i(\mathbf{X})$: $X_{i\,\max} - X_i \geq 0$ и $X_i - X_{i\,\min} \geq 0$ — функция $\varphi_g = f_i(\mathbf{X})$, $g = i$, $i = \overline{1, 2n}$. В формуле (2) могут быть опущены скобки и конечный результат не будет зависеть от последовательности свёртки R-функций $\varphi_g = \varphi_g(\mathbf{X})$.

Для построения R-конъюнкции можно воспользоваться выражением [6]

$$\varphi_1 \wedge_\alpha^k \varphi_2 = \left(\varphi_1 + \varphi_2 - \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\alpha\varphi_1\varphi_2}\right) \Big/ (1 + \alpha). \tag{3}$$

В случае если не требуется, чтобы R-конъюнкция была дифференцируема, формула (3) может быть упрощена. Принимая $\alpha = 1$, получим

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0{,}5(\varphi_1 + \varphi_2 - |\varphi_1 - \varphi_2|). \tag{4}$$

В развёрнутой форме функция $G = G(\mathbf{X})$, аналитически описывающая область работоспособности $\mathbf{G}$, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} G = \varphi_{(d)} = 0{,}5(\varphi_{(d-1)} + \varphi_d - |\varphi_{(d-1)} - \varphi_d|), \\ \varphi_{(d-1)} = 0{,}5(\varphi_{(d-2)} + \varphi_{d-1} - |\varphi_{(d-2)} - \varphi_{d-1}|), \\ \ldots \\ \varphi_{(g)} = 0{,}5(\varphi_{(g-1)} + \varphi_g - |\varphi_{(g-1)} - \varphi_g|), \\ \ldots \\ \varphi_{(3)} = 0{,}5(\varphi_{(2)} + \varphi_3 - |\varphi_{(2)} - \varphi_3|), \\ \varphi_{(2)} = 0{,}5(\varphi_1 + \varphi_2 - |\varphi_1 - \varphi_2|). \end{cases} \tag{5}$$

Приравнивая функцию G к нулю, получим уравнение $G = 0$, описывающее границу области работоспособности ТС. Представляя G в виде R-конъюнкции функций $M = M(\mathbf{X})$ и $P = P(\mathbf{X})$, которые описывают соответственно области $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}$, будем иметь

$$G = 0{,}5(M + P - |M - P|) \geq 0. \tag{6}$$

Для аналитического описания области $\mathbf{M}$ в системе уравнений (5) нужно произвести замены $g = j$, $d = 2m$, $G = M$ и для области $\mathbf{P}$ замены $g = i$, $d = 2n$, $G = P$. В случае если $m = n = 2$, а внутренние параметры заданы в относительных единицах, причём $X_{1\min} = X_{2\min} = -1$, $X_{1\max} = X_{2\max} = 1$, области $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ запишутся в виде следующих неравенств:

$$P = 0{,}5\Big(2 - |X_1| - |X_2| - \Big||X_2| - |X_1|\Big|\Big) \geq 0,$$

$$M = 0{,}25\Big(Y_{1\max} + Y_{2\max} - Y_{1\min} - Y_{2\min} -$$

$$- |2F_1(X_1, X_2) - Y_{1\max} - Y_{1\min}| - |2F_2(X_1, X_2) - Y_{2\max} - Y_{2\min}| -$$

$$- \Big|Y_{1\max} + Y_{2\min} - Y_{1\min} - Y_{2\max} + |2F_1(X_1, X_2) - Y_{2\max} - Y_{2\min}| -$$

$$- |2F_2(X_1, X_2) - Y_{1\max} - Y_{1\min}|\Big|\Big) \geq 0.$$

Получим уравнение границы области $\mathbf{G}_\mu$, расположенной эквидистантно области $\mathbf{G}$ и внутри неё. При этом граничные точки областей $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_\mu$ будут располагаться относительно друг друга в направлении градиента к функции $G(\mathbf{X})$ на одинаковом расстоянии l.

Рассмотрим две граничные точки $N \in f_j(\mathbf{X}) \in \mathbf{M}$ и $N^\mu \in f_j^\mu(\mathbf{X}) \in \mathbf{M}_\mu$. Координаты точки N^μ можно выразить через координаты точки N по формуле

$$X_i^\mu = X_i + \frac{(\partial f_j(\mathbf{X})/\partial X_i)l}{|\mathrm{grad} f_j(\mathbf{X})|} = X_i + \frac{b_{ji}}{|\mathrm{grad} f_j(\mathbf{X})|}\, l,$$

$$\mathrm{grad} f_j(\mathbf{X}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\partial f_j(\mathbf{X})/\partial X_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_{ji}^2},$$

откуда

$$f_j^{\mu}(\mathbf{X}) = f_j(\mathbf{X}) - |\mathrm{grad} f_j(\mathbf{X})| l. \tag{7}$$

Область $\mathbf{M}_{\mu}$ аналитически записывается аналогично области $\mathbf{M}$ по формуле (5), в которой $\varphi_g = f_j^{\mu}(\mathbf{X})$, а функция M заменяется функцией M_{μ}. В случае если граничная точка принадлежит области $\mathbf{P}$, координаты точки N^{μ} определяются выражением $X_i^{\mu} = X_i \pm l$. Аналитическое описание области $\mathbf{P}_{\mu}$ аналогично описанию области $\mathbf{P}$, при этом $\varphi_g = f_i^{\mu}(\mathbf{X})$. Из формулы (6) следует, что $G_{\mu} = 0{,}5(M_{\mu} + P_{\mu} - |M_{\mu} - P_{\mu}|) \geq 0$.

Для дальнейшего изложения метода сформулируем и докажем две теоремы.

Теорема 1. При любом числе R-функций $\varphi_g(\mathbf{X})$, $g = \overline{1, d}$, значение R-функции G_{μ}, описывающей границу области $\mathbf{G}_{\mu}$ в виде конъюнкции этих функций, определяется значением функции, которое является наименьшим среди всех R-функций $\varphi_g(\mathbf{X})$.

Доказательство. Выберем произвольно две R-функции $\varphi_g(\mathbf{X})$ и $\varphi_{g+1}(\mathbf{X})$ из их общего числа d, составляющие описание области $\mathbf{G}_{\mu}$. Получим для этих функций R-конъюнкцию

$$\varphi_{(g+1)}(\mathbf{X}) = 0{,}5(\varphi_g(\mathbf{X}) + \varphi_{g+1}(\mathbf{X}) - |\varphi_g(\mathbf{X}) - \varphi_{g+1}(\mathbf{X})|).$$

Пусть для некоторой произвольно выбранной точки, принадлежащей области $\mathbf{G}$, выполняется неравенство $\varphi_g(\mathbf{X}) \leq \varphi_{g+1}(\mathbf{X})$. Раскрывая знак модуля, получим, что $\varphi_{(g+1)}(\mathbf{X}) = \varphi_g(\mathbf{X})$. В противном случае, если $\varphi_g(\mathbf{X}) > \varphi_{g+1}(\mathbf{X})$, то $\varphi_{(g+1)}(\mathbf{X}) = \varphi_{g+1}(\mathbf{X})$. Исходя из правила объединения R-функций в R-конъюнкции, можно заключить, что после выполнения d операций свёртки функция G_{μ} будет тождественно равна такому значению R-функции, которое принимает наименьшее значение из всех R-функций $\varphi_g(\mathbf{X})$, $g = \overline{1, d}$, составляющих границу области $\mathbf{G}$. Поскольку $\varphi_g(\mathbf{X})$ и $\varphi_{g+1}(\mathbf{X})$ были выбраны произвольно, то можно заключить, что данное правило справедливо и для любых других R-функций. Теорема доказана.

Теорема 2. Для всех точек, определяющих линейную гиперповерхность f_j^{μ} области G^{μ}, вычисленное значение R-функции G^{μ} есть величина постоянная.

Доказательство. Для любой точки гиперповерхности f_j R-функция $G = 0$. Данное утверждение следует из того, что гиперповерхность f_j является частью границы области работоспособности. Поскольку каждая точка, составляющая гиперповерхность f_j^{μ}, есть отображение соответствующей ей точки гиперповерхности f_j и отстоит от неё на одну и ту же величину, определяемую шагом сужения области $\mathbf{G}$, то гиперповерхности f_j и f_j^{μ} параллельны. Из этого условия следует, что значение функции G^{μ} — величина постоянная для любой произвольной точки гиперповерхности f_j^{μ}. Теорема доказана.

Таким образом, функция G_{μ} принципиально может быть использована в качестве целевой при параметрическом синтезе ТС по критерию запаса работоспособности. Её недостаток заключается в невозможности применения поисковых методов оптимизации, поскольку для разных граничных точек области $\mathbf{G}_{\mu}$ функция G_{μ} не является постоянной, а принимает значение из множества возможных $\{f_1^{\mu}, f_2^{\mu}, \ldots, f_{2m}^{\mu}, l\}$. Построим такую R-функцию, которая будет принимать единственное значение для любой точки, находящейся на одинаковом расстоянии от границы области работоспособности. В этих целях на основании (7) сформируем R-функции вида

$$\varphi_j^{l}(\mathbf{X}) = f_j^{\mu}(\mathbf{X}) / |\mathrm{grad} f_j(\mathbf{X})| = f_j(\mathbf{X}) / |\mathrm{grad} f_j(\mathbf{X})| - l.$$

Легко видеть, что для любой внутренней точки области работоспособности, находящейся на одинаковом расстоянии от её ближайшей граничной точки, вычисленное значение функции $\varphi_j^l(\mathbf{X})$ будет равно l. Искомая функция окончательно будет иметь вид

$$G_l = 0{,}5(M_l + P_l - |M_l + P_l|). \tag{8}$$

В формуле (8) функция M_l вычисляется аналогично функции M_μ. Для этого в (5) следует заменить функции $\varphi_g = \varphi_g(\mathbf{X})$ функциями $\varphi_j^l(\mathbf{X}) = \varphi_j^l(\mathbf{X})$, а M — функцией M_l. Функция P_l тождественно равна функции P_μ. Для вычисления координат оптимальной точки по критерию $\max G_l$ может быть использован любой поисковый метод оптимизации. Важным свойством полученной функции является возможность распознавания состояния ТС. Если вычисленное значение функции положительное, то ТС находится в работоспособном состоянии, если отрицательное — система неработоспособна. Если значения параметров $\mathbf{X}$ выражены в относительных единицах, вычисленное значение функции будет характеризовать относительное значение запаса работоспособности ТС, принадлежащее интервалу $[-1; 1]$.

Пример. Пусть внутренние параметры ТС выражены в относительных единицах, область работоспособности совпадает с областью M и определяется ограничениями:

$$f_1(X_1, X_2) = X_1 + 4X_2 - 1 \geq 0, \quad f_2(X_1, X_2) = -X_1 + 2X_2 + 0{,}2 \geq 0,$$

$$f_3(X_1, X_2) = 3X_1 - 2X_2 + 0{,}2 \geq 0, \quad f_4(X_1, X_2) = -7X_1 - 6X_2 + 8{,}8 \geq 0;$$

$$G = f_1(X_1, X_2) \wedge f_2(X_1, X_2) \wedge f_3(X_1, X_2) \wedge f_4(X_1, X_2).$$

На основании (5) целевая функция будет иметь следующий вид:

$$G_l = 0{,}5(\varphi_{12}(X_1, X_2) + \varphi_{34}(X_1, X_2) - |\varphi_{12}(X_1, X_2) - \varphi_{34}(X_1, X_2)|);$$

$$\varphi_{12}(X_1, X_2) = 0{,}5(\varphi_1(X_1, X_2) + \varphi_2(X_1, X_2) - |\varphi_1(X_1, X_2) - \varphi_2(X_1, X_2)|),$$

$$\varphi_{34}(X_1, X_2) = 0{,}5(\varphi_3(X_1, X_2) + \varphi_4(X_1, X_2) - |\varphi_3(X_1, X_2) - \varphi_4(X_1, X_2)|),$$

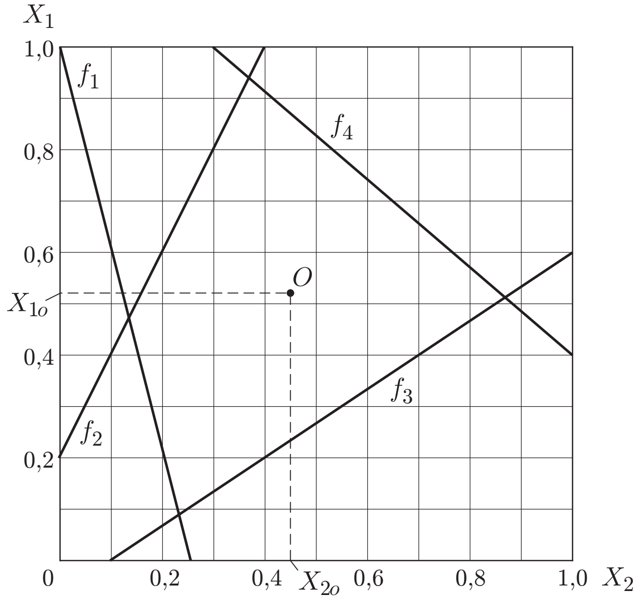
$$\varphi_1(X_1, X_2) = f_1(X_1, X_2)/\mathrm{grad} f_1(X_1, X_2) - l = (X_1 + 4X_2 - 1)/\sqrt{17},$$

$$\varphi_2(X_1, X_2) = f_2(X_1, X_2)/\mathrm{grad} f_2(X_1, X_2) - l = (-X_1 + 2X_2 + 0{,}2)/\sqrt{5},$$

$$\varphi_3(X_1, X_2) = f_3(X_1, X_2)/\mathrm{grad} f_3(X_1, X_2) - l = (3X_1 - 2X_2 + 0{,}2)/\sqrt{13},$$

$$\varphi_4(X_1, X_2) = f_4(X_1, X_2)/\mathrm{grad} f_4(X_1, X_2) - l = (-7X_1 - 6X_2 + 8{,}8)/\sqrt{85}.$$

При оптимизации использовался симплексный метод [7], не требующий дифференцирования целевой функции. В результате были получены значения $X_{1o} = 0{,}5377$ и $X_{2o} = 0{,}4512$ внутренних параметров, которые с заданной погрешностью характеризуют максимально возможный запас работоспособности системы $G_l = l = 0{,}2526$. Рисунок иллюстрирует исходную область работоспособности, заданную ограничениями $f_1 = f_1(X_1, X_2)$, $f_2 = f_2(X_1, X_2)$, $f_3 = f_3(X_1, X_2)$, $f_4 = f_4(X_1, X_2)$, и оптимальную точку O.



Заключение. Рассмотренный в данной работе метод параметрического синтеза ТС по критерию запаса работоспособности обеспечивает единственное решение задачи на основе известных поисковых алгоритмов. При этом исключается зацикливание и полученный результат в относительных единицах характеризует запас работоспособности ТС. Аналитическое описание области работоспособности на основе использования R-функций позволяет идентифицировать состояние ТС и решать задачи прогнозирования. Необходимым условием применения метода является задание области работоспособности ТС в виде линейных ограничений на значения её внутренних параметров. Метод апробирован при решении задач параметрического синтеза разнообразных электротехнических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Норенков И. П.** Основы автоматизированного проектирования. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 336 с.
2. **Саушев А. В.** Методы управления состоянием электротехнических систем. С.-Пб.: СПГУВК, 2004. 126 с.
3. **Диго Г. Б., Диго Н. Б.** Реализация параллельного алгоритма аппроксимации области работоспособности выпуклым многогранником // Информатика и системы управления. 2006. № 1(11). С. 167–174.
4. **Шарая И. А.** Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии. 2005. **10**, № 5. С. 103–119.
5. **Рвачев В. Л.** Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967. 213 с.
6. **Саушев А. В.** Метод построения границы области работоспособности электротехнических объектов // Электричество. 1990. № 4. С. 14–19.
7. **Саушев А. В.** Сеточный метод построения областей работоспособности технических объектов на основе алгоритма симплексного поиска // Журнал университета водных коммуникаций. 2010. Вып. 1. С. 58–69.

Поступила в редакцию 13 июня 2012 г.