

УДК 621.321

## О ПОНИЖЕНИИ ПОРЯДКА СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ ДВОЙНОГО ПЕРЕВЁРНУТОГО МАЯТНИКА

А. А. Воевода, А. Н. Корюкин, А. В. Чехонадских

*Новосибирский государственный технический университет,  
630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: alchek@ngs.ru*

Рассматривается проблема стабилизации неустойчивого объекта одноканальным регулятором пониженного порядка. Исследуется двойной перевёрнутый маятник, установленный на тележке, и возможность компенсации его малых отклонений за счёт воздействия на тележку. На основе конструкции корневых симплексов предлагается алгебраический метод нахождения экстремальных расположений полюсов. С помощью этого вычисляются границы гурвицевой устойчивости для различных видов регуляторов пониженного порядка. Устанавливается невозможность робастной стабилизации маятниковой системы в классе регуляторов пониженного порядка.

*Ключевые слова:* система автоматического управления, регулятор пониженного порядка, двойной перевёрнутый маятник, гурвицева устойчивость, кратные полюсы.

**Введение.** Многозвенные перевёрнутые маятники с математической точки зрения представляют собой классический пример неустойчивых объектов, которым для тестовых целей можно придать нужное число неустойчивых полюсов. Вместе с тем перевёрнутые маятники оказываются адекватными моделями для ряда технических приложений. Так, несколько конкретных задач, где используется модель однозвенного маятника с подвижным основанием, приведено в [1, 2]. Двухзвенный перевёрнутый маятник нередко применяется при проектировании и расчёте устойчивости шагающих роботов [3, 4]. В данной работе рассматривается двойной математический маятник, который можно считать простейшей моделью, описывающей малые отклонения двухзвенного перевёрнутого механического маятника.

Задача стабилизации однозвенного перевёрнутого маятника за счёт движения колеса, на котором он установлен, решается теоретически и моделируется численно в [1] как практически реализуемое управление объектом, близким к двухколёсной платформе "Segway". В [5] изучается двухзвенный перевёрнутый маятник, установленный на тележке, а управление строится по полному вектору состояния.

В работе [6] авторы рассматривали задачу стабилизации малых отклонений двухзвенного перевёрнутого маятника, установленного на неподвижном шарнире; управляющие воздействия прилагались к обоим звеньям. В некоторых случаях численное нахождение зон устойчивости оказывалось весьма трудным из-за незначительности их размеров, а достигнутая устойчивость — неудовлетворительной с точки зрения робастности. Найти стабилизирующий регулятор удавалось оптимизационным методом, близким к изложенному в [7, 8], где в качестве целевой принималась гурвицева функция — максимум действительных частей полюсов системы. Сложности её минимизации: невыпуклость, многоэкстремальность, овражный рельеф, разрывы 2-го рода у производных — отчасти преодолевались тем, что в пространстве параметров управления отыскивались не точки стабилизации, а точки, задающие определённые расположения полюсов системы, например четырёхкратные корни для трёхпараметрического регулятора.

Достижение оптимального запаса устойчивости (степени устойчивости) линейных систем там, где максимальное число полюсов скапливается на правой границе области их расположения, отмечалось и исследовалось достаточно давно и по разным причинам [9, 10]. Однако реализуемость в конкретной системе и эффективное отыскание таких расположений составляет отдельную проблему. Выяснение их числа и структуры стало возможно благодаря развитой авторами конструкции корневых симплексов и симплектических графов [7].

В данной работе предлагается алгебраический подход к поиску критических расположений полюсов и соответствующих точек в пространстве параметров. Ранее этот метод использовался авторами для поиска оптимальных по запасу гурвицевой устойчивости регуляторов для объекта, состоящего из трёх масс с упругими связями [11, 12]. Целенаправленный поиск точек, где реализуется критическое расположение характеристических корней, позволял избежать трудностей пошаговых алгоритмов.

Здесь рассматривается более сложная задача, чем в [6, 11]: двойной перевёрнутый маятник предполагается установленным на подвижной тележке, а его стабилизация осуществляется с помощью приложенного к тележке управления пониженного порядка. Линеаризованная вблизи положения равновесия модель задаёт неустойчивый объект 6-го порядка. Задача его стабилизации опирается на минимизацию гурвицевой функции в пространстве параметров, размерность которого доходит до девяти, что представляло бы слишком большие трудности для численных алгоритмов.

Используемый далее алгебраический способ нахождения критических точек не требует итерационных и градиентных методов, применявшихся ранее как западными специалистами [9], так и авторами [6, 7]. Представление критических точек корневыми портретами (т. е. диаграммами, фиксирующими взаимное расположение характеристических корней на комплексной плоскости [7, 8]) естественно реализуется с помощью корневых координат так же, как это делалось в [11, 12].

Изучение одно- и двумерных критических многообразий в пространстве параметров позволяет убедиться, что в точке с максимальным порядком полюса достигается глобальный минимум гурвицевой функции и тем самым наибольший запас устойчивости.

**1. Постановка задачи.** Модель двойного перевёрнутого маятника, линеаризованная вблизи положения равновесия — так называемый математический маятник — обычно используется для описания его малых отклонений. Такой маятник, установленный на подвижной тележке массой, близкой к массе звеньев, представляет собой объект, обладающий двумя неустойчивыми полюсами и двумя полюсами на границе устойчивости (или близкими к ней в зависимости от потерь в системе, что будет отмечено далее).

При выборе одноканальной системы управления, в которой контролируемой величиной будет координата верхнего тела, а управляющим воздействием — тяга, приложенная к тележке, возникает ситуация, наиболее трудная для понижения порядка регулятора.

Если с помощью регулятора полного порядка задача решается стандартным способом (заданием знаменателя системы и разрешением диофантова уравнения относительно параметров регулятора), то попытка понижения порядка наталкивается на границу, задаваемую необходимыми условиями устойчивости: скажем, регулятор, описываемый передаточной функцией в виде отношения кубических многочленов, не позволяет влиять на часть коэффициентов характеристического многочлена и устойчивость *a priori* не достижима.

Остаётся исследовать область, лежащую между системами полного порядка и заведомо неустойчивыми системами. В данной работе рассматриваются возможности применения правильных регуляторов. Достигаемая в каждом случае устойчивость оценивается с точки зрения робастности.

Главное внимание будет сосредоточено на поиске критических (потенциально экстремальных) точек гурвицевой функции, обеспечивающих наибольший запас устойчивости.

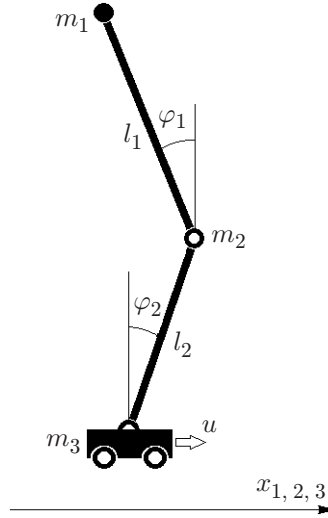


Рис. 1. Двойной перевернутый маятник на тележке

Возможные корневые портреты (взаимные расположения полюсов системы) для таких точек заранее известны, а соответствующая структура характеристического многочлена определяется однозначно. Это позволит эффективно находить в пространстве параметров нульмерные и одномерные многообразия, реализующие тот или иной корневой портрет. Критическими оказываются такие портреты, в которых на правой границе расположения полюсов будет максимальное их число, что, как правило, исчерпывает возможности дальнейшего смещения границы влево, иными словами, делает невозможным увеличение запаса устойчивости.

Фактически вычисляются глобальные минимумы гурвицевой функции, т. е. решается сложная оптимизационная проблема.

**2. Описание объекта.** Простейший вид двойного перевернутого маятника с точечными телами и стержнями пренебрежимой массы схематически представлен на рис. 1. Параметрами объекта оказываются длины звеньев  $l_{1,2}$ , массы тел  $m_{1,2}$  и тележки  $m_3$ . Переменными состояниями объекта естественно считать горизонтальные координаты верхнего и нижнего тел  $x_{1,2}$  и тележки  $x_3$ . Линеаризованная модель такого маятника, установленного на подвижной тележке, имеет вид системы трёх дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно переменных  $x_{1,2,3}$ .

При малых отклонениях вертикальные составляющие сил уравновешены с точностью до величин 2-го порядка малости. Сила, отклоняющая верхнее тело, представляет собой тангенциальную составляющую силы тяжести по отношению к звену  $l_1$ :  $f_1 = m_1 g \sin \varphi_1 = m_1 g (x_1 - x_2) / l_1$ , и направлена почти горизонтально. С учётом сопротивления среды, связанного со скоростью коэффициентом  $\kappa_1$ , получим уравнение

$$m_1 \ddot{x}_1 \simeq m_1 g / l_1 (x_1 - x_2) - \kappa_1 \dot{x}_1.$$

На нижнее тело действуют тангенциальные составляющие силы реакции опоры на давление обоих тел и силы тяжести верхнего тела, а также сопротивление среды:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &\simeq (m_1 + m_2) g (x_2 - x_3) / l_2 - m_1 g / l_1 (x_1 - x_2) - \kappa_2 \dot{x}_2 = \\ &= -m_1 g / l_1 x_1 + g (m_1 / l_1 + (m_1 + m_2) / l_2) x_2 - (m_1 + m_2) g / l_2 x_3 - \kappa_2 \dot{x}_2. \end{aligned}$$

На тележку действует давление тел, сопротивление среды и управляющее воздействие  $u$ :

$$m_3 \ddot{x}_3 \simeq (m_1 + m_2) g (x_3 - x_2) / l_2 - \kappa_3 \dot{x}_3 + u.$$

Переход к операционной форме приводит к системе алгебраических уравнений:

$$m_1 x_1 s^2 + \kappa_1 x_1 s - m_1 g/l_1 (x_1 - x_2) = 0,$$

$$m_2 x_2 s^2 + \kappa_2 x_2 s + m_1 g/l_1 x_1 - g(m_1/l_1 + (m_1 + m_2)/l_2)x_2 + (m_1 + m_2)g/l_2 x_3 = 0,$$

$$m_3 x_3 s^2 + \kappa_3 x_3 s - (m_1 + m_2)g(x_3 - x_2)/l_2 = u.$$

Отсюда возникает матричное уравнение объекта

$$\begin{pmatrix} m_1 s^2 + \kappa_1 s - g \frac{m_1}{l_1} & g \frac{m_1}{l_1} & 0 \\ g \frac{m_1}{l_1} & m_2 s^2 + \kappa_2 s - g \left( \frac{m_1}{l_1} + \frac{m_1 + m_2}{l_2} \right) & g \frac{m_1 + m_2}{l_2} \\ 0 & g \frac{m_1 + m_2}{l_2} & m_3 s^2 + \kappa_3 s - g \frac{m_1 + m_2}{l_2} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $p_1 = gm_1/l_1$ ;  $p_2 = g(m_1 + m_2)/l_2$ ;  $\Delta(s)$  — определитель стоящей в левой части матрицы, т. е. знаменатель  $D(s)$  передаточной функции объекта. Поскольку контролируемой величиной считается  $x_1$ , по правилу Крамера

$$x_1 = \Delta^{-1}(s)p_1 p_2 u.$$

**3. Система с пренебрежимо малыми потерями.** Положим  $\kappa_{1,2,3} \cong 0$ , тогда знаменатель передаточной функции примет вид

$$D(s) = \det \begin{pmatrix} m_1 s^2 - p_1 & p_1 & 0 \\ p_1 & m_2 s^2 - p_1 - p_2 & p_2 \\ 0 & p_2 & m_3 s^2 - p_2 \end{pmatrix} = m_1 m_2 m_3 (s^6 - a s^4 + b s^2),$$

где  $a = p_1(1/m_1 + 1/m_2) + p_2(1/m_2 + 1/m_3)$ ;  $b = p_1 p_2 ((m_1 m_2)^{-1} + (m_1 m_3)^{-1} + (m_2 m_3)^{-1})$ .

Числитель объекта  $N = p_1 p_2$  от  $s$  не зависит.

Как хорошо известно, систему в этом случае можно стабилизировать регулятором полного порядка с передаточной функцией  $C(s) = n_5(s)/d_5(s)$ , где числитель и знаменатель суть многочлены 5-й степени.

Рассмотрим минимальное понижение степени регулятора, при котором он остаётся правильным. Пусть

$$n_4(s) = (p_1 p_2)^{-1} (c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0),$$

$$d_5(s) = s^5 + d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0,$$

тогда характеристический многочлен системы имеет вид

$$f(s) = D(s)d(s) + N(s)n(s) = s^{11} + d_4 s^{10} + (d_3 - a) s^9 +$$

$$\begin{aligned}
 &+ (d_2 - ad_4)s^8 + (d_1 + b - ad_3)s^7 + (bd_4 - ad_2 + d_0)s^6 + (bd_3 - ad_1)s^5 + \\
 &+ (c_4 + bd_2 - ad_0)s^4 + (c_3 + bd_1)s^3 + (bd_0 + c_2)s^2 + c_1s + c_0.
 \end{aligned}$$

Предположим, что выполняется необходимое условие устойчивости, т. е. все коэффициенты этого многочлена положительны. Прежде всего это означает, что

$$c_0, c_1, d_4 > 0. \quad (1)$$

Поскольку  $a, b > 0$ , то для положительности коэффициентов при 5-, 8-, 9-й степенях должны выполняться следующие неравенства:

$$bd_3/a > d_1, \quad (2)$$

$$d_2 > ad_4 > 0, \quad (3)$$

$$d_3 > a > 0. \quad (4)$$

Из положительности коэффициента при 7-й степени и (4) получается

$$d_1 > ad_3 - b > a^2 - b, \quad (5)$$

т. е. верно

$$d_1 > a^2 - b. \quad (6)$$

Но из определения величин  $a, b$  имеем

$$\begin{aligned}
 a^2 - b &= p_1^2 m_1^{-2} + p_1^2 m_2^{-2} + p_2^2 m_2^{-2} + 2p_1^2 (m_1 m_2)^{-1} + 2p_2^2 (m_2 m_3)^{-1} + \\
 &+ p_1 p_2 (m_1 m_2)^{-1} + 2p_1 p_2 m_2^{-2} + p_2^2 m_3^{-2} + p_1 p_2 (m_1 m_3)^{-1} + p_1 p_2 (m_2 m_3)^{-1} > 0.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6), (7) вытекает

$$d_1 > 0. \quad (8)$$

Из неравенств (1), (3) и положительности коэффициента при 6-й степени следует

$$d_0 > ad_2 - bd_4 > (a^2 - b)d_4 > 0. \quad (9)$$

Из (2), (5) должно выполняться  $bd_3/a > ad_3 - b$ , т. е.  $bd_3 > a^2 d_3 - ab$  и  $ab > (a^2 - b)d_3$ . С учётом (7) отсюда вытекает

$$ab/(a^2 - b) > d_3. \quad (10)$$

Из (2) и (6) следует  $bd_3/a > a^2 - b$ , а значит,

$$d_3 > (a^2 - b)a/b. \quad (11)$$

Из неравенств (10) и (11) получается  $ab/(a^2 - b) > (a^2 - b)a/b$ , т. е.  $b^2 > (a^2 - b)^2$ , откуда  $a^4 - 2a^2b < 0$  и

$$a^2 - 2b < 0. \quad (12)$$

Однако, вычитая из выражения (7) сумму, равную  $b$ , будем иметь

$$\begin{aligned} a^2 - 2b &= (a^2 - b) - b = p_1^2 m_1^{-2} + p_1^2 m_2^{-2} + p_2^2 m_2^{-2} + \\ &+ 2p_1^2 (m_1 m_2)^{-1} + 2p_2^2 (m_2 m_3)^{-1} + 2p_1 p_2 m_2^{-2} + p_2^2 m_3^{-2} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при отсутствии потерь (трения, сопротивления среды и т. п.) систему нельзя стабилизировать, прикладывая к тележке управляющее воздействие регулятора со знаменателем 5-й степени и числителем не выше 4-й степени. Иными словами, доказан следующий факт.

**Предложение.** Правильный регулятор может придать устойчивость маятниковой системе без потерь только в том случае, если он полного порядка.

Далее будут рассматриваться системы с небольшими потерями, что позволяет рассчитывать на достижение устойчивости, но, как показывают примеры, только с незначительной робастностью.

**4. Стабилизирующее управление полного порядка с заданным знаменателем для маятника с потерями.** Исходя из предложения разд. 3, попробуем достичь устойчивости системы для конкретного математического маятника с потерями. Выберем регулятор полного порядка, уменьшив число его свободных параметров за счёт фиксации знаменателя.

Зададим параметры маятника: массы  $m_{1,3} = 1$ ,  $m_2 = 2$ , длины  $l_{1,2} = 10$ , коэффициенты потерь  $\kappa_{1,2} = 0,1$ ,  $\kappa_3 = 0,2$ ; примем постоянную тяготения  $g \approx 10$ .

Знаменатель объекта при этих значениях параметров

$$D(s) = 2s^6 + 0,7s^5 - 11,93s^4 + 2,598s^3 + 11,87s^2 + 1,2s,$$

по формулам разд. 3 числитель объекта  $N = p_1 p_2 = 3$ .

Будем искать стабилизирующее управление с помощью правильного регулятора с передаточной функцией

$$C(s) = (c_5 s^5 + c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0) / (p_1 p_2 (s + x_0)^5).$$

Взяв  $x_0 = 10$ , получим приведённый характеристический многочлен

$$\begin{aligned} f(s) &= s^{11} + 50,35s^{10} + 1012s^9 + 10050s^8 + 47480s^7 + 56850s^6 + 0,5[(3c_5 - 5,406 \cdot 10^5)s^5 + \\ &+ (3c_4 - 1,203 \cdot 10^6)s^4 + (3c_3 + 3,457 \cdot 10^5)s^3 + (3c_2 + 1,247 \cdot 10^6)s^2 + (3c_1 + 1,200 \cdot 10^5)s + 3c_0]. \end{aligned}$$

Обозначим его корни как  $s_k$ .

Стабилизация маятника таким регулятором сводится к минимизации функции гурвицевой устойчивости  $H(c_0, \dots, c_5) = \max \operatorname{Re} s_k$  в шестимерном пространстве параметров  $c_0, \dots, c_5$ .

В первую очередь следует рассмотреть критические точки (нульмерные многообразия), где не существует производной  $\partial H / \partial \mathbf{r}$  ни по какому направлению  $\mathbf{r}$  в пространстве параметров.

Такие точки задаются системами из шести уравнений относительно самых правых характеристических корней. Эти уравнения возникают из приравнивания либо самих корней (т. е. из условия их кратности), либо их действительных частей [7, 8].

Число возможных корневых портретов в этом случае обозримо велико — их 34, однако не все такие портреты реализуются. Скажем, шести- и семикомплексных пар корней на одной вертикали не возникает просто из-за того, что степень многочлена равна 11.

**5. Характеристический корень максимальной кратности.** Первая допустимая в шестимерном пространстве параметров возможность, которую надо рассмотреть по аналогии с примерами [6, 11], — это семикратный действительный корень. В отличие от ситуации с трёхмассовой системой [11] здесь этот случай реализуется.

Обозначив корень через  $x$ , сделаем замену переменной  $z = s - x$  в характеристическом многочлене  $f(s)$ , тогда окажется, что  $f(s) = F_x(z)$  и

$$\begin{aligned}
 f(s) = F_x(z) &= \sum_{k=0}^{11} F_k(x)z^k \approx z^{11} + (11x + 50,35)z^{10} + (55x^2 + 503,5x + 1011,5)z^9 + \\
 &+ (165x^3 + 2266x^2 + 9105x + 10050)z^8 + (330x^4 + 6042x^3 + 36415x^2 + 60404x + 47476)z^7 + \\
 &+ (462x^5 + 10574x^4 + 84969x^3 + 281413x^2 + 332332x + 56848)z^6 + \\
 &+ (462x^6 + 12688x^5 + 127453x^4 + 562825x^3 + 996996x^2 + 341090x + 1,5c_5 - 270275)z^5 + \\
 &+ [330x^7 + 10573,5x^6 + 127453x^5 + 703532x^4 + 1661660x^3 + 852725x^2 + 2,5(3c_5 - 540550)x + \\
 &+ 1,5c_4 - 601500]z^4 + [165x^8 + 6042x^7 + 84967x^6 + 562825x^5 + 16616595x^4 + 1136967x^3 + \\
 &+ 5(3c_5 - 540550)x^2 + 2(3c_4 - 1203000)x + 1,5c_3 + 172850]z^3 + \\
 &+ [55x^9 + 2266x^8 + 36415x^7 + 281412x^6 + 996996x^5 + 852725x^4 + 5(3c_5 - 540550)x^3 + \\
 &+ 3(3c_4 - 1203000)x^2 + 1,5(3c_3 + 345700)x + 1,5c_2 + 623500]z^2 + \\
 &+ [11x^{10} + 503,5x^9 + 9104x^8 + 80404x^7 + 332332x^6 + 341090x^5 + 2,5(3c_5 - 540550)x^4 + \\
 &+ 2(3c_4 - 1203000)x^3 + 1,5(3c_3 + 345700)x^2 + (3c_2 + 1247000)x + 1,5c_1 + 60000]z + \\
 &+ x^{11} + 50,35x^{10} + 1011,5x^9 + 10050x^8 + 47476x^7 + 56848x^6 + (1,5c_5 - 270275)x^5 + \\
 &+ (1,5c_4 - 601500)x^4 + (1,5c_3 + 172850)x^3 + (1,5c_2 + 623500)x^2 + (1,5c_1 + 60000)x + 1,5c_0.
 \end{aligned}$$

Как и в исходном многочлене  $f(s)$ , зависимость от параметров  $c_0, \dots, c_5$  здесь линейна и появляется только у коэффициентов  $F_k$ ,  $k = 0, \dots, 5$ , причём матрица этой зависимости теперь треугольна.

Очевидно, наличие у исходного характеристического многочлена семикратного корня  $x$  равносильно обращению в нуль коэффициентов  $F_k$ ,  $k = 0, \dots, 6$ . Отсюда возникает система  $F_0 = \dots = F_5 = 0$  шести алгебраических уравнений, линейных относительно шести параметров регулятора  $c_0, \dots, c_5$ , куда входит также переменная  $x$ , которая должна обращать в нуль коэффициент  $F_6$ :

$$462x^5 + 10573,5x^4 + 84968,9x^3 + 281412,6x^2 + 332332x + 56848 = 0.$$

Корни этого уравнения таковы:

$$x \approx -9,04044; -7,03150; -4,50808; -2,10208; -0,20427.$$

Только для последнего из них ( $x \approx -0,20427$ ) остальные корни многочлена  $f(s) = F_x(z)$  располагаются левее. Уже при  $x = -0,205$  появляется корень  $s \approx -0,19987$ . Таким образом, при уменьшении  $x$  семикратный корень распадается и часть корней уходит вправо.

А для значения  $x \approx -0,20427$  параметры числителя регулятора находятся из системы уравнений  $F_0 = \dots = F_5 = 0$ :

$$c_0 \approx 0,3388; \quad c_1 \approx -0,3999 \cdot 10^5; \quad c_2 \approx -4,1549 \cdot 10^5;$$

$$c_3 \approx -1,1381 \cdot 10^5; \quad c_4 \approx 4,0817 \cdot 10^5; \quad c_5 \approx 2,0195 \cdot 10^5.$$

Чтобы выяснить, доставляет ли эта критическая точка минимум гурвицевой функции, нужно прежде всего исследовать её одномерную окрестность.

**6. Одномерное критическое многообразие.** Аналитическое описание расположения шестикратных корней сводится к тем же шести уравнениям, которые возникают в разд. 5 из приравнивания к нулю коэффициентов многочлена  $F_x(z)$  при степенях  $z^5$  и ниже. Поэтому формулы, выражающие коэффициенты  $c_0, \dots, c_5$  через  $x$ , не меняются:

$$c_5 = 180183,33 - 227393,33x - 664664x^2 - 375216,67x^3 - 84968,67x^4 - 8458,67x^5 - 308x^6,$$

...

$$c_0 = 37900x^6 + 189900x^7 + 140700x^8 + 37760x^9 + 4229x^{10} + 168x^{11}.$$

Здесь в отличие от разд. 5 переменная  $x$  свободна.

**Замечание.** В точности те же выражения коэффициентов  $c_0, \dots, c_5$  через корень  $x$  можно получить и непосредственно, если характеристический многочлен  $f(s)$  поделить с остатком на выражение  $(s - x)^6$ . Имеющий пятую степень остаток  $r(s)$  приравняется к нулю, что даёт шесть линейных уравнений для каждого из коэффициентов  $c_0, \dots, c_5$  (т. е. матрица системы диагональна). А корни  $s_1, \dots, s_5$  частного  $q(s)$  вместе с  $x$  образуют полный набор характеристических корней.

Подстановка выражений коэффициентов регулятора  $c_0, \dots, c_5$  в многочлен  $f(s)$  приводит характеристические корни  $s_1, \dots, s_5$  к зависимости от шестикратного корня  $x$ .

Графики гурвицевой функции  $H(x) = \max \operatorname{Re}(x, s_1, \dots, s_5)$  в разном масштабе приведены на рис. 2. График (рис. 2, а), представляющий функцию  $H(x)$  на отрезке  $[-10; 0]$ , иллюстрирует две её особенности:

1) как отмечалось во введении, функции этого типа многоэкстремальны и имеют сложный овражный рельеф и неограниченные производные;

2) точки минимумов несколько смещены влево от соответствующих семикратных корней, найденных в разд. 5.



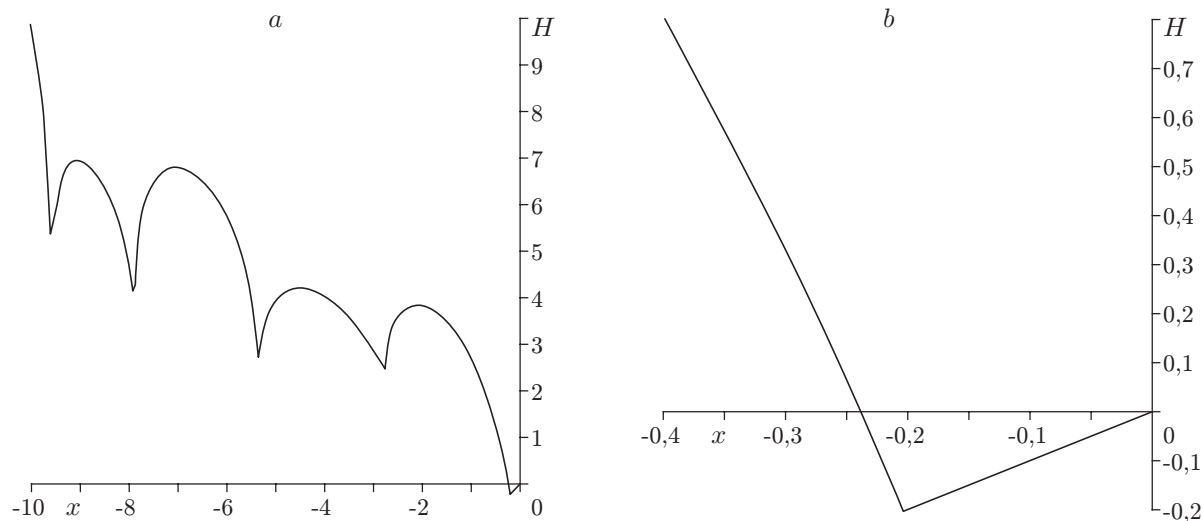


Рис. 2. Функция  $H(x) = \max \operatorname{Re}(x, s_1, \dots, s_5)$ , выражающая зависимость максимума действительных частей характеристических корней от значения  $x$  шестикратного корня, в разном масштабе

График на рис. 2, *b*, представляющий отрезок  $[-0,4; 0]$ , позволяет установить, что на интервале  $(-0,2; 0)$  выполняется равенство  $H(x) = x$ , т. е. шестикратный корень оказывается самым правым.

При  $x = -0,2$  остальные характеристические корни равны  $-15,8525 \pm 3,8689I$ ;  $-8,6075 \pm 7,3853I$  и  $-0,22996$ ; это убеждает, что глобальный минимум функции  $H(x)$  достигается в точке встречи единственного вещественного корня среди  $s_1, \dots, s_5$  и шестикратного корня  $x$ , т. е. при наличии семикратного корня, вычисленного в разд. 5. В этом можно убедиться и непосредственной подстановкой:  $H(-0,2042665819) = -0,2042665819$ .

**7. Кратный вещественный корень и комплексные пары на одной вертикали  $x$ .** Авторами рассматривались ещё три возможности, подобные исследованной в разд. 6; однако здесь это двумерные многообразия в пространстве параметров, которые возникают за счёт попадания комплексных пар и действительных корней на одну вертикаль:

- 1) многообразие, задаваемое равенством  $\operatorname{Re} s_{1,2} = x$  для простой пары корней  $s_{1,2} = x \pm Iy$  и четырёхкратного корня  $x$  (этот случай рассмотрим далее);
- 2) многообразие, задаваемое равенством  $\operatorname{Re} s_{1,2} = x$  для двукратной пары корней  $s_{1,2,3,4} = x \pm Iy$  и двукратного корня  $x$ ;
- 3) многообразие, задаваемое условием троекратности комплексной пары корней  $s_{1,\dots,6} = x \pm Iy$ .

Во всех трёх случаях параметры числителя алгебраически выражаются через две корневые координаты  $x, y$  комплексной пары (точнее, через  $x$  и  $q = x^2 + y^2$ ) и на плоскости  $OXY$  возникает непустая область устойчивости, находящаяся в полосе  $-0,2042665819 \leq x < 0$ . Таким образом, глобальный минимум функции  $H(x) = \max \operatorname{Re}(x, s_1, \dots, s_k)$  определяется левой границей полосы и совпадает с семикратным корнем из разд. 5.

Итак, рассмотрим возможность (1). Предположим, что самые правые характеристические корни системы — это четырёхкратный действительный корень  $x$  и комплексная пара  $z = x \pm Iy$ . Соответствующее многообразие в пространстве параметров  $c_0, \dots, c_5$  задаётся четырьмя равенствами  $\operatorname{Re} z = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$  и потому оказывается двумерным. В этом случае характеристический многочлен  $f(s)$  делится на произведение

$$g_1(s) = (s - x)^4(s^2 - 2x + x^2 + y^2) = (s - x)^4(s^2 - 2x + q),$$

где  $q = x^2 + y^2$  — новый корневой параметр, удовлетворяющий условию  $q > x^2$ .

Частное от деления многочлена  $f(s)$  на  $g_1(s)$  не зависит от параметров регулятора:

$$\begin{aligned} Q(s) = & s^5 + (6x + 50,35)s^4 + (22x^2 + 302,1x + 1012 - q)s^3 + \\ & + (64x^3 + 1108x^2 + 6069x + 10050 - (8x + 50,35)q)s^2 + \\ & + (163x^4 + 3222x^3 + 22250x^2 + 60300x + 47480 - (38x^2 + 402,8x + 1012)q + q^2)s + \\ & + 382x^5 + 8207x^4 + 64740x^3 + 221100x^2 + 284900x + 56850 - \\ & - (140x^3 + 1913x^2 + 8092x + 10050)q + (10x + 50,35)q^2. \end{aligned}$$

Каждый из коэффициентов в остатке от деления  $R(s) = \sum_{k=0}^5 R_k(x, q, c_k)s^k$  включает только один параметр регулятора:

$$\begin{aligned} R(s) = & [848x^6 + (192,3x^5 + 1649x^4 + 6432x^3 + 10440x^2 - 2703) \cdot 10^2 + 1,5c_5 - \\ & - (443x^4 + 7049x^3 + 38440x^2 + 80400x + 47480)q + (58x^2 + 503,5x + 1012)q^2 - q^3]s^5 + \\ & + [(3,272x^7 + 72,71x^6 + 602,9x^5 + 2221x^4 + 3228x^3 + 795,9x^2 + 601,5) \cdot 10^3 - 1,5c_4 + \\ & + (13,9x^5 + 199,9x^4 + 890,2x^3 + 1005x^2 - 949,5x - 568,5) \cdot 10^2q - \\ & - (92x^3 + 100,7x^2 - 4046x - 10050)q^2 - (6x - 50,35)q^3]s^4 + \\ & + [(4,773x^8 + 104,5x^7 + 847,7x^6 + 3015x^5 + 4130x^4 + 909,6x^3 + 172,8) \cdot 10^3 - 1,5c_3 - \\ & - (11,3x^6 + 94,66x^5 - 283,2x^4 - 4020x^3 - 8546x^2 - 2274x) \cdot 10^2q - \\ & - (212x^4 + 4632x^3 + 26300x^2 - 40200x)q^2 + (34x^2 - 201,4x)q^3]s^3 - \\ & - [(3,112x^9 + 67,42x^8 + 538,1x^7 + 1869x^6 + 2469x^5 + 511,6x^4 - 623,5) \cdot 10^3 - 1,5c_2 - \\ & - (5,2x^7 + 210,5x^6 + 92347x^5 - 10050x^4 - 15190x^3 - 3411x^2) \cdot 10^2q + \\ & + (608x^5 + 9466x^4 + 44510x^3 + 60300x^2)q^2 - (56x^3 + 302,1x^2)q^3]s^2 + \\ & + [(7,64x^{10} + 164,1x^9 + 1295x^8 + 4422x^7 + 5697x^6 + 1137x^5 + 600) \cdot 10^2 + 1,5c_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (1,085x^8 + 25,78x^7 + 220,5x^6 + 804x^5 + 1092x^4 + 227,4x^3) \cdot 10^3q - \\
 &- (502x^6 + 7150x^5 + 31360x^4 + 40200x^3)q^2 + (39x^4 + 201,4x^3)q^3]s + \\
 &+ 1,5c_0 - (3,82x^9 + 82,07x^8 + 647,4x^7 + 2211x^6 + 2849x^5 + 568,5x^4) \cdot 10^2q + \\
 &+ (140x^7 + 1913x^6 + 8092x^5 + 10050x^4)q^2 - (10x^5 + 50,35x^4)q^3.
 \end{aligned}$$

Чтобы характеристические корни образовывали заданный корневой портрет, все коэффициенты остатка должны обращаться в нуль:  $R_k(x, q, c_k) = 0$ ,  $k = 0, \dots, 5$ . Отсюда параметры регулятора легко выражаются через корневые координаты  $x, q$ , причём  $x < 0$ ,  $x^2 < q$ .

Прочие характеристические корни, кроме  $x$  и  $s_{1,2} = x \pm Iy$ , должны быть корнями частного  $Q(s)$ , для которого также можно рассмотреть функцию  $H_Q(x, q) = \max \operatorname{Re}(s_1, \dots, s_5)$ .

В отличие от общего случая в области  $H_Q(x, q) \leq x < 0$  эта функция не задаёт сложного рельефа, её минимизация по аргументу  $q$  при фиксированном  $x$  приводит к точкам параболы  $x^2 = q$ , т. е. к шестикратным корням. Самой левой по оси  $Ox$  точкой области, задаваемой неравенством  $H_Q(x, q) \leq x < 0$ , оказывается точка  $x \approx -0,20427$ , где один из корней частного  $Q(s)$  совпадает с шестикратным корнем  $x$  (выполняется равенство  $H_Q(x, q) = x$ ). Таким образом, минимум гурвицевой функции здесь находится простой двумерной минимизацией и приводит в уже известную точку кратности 7 (из разд. 5).

Во втором и третьем случаях надо делить  $f(s)$  на многочлены

$$\begin{aligned}
 g_2(s) &= (s - x)^2(s^2 - 2x + x^2 + y^2)^2 = (s - x)^2(s^2 - 2x + q)^2, \\
 g_3(s) &= (s^2 - 2x + x^2 + y^2)^3 = (s^2 - 2x + q)^3
 \end{aligned}$$

и рассматривать соответствующие частные и остатки подобно тому, как это сделано выше.

### Замечания.

1. Значение  $x = -0,2042665819$  как нижнюю границу устойчивости во всех этих случаях можно найти и из необходимого условия устойчивости многочлена  $F_x(z)$  в разд. 5. Его коэффициенты при степенях с 6-й по 10-ю зависят только от  $x < 0$ . Требуя их положительности и решая систему полиномиальных неравенств  $F_k(z) > 0$ ,  $k = 6, \dots, 11$ , получим  $x > -0,2042665819$ . Вопрос о достижимости этой границы решён в разд. 5.

2. Аналогичное рассмотрение при знаменателе регулятора  $(s + 7)^5$  вместо  $(s + 10)^5$  приводит к глобальному минимуму функции  $H(x)$ , равному  $-0,001686$ .

Параметры числителя при этом принимают следующие значения:  $c_0 \approx 2,63 \cdot 10^{-16}$ ;  $c_1 \approx -6722,8$ ;  $c_2 \approx -71301,7$ ;  $c_3 \approx -34316,9$ ;  $c_4 \approx 63464,8$ ;  $c_5 \approx 44836,2$ . Порядок  $c_0$  позволяет утверждать, что устойчивость в данном случае реализуется только теоретически.

Отсюда ясно, что задание большей степени устойчивости  $x_0$  для знаменателя регулятора  $3(s + x_0)^5$  (см. разд. 4) и нахождение оптимальных значений параметров его числителя предоставляют возможность увеличить запас устойчивости системы в целом. При этом разница в значениях коэффициентов объекта и регулятора велика — 5–6 порядков.

**8. Правильный регулятор типа  $n_4(s)/d_4(s)$ .** Рассмотрим для объекта с потерями (см. разд. 4) правильный регулятор с минимальным понижением порядка, пусть его числитель и знаменатель будут соответственно

$$n_4(s) = a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0, \quad d_4(s) = 0,5s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0.$$

Вместе с указанными выше числителем и знаменателем объекта эти выражения задают характеристический многочлен

$$\begin{aligned} f(s) \approx & s^{10} + (0,35 + 2b_3)s^9 - (5,965 - 2b_2 - 0,7b_3)s^8 - (1,299 - 2b_1 - 0,7b_2 + 11,93b_3)s^7 + \\ & + (5,935 + 2b_0 + 0,7b_1 - 11,93b_2 - 2,598b_3)s^6 + (0,6 + 0,7b_0 - 11,93b_1 - 2,598b_2 + 11,87b_3)s^5 + \\ & + (a_4 - 11,93b_0 - 2,598b_1 + 11,87b_2 + 1,2b_3)s^4 + (a_3 - 2,598b_0 + 11,87b_1 + 1,2b_2)s^3 + \\ & + (a_2 + 11,87b_0 + 1,2b_1)s^2 + (a_1 + 1,2b_0)s + a_0. \end{aligned}$$

Девять варьируемых параметров позволяют достигать выполнения девяти равенств среди самых правых корней [11], именно они определяют нульмерные многообразия в пространстве параметров и, вероятно, экстремальные расположения полюсов. Число возможностей при этом труднообозримо. Как и в разд. 5, в первую очередь попытаемся найти десятикратные корни характеристического многочлена. Тогда  $f(s) = (s - x)^{10}$  и из приравнивания коэффициентов этих многочленов получится линейная алгебраическая система из десяти уравнений относительно девяти параметров регулятора  $a_0, \dots, 4, b_0, \dots, 3$ . Выражая их, получим  $a_0 = x^{10}$ ,  $a_1 = -18,566 - 17,516x - 164,363x^2 - 25,20x^3$  и т. д. вплоть до  $b_2 = 3,044 + 1,75x + 22,50x^2$  и  $b_3 = -0,175 - 5x$ .

Кроме того, возникает соотношение для самого десятикратного корня  $x$ :

$$603,50667 + 990,21200x + 4203,90000x^2 + 23376x^3 + 2352x^4 + 8064x^5 = 0.$$

Единственный вещественный корень этого уравнения отрицателен:  $x \approx -0,06202$ .

Соответствующие параметры регулятора следующие:

$$a_0 \approx 8,4200 \cdot 10^{-13}; \quad a_1 \approx -18,108; \quad a_2 \approx -179,614; \quad a_3 \approx 30,687; \quad a_4 \approx 145,0634;$$

$$b_0 \approx 15,090; \quad b_1 \approx 0,4121; \quad b_2 \approx 3,0218; \quad b_3 \approx 0,1351.$$

Как и в случае, указанном в замечании 2 (см. разд. 7), это чисто теоретическая устойчивость, неудовлетворительная с точки зрения робастности.

Выясним, возможно ли увеличить запас устойчивости, допуская колебательные решения и комплексные корни. Пусть  $z = x \pm Iy$  — пятикратная комплексная пара характеристических корней,  $q = |z|^2 = x^2 + y^2$ . Таким образом, должно выполняться равенство  $f(s) = (s^2 - 2xs + q)^5$ . Приравнявая коэффициенты обоих многочленов при степенях переменной  $s$ , получим систему из десяти уравнений для одиннадцати переменных — девяти параметров регулятора (относительно которых система линейна) и координат  $x, q$ . Исключая параметры  $a_0, \dots, 4, b_0, \dots, 3$ , имеем, например:  $a_0 = q^5$ ,  $a_1 = -18,566 - 17,516x - 18,2625q - 146,1x^2 - 8,4qx - 16,8x^3 - 6q^2 - 72qx^2 - 48x^4 - 10q^4x$  и т. д. вплоть до  $b_2 = 3,044 + 1,75x + 2,50q + 20x^2$ ,  $b_3 = -0,175 - 5x$ .

При этом возникает соотношение

$$g_x(q) = (112 + 1920x)q^2 + (467,1 + 7792x + 1344x^2 + 5120x^3)q + \\ + 603,50667 + 9902,102x + 3736,8x^2 + 15584x^3 + 896x^4 + 1024x^5 = 0,$$

представляющее собой квадратное уравнение относительно  $q$ . Его дискриминант

$$d = -52188,57816 - 1791786,5216x - 15751400,96x^2 - 9952256x^3 - \\ - 38490112x^4 - 6422528x^5 + 18350080x^6.$$

Этот многочлен имеет четыре вещественных корня:

$$x \approx -1,62324; -0,06345; -0,05490; 1,52284.$$

Ось вещественной переменной  $q$  разбивается на пять интервалов, в каждом из которых знак дискриминанта  $d$  один и тот же. Неравенства  $x < 0$  и  $d > 0$  выполняются при  $x < -1,62324$  и при  $-0,06345 < x < -0,05490$ .

У старшего коэффициента  $a(x) = 112 + 1920x$  полинома  $g_x(q) = a(x)q^2 + b(x)q + c(x)$  один корень  $x_0 \approx -0,05833$ , и он находится правее десятикратного корня, указанного выше. Поэтому достаточно рассматривать только луч  $x < x_0$ , что равносильно неравенству  $a < 0$ . Таким образом,  $d > 0$  при  $x < -1,62324$  и при  $-0,06345 < x < -0,05833$ .

Решая уравнение  $g_x(q) = a(x)q^2 + b(x)q + c(x) = 0$ , получим два корня:  $q_1 = (-b - \sqrt{d})/(2a)$  и  $q_2 = (-b + \sqrt{d})/(2a)$ , поскольку  $a < 0$ , второй из них меньше первого. По определению  $q = x^2 + y^2 > x^2$ . Установим, когда  $q_1 = (-b - \sqrt{d})/(2a) > x^2$ . В силу  $a < 0$  это даёт  $\sqrt{d} > -2ax^2 - b$ , откуда либо  $-2ax^2 - b < 0$ , либо  $-2ax^2 - b > 0$  и  $d > (2ax^2 + b)^2$ .

Первый случай представляет собой полиномиальное неравенство

$$-2ax^2 - b = -467,1 - 7792x - 1568x^2 - 8960x^3 < 0.$$

Вещественный корень левой части один:  $x \approx -0,06043$ , а неравенство равносильно тому, что  $x > -0,06043$ ; улучшения запаса устойчивости по сравнению с десятикратным корнем  $x \approx -0,06202$  здесь не достигается.

Во втором случае  $x < -0,06043$ , что вместе с неравенствами, полученными выше, приводит к двум интервалам:  $x < -1,62324$  и  $-0,06345 < x < -0,06043$ .

Неравенство  $d = b^2 - 4ac > (2ax^2 + b)^2$  равносильно тому, что

$$-4ac > (2ax^2)^2 + 2(2ax^2)b, \quad \text{или} \quad a^2x^4 + abx^2 + ac < 0.$$

Последнее при  $a < 0$  равносильно неравенству  $ax^4 + bx^2 + c > 0$ , т. е.

$$ax^4 + bx^2 + c = 603,50667 + 9902,102x + 4203,9x^2 + 23376x^3 + 2352x^4 + 8064x^5 > 0.$$

Единственный вещественный корень этого полинома совпадает с десятикратным корнем, а неравенство  $ax^4 + bx^2 + c > 0$  равносильно тому, что  $x > -0,06202$ .

Таким образом, максимальный запас устойчивости достигается при вырождении пятикратной комплексной пары в десятикратный действительный корень.

К такому же результату приводит рассмотрение случаев, когда на одной вертикали оказывается простая комплексная пара и восьмикратный действительный корень, и других.

**Заключение.** В представленном исследовании на нескольких примерах показано применение алгебраического метода поиска критических значений параметров регулятора пониженного порядка, не требующего трудоёмких и ненадёжных вычислительных процедур. Если в работах [11, 12] этот метод позволял стабилизировать систему и найти значения параметров, обеспечивающие оптимальные запасы устойчивости, то здесь продемонстрировано обратное: невозможность достижения робастной устойчивости системы с помощью управления неполного порядка.

В общем случае двойного перевёрнутого математического маятника на тележке установлено, что при отсутствии потерь его стабилизация за счёт движений тележки с применением правильного регулятора неполного порядка невозможна.

На конкретном примере маятника на тележке с потерями продемонстрирован способ алгебраического отыскания нульмерных и одномерных многообразий в пространстве параметров, задающихся тем или иным корневым портретом, т. е. типом взаимного расположения характеристических корней. В частности, нахождение корней максимальной кратности позволило указать оптимальные по запасу гурвицевой устойчивости параметры регулятора. Из-за большого разрыва в порядках последних найти их численными методами не представляется возможным.

Рассмотренные для этого примера способы стабилизации двойного перевёрнутого математического маятника за счёт приложенного к тележке управления пониженного порядка не дали удовлетворительных результатов. Запас устойчивости можно увеличивать путём бóльших потерь сопротивления или трения в объекте, но не выбора параметров регулятора. Фактически установлено, что стабилизация такого маятника регулятором пониженного порядка возможна только теоретически: без учёта требований робастности.

Иными словами, решений проблемы робастной стабилизации двойного перевёрнутого маятника с помощью приложенного к тележке управления пониженного порядка не существует. То, что в разд. 8 разобраны только два случая и упомянуты другие возможности (которых всего 144), не означает заведомой неполноты рассмотрения: разд. 4–8 указывают, что для систем такого типа именно корень наибольшей кратности доставляет максимальный запас устойчивости.

Метод алгебраического поиска оптимального регулятора неполного порядка, продемонстрированный здесь, а ранее в работах [11, 12], эффективен для широкого круга линейных систем автоматизированного управления без явных ограничений на порядок.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Золотухин Ю. Н., Нестеров А. А.** Управление перевёрнутым маятником с учётом диссипации энергии // Автометрия. 2010. **46**, № 5. С. 3–10.
2. **Kim J. Y., Park I. W., Oh J.-H.** Walking control algorithm of biped humanoid robot on uneven and inclined floor // Journ. Intelligent and Robotic Systems. 2007. **48**, N 4. P. 457–484.
3. **Liu C., Atkeson C. G.** Standing balance control using a trajectory library // Proc. of the IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS). 10–15 Oct., 2009. St. Louis, USA. P. 3031–3036.
4. **Whitman E. C., Atkeson C. G.** Control of a walking biped using a combination of simple policies // Proc. of the 9th IEEE RAS Intern. Conf. on Humanoid Robots. 7–10 Dec., 2009. Pittsburgh, USA. P. 520–527.
5. **Саблина Г. В., Дроздова О. Н.** Исследование и синтез системы «двойной перевёрнутый маятник на тележке» // Матер. VIII Междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП)». Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. Т. 7. С. 249–252.

6. **Chekhonadskikh A. V., Voevoda A. A.** Control system stabilization via root simplex graph illustrated by example of double inverted pendulum // Proc. of the 2nd Russian-Indian Joint Workshop on Computational Intelligence and Modern Heuristics in Automation and Robotics. 10–13 Sept., 2011. Novosibirsk: NSTU, 2011. P. 31–37.
7. **Воевода А. А., Чехонадских А. В.** Оптимизация расположения полюсов системы автоматического управления с регулятором пониженного порядка // Автометрия. 2009. **45**, № 5. С. 113–123.
8. **Chekhonadskikh A. V.** Critic root zones and simplex digraph reduction of real polynomials // Algebra and Model Theory. Novosibirsk: NSTU, 2009. Is. 7. P. 26–43.
9. **Burke J. V., Henrion D., Lewis A. S., Overton M. L.** Stabilization via nonsmooth, non-convex optimization // IEEE Trans. Automatic Control. 2006. **51**, N 11. P. 1760–1769.
10. **Шубладзе А. М.** Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. I и II // АиТ. 1997. № 3. С. 93–105; № 8. С. 67–79.
11. **Koryukin A. N., Chekhonadskikh A. V.** Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system // Algebra and Model Theory. Novosibirsk: NSTU, 2011. Is. 8. P. 19–39.
12. **Корюкин А. Н., Чехонадских А. В.** Предел устойчивости трёхмассовой системы с регулятором 3-го порядка. Ч. 1–2 // Сб. науч. тр. НГТУ. 2011. № 4(66). С. 3–22; 2012. № 5(67). С. 3–22.

*Поступила в редакцию 22 июня 2012 г.*

---