

УДК 519.642

## СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ТОМОГРАФИИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ УСЛОВИЕ КАВАЛЬЕРИ, В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕННЫМ УГЛОМ ОБЗОРА ОБЪЕКТА

Н. В. Важенцева, А. В. Лихачев

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,  
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1  
E-mail: ipt1@iae.nsk.su*

Исследуется метод решения задачи двумерной томографии с ограниченным углом обзора объекта, основанный на условии Кавальери для преобразования Радона. Два алгоритма, реализующие этот подход, сравниваются между собой, а также с алгоритмом, вычисляющим недостающие проекции по приближенным томограммам. Вычислительный эксперимент показал, что в рассматриваемом случае все три алгоритма позволяют повысить точность реконструкции. Однако каждый из них имеет характерные особенности, которые следует учитывать при решении практических задач.

*Ключевые слова:* двумерная томография с ограниченным углом сканирования, условие Кавальери.

**Введение.** При использовании методов томографии для диагностики объектов различной физической природы обычно предполагается, что измерение отдельного детектора связано с искомым распределением параметра внутри объекта посредством интеграла вдоль прямой линии [1, 2]. Таким образом, задача томографической реконструкции сводится к вычислению функции двух или трёх переменных по интегралам от неё вдоль прямых. В данной работе рассматривается двумерная задача. В двумерном случае функция может быть восстановлена точно, если известны интегралы для всех прямых, пересекающих её носитель [1]. На практике, разумеется, количество измерений всегда ограничено, поэтому возможно получить только оценку искомой функции. Её точность существенно зависит от того, каким образом измерения распределены по направлениям.

В томографах первого поколения реализовывалась схема измерений, в которой данные регистрировались в виде параллельных проекций [1]. Каждая такая проекция характеризуется углом  $\varphi$ , задающим поворот регистрирующей системы по отношению к объекту. Величина проекции определяется значениями искомой функции, лежащими на параллельных прямых (рис. 1). Впоследствии в томографах стала чаще использоваться веерная геометрия [1]. Однако при этом параллельная схема не утратила своего значения. В частности, регистрация вдоль параллельных лучей происходит при интерферометрических измерениях, актуальных в исследованиях плазмы и потоков [2]. Кроме того, параллельные проекции могут быть получены из веерных путём процедуры пересортировки [1].

Преобразование, ставящее в соответствие функции двух переменных набор её интегралов вдоль прямых, называется двумерным преобразованием Радона. Оно определяется следующим образом:

$$f(\varphi, t) \equiv (\mathbf{R}g)(\varphi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\sqrt{t^2 + p^2}, \varphi + \arctan(p/t)\right) dp, \quad (1)$$

где  $t, p \in R^1$ ;  $\varphi \in [0; 2\pi[$ . Формулу (1) поясняет рис. 1. Для двумерного преобразования

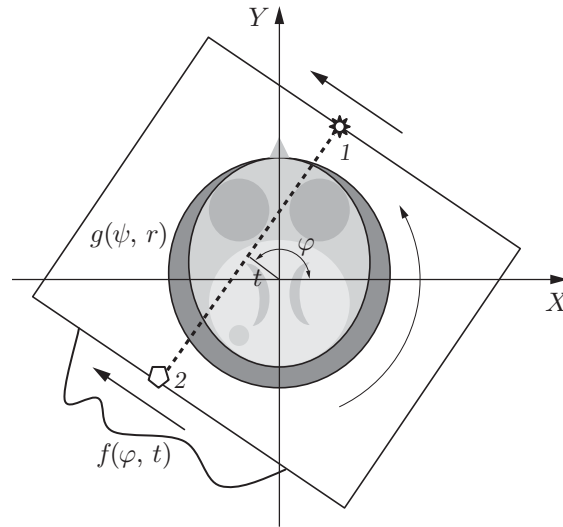


Рис. 1. Параллельная геометрия регистрации проекционных данных (1 — источник излучения, 2 — детектор)

Радона имеет место формула обращения, которая может быть записана как [1]

$$g(\psi, r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r \cos(\varphi - \psi) - t} \frac{\partial}{\partial t} f(\varphi, t) dt \right) d\varphi. \quad (2)$$

Из выражения (2) видно, что оценка искомой функции  $g(\psi, r)$  по конечному набору проекционных данных будет тем лучше, чем точнее аппроксимируются интегралы. В частности, отсюда следует, что проекции должны быть равномерно распределены в интервале  $[0, \pi]$ .

На практике часто встречаются ситуации, когда доступ к исследуемому объекту ограничен, в связи с чем проекционные данные не могут быть зарегистрированы в некотором интервале углов. Возникающую при этом задачу реконструкции функции  $g(\psi, r)$  обычно называют томографией с ограниченным углом сканирования (обзора) объекта. Её исследованию посвящены, например, работы [3–6]. Однако в этой области до сих пор остаётся ряд не решённых до конца вопросов.

Задача представленной работы — исследовать один из подходов к томографии с ограниченным углом сканирования, основанный на свойстве преобразования Радона, известном как условие Кавальери. Сравняются два метода реализации этого подхода. Один из них предложен в [7], другой разработан авторами и описан в [8]. Кроме того, оба метода сравниваются с алгоритмом пополнения проекционных данных [9].

**1. Теория.** 1.1. *Условие Кавальери.* Для преобразования Радона имеет место условие Кавальери (в работе [7] оно названо теоремой совместимости). Обозначим через  $M_k(\varphi)$  момент  $k$ -го порядка от параллельной проекции:

$$M_k(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{n}(\varphi), t) t^k dt, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}(\varphi)$  — вектор нормали к прямой, вдоль которой производится интегрирование в (1). Согласно условию Кавальери все  $M_k(\varphi)$  являются однородными многочленами степени  $k$

от компонент  $\mathbf{n}$  [10, 11]:

$$M_k(\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\varphi) \cdot \sin^{k-l}(\varphi), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Причём коэффициенты  $a_{lk}$  не зависят от угла  $\varphi$ .

Условие Кавальери может быть использовано для разработки методов реконструкции при ограниченном угле сканирования объекта. В частности, оно предоставляет возможность вычислить проекционные данные в тех направлениях, где они отсутствуют. После этого можно проводить реконструкцию стандартными томографическими алгоритмами по полному набору проекций.

1.2. *Алгоритм Принса — Виллски*. В работе [7] предложен метод, основанный на условии Кавальери. Оценка проекционных данных определяется как функция  $\tilde{f}(\varphi, t)$ , которая минимизирует функционал

$$I = \int_0^{\varphi_0} \int_{-1}^1 \frac{1}{2\sigma^2} (f(\varphi, t) - \tilde{f}(\varphi, t))^2 dt d\varphi + \int_0^{\pi} \int_{-1}^1 \left( \beta \left( \frac{\partial \tilde{f}(\varphi, t)}{\partial t} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial \tilde{f}(\varphi, t)}{\partial \varphi} \right)^2 \right) dt d\varphi \quad (5)$$

при условиях

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \tilde{f}(\varphi, t) P_k(t) \sin(m\varphi) dt d\varphi = 0; \quad \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \tilde{f}(\varphi, t) P_k(t) \cos(m\varphi) dt d\varphi = 0. \quad (6)$$

Здесь предполагается, что проекционные данные  $f(\varphi, t)$  известны в угловом диапазоне  $[0, \varphi_0]$ . Носитель искомой функции  $g(\psi, r)$  заключён в единичном круге, поэтому выполняется граничное условие  $\tilde{f}(\varphi, -1) = \tilde{f}(\varphi, 1) = 0$ . Кроме того, в силу свойств симметрии преобразования Радона имеет место  $\tilde{f}(\varphi, t) = \tilde{f}(\varphi + \pi, -t)$ .

В выражении (5) через  $\sigma^2$  обозначена дисперсия шума в измерениях. Условия (6) следуют из условия Кавальери. Через  $P_k(t)$  обозначен полином Лежандра степени  $k$ , при этом  $k = 0, 1, \dots$ , а  $m$  — неотрицательное целое число, большее, чем  $k$ . Значения параметров  $\beta$  и  $\gamma$  задаются исходя из предполагаемых свойств гладкости проекционных данных. Как указывается в [7], при уменьшении числа проекций величину  $\gamma$  следует понижать. Это связано с тем, что шаг по углу между направлениями сканирования становится большим, в результате чего корреляции между различными проекциями падают. Вычисления в [7] производились при  $\beta = 0,01$ , а величина  $\gamma$  варьировалась от 0,0005 до 0,05. Однако достаточных оснований для такого выбора приведено не было.

Для решения задачи (5), (6) был разработан алгоритм с использованием метода неопределённых множителей Лагранжа. Множители Лагранжа вычисляются в итерационной процедуре, выход из которой осуществляется, когда построенная по ним функция  $\tilde{f}(\varphi, t)$  удовлетворяет с заданной степенью точности условиям (6) и граничным условиям. В [7] приведены лишь соображения качественного характера, руководствуясь которыми следует выбирать количество множителей Лагранжа. Кроме того, оказалось, что от этого зависит параметр  $\gamma$ : чем больше множителей Лагранжа, тем выше он должен быть.

В целом метод Принса — Виллски представляется весьма сложным. Он зависит от большого числа параметров. Для того чтобы их задать, требуется нетривиальная априорная информация. Это затрудняет практическое использование метода.

1.3. *Предлагаемый алгоритм*. В работе [8] авторами предложен более простой алгоритм, реализующий пополнение проекционных данных исходя из условия Кавальери.

Пусть в угловом интервале  $[0, \varphi_0]$  измерено  $N$  проекций с равномерным шагом  $\Delta\varphi$  по углу. Обозначим через  $N_1$  целую часть числа  $(\pi - \varphi_0)/\Delta\varphi$ . На первом шаге алгоритма для каждой известной проекции вычисляются моменты от 1-го до  $K$ -го порядка включительно. По условию Кавальери для определения неизвестных коэффициентов однородных полиномов  $a_{lk}$  имеется  $K$  систем линейных уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} M_k(0) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(0) \cdot \sin^{k-l}(0), \\ M_k(\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\Delta\varphi) \cdot \sin^{k-l}(\Delta\varphi), \\ M_k(2\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(2\Delta\varphi) \cdot \sin^{k-l}(2\Delta\varphi), \\ \vdots \\ M_k((N-1)\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l((N-1)\Delta\varphi) \cdot \sin^{k-l}((N-1)\Delta\varphi). \end{array} \right. \quad (7)$$

Каждая из систем (7) содержит  $N$  уравнений и  $k+1$  неизвестных. При этом величина параметра  $k$  меняется от 1 до  $K$ . Выбор метода решения систем (7) зависит от конкретных условий, в частности от соотношения чисел  $N$  и  $k$ . Если  $N > k$ , то для решения целесообразно применять метод наименьших квадратов. Именно он использовался в данной работе при получении результатов вычислительного эксперимента.

На следующем шаге по формуле (4) с помощью коэффициентов  $a_{lk}$  находятся моменты с 1-го по  $K$ -й порядки для  $N_1$  неизвестных проекций:  $M_k(i\Delta\varphi)$ ,  $i = N, N+1, \dots, N+N_1-1$ . (Моменты нулевого порядка для всех проекций одинаковы.)

Учитывая, что проекции имеют ограниченный носитель, аппроксимируем интеграл (3) конечной суммой. Тогда для определения  $J$  значений неизвестной проекции в узлах сетки получим систему из  $K+1$  линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0(\varphi) = h \sum_{j=1}^J f(\varphi, t_j), \\ \vdots \\ M_k(\varphi) = h \sum_{j=1}^J f(\varphi, t_j)(t_j)^k, \\ \vdots \\ M_K(\varphi) = h \sum_{j=1}^J f(\varphi, t_j)(t_j)^K, \end{array} \right. \quad (8)$$

где  $h$  — шаг равномерной сетки, на которой заданы проекции. В представленной работе вычислительный эксперимент проводился при условии  $K \ll J$  (т. е. число неизвестных много больше числа уравнений), в связи с этим система (8) решалась итерационным алгоритмом ART (Algebraic Reconstruction Technique) (см., например, [1]).

1.4. *Оценка количества моментов.* Для алгоритмов, основанных на условии Кавальери, весьма важно, какое количество моментов следует использовать. От этого зависят как точность, так и время реконструкции. Для алгоритма Принса — Виллски количество множителей Лагранжа равняется количеству условий (6), которые должны выполняться. Отметим, что порядку момента в (6) соответствует число  $k$ . При каждом фиксированном  $k$  число  $m$  может принимать любое целое значение, большее  $k$ . Ограничим значения  $m$  условием  $m \leq K + 1$ , где  $K$  — максимальный порядок используемых моментов. Тогда количество условий (6) будет  $K(K + 1)/2$ . Столько же неизвестных в совокупности содержат все системы (7). Такая связь между максимальным порядком моментов в алгоритме (7), (8) и числом множителей Лагранжа в алгоритме Принса — Виллски полагалась в вычислительном эксперименте данной работы.

Оптимальное количество моментов зависит от многих факторов, наиболее существенный, как оказалось из результатов вычислительного эксперимента, — уровень шума в проекционных данных. Предположим, что шум является аддитивным, т. е.  $f(\varphi, t) = f_0(\varphi, t) + \zeta(\varphi, t)$ , где  $f_0(\varphi, t)$  — преобразование Радона искомой функции,  $\zeta(\varphi, t)$  — центрированная случайная функция. Для определения числа  $K$  предлагается следующее правило. Обозначим через  $K(\varphi)$  наибольшее число, для которого выполняется неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi, t) t^{K(\varphi)} dt \right| \geq \sqrt{D\{M_{K(\varphi)}(\varphi)\}}. \quad (9)$$

В левой части (9) стоит модуль момента порядка  $K(\varphi)$  от проекции, зарегистрированной под углом  $\varphi$ , в правой — корень из дисперсии момента этого же порядка. За величину  $K$  примем минимальное из чисел  $K(\varphi)$ , соответствующих углам регистрации проекций.

Рассмотрим частный случай. Предположим, что дисперсия всех проекций постоянная и одинаковая, обозначим её через  $\sigma^2$ . Также будем считать, что правая часть выражения (9) не зависит от угла  $\varphi$ . Возьмём случайную функцию

$$\mu(\varphi, t) = \int_{-1}^t \zeta(\varphi, t') t'^K dt',$$

которая, как и  $\zeta(\varphi, t)$ , является центрированной, поэтому её ковариационная функция равна корреляционной. В соответствии с правилом преобразования корреляционных функций

$$R_\mu(t_1, t_2) = \int_{-1}^{t_1} \int_{-1}^{t_2} t_1'^K t_2'^K R_\zeta(t_1', t_2') dt_1' dt_2'. \quad (10)$$

В (10) параметр  $\varphi$  опущен, поскольку по предположению статистические свойства проекций не зависят от угла регистрации.

Если реконструируемая функция имеет финитный носитель, то, не уменьшая общности, можно полагать, что он содержится в единичном круге, а носитель любой из проекций принадлежит интервалу  $[-1; 1]$ . Поэтому согласно построению имеем  $D\{M_K\} = R_\mu(1, 1)$ . Пусть при каждом фиксированном угле  $\varphi$  случайная функция  $\zeta(\varphi, t)$  имеет по переменной  $t$  малый эффективный радиус корреляции  $\varepsilon$ . Используя (10) и учитывая, что  $\sigma^2 = R_\zeta(t, t)$ ,

получаем для этого случая

$$D\{M_K\} \approx \sigma^2 \int_{-1}^1 t_1^K \left( \int_{t_1 - \varepsilon/2}^{t_1 + \varepsilon/2} t_2^K dt_2 \right) dt_1 \approx \sigma^2 \int_{-1}^1 \frac{t_1^K}{K+1} 2\frac{\varepsilon}{2}(K+1)t_1^K dt_1 = \frac{2\varepsilon\sigma^2}{(2K+1)}. \quad (11)$$

Описанный выше метод определения числа моментов неприменим, когда шумы в проекционных данных отсутствуют. В этом случае число  $K$  оценивалось путём вычислительного эксперимента. Строились зависимости ошибки реконструкции от числа моментов. Искомым порядком момента считалось то число  $K$ , для которого впервые выполнялось неравенство  $\Delta(K) - \Delta(K+1) < \delta$ , где  $\delta$  — заданная положительная величина.

1.5. *Алгоритм пополнения проекционных данных.* Помимо условия Кавальери существуют другие подходы для оценки недостающих проекций. В [9] разработан следующий алгоритм. По имеющимся данным одним из томографических алгоритмов реконструируется начальное приближение искомой функции, в которое вносится априорная информация об исследуемом объекте. От полученной функции насчитываются проекции в тех направлениях, где они отсутствуют. Далее производится реконструкция по составному набору: известным и вычисленным проекциям. После чего описанные действия повторяются. В результате получается итерационный процесс

$$g^{(n+1)} = \mathbf{A}(\mathbf{R}^{-1}(f + \mathbf{P}]_{\varphi_0, \pi}[g^{(n)})), \quad g^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}f, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Здесь  $\mathbf{R}^{-1}$  — оператор, соответствующий алгоритму двумерной реконструкции. Для проведённого вычислительного эксперимента  $\mathbf{R}^{-1}$  представлял собой один из наиболее часто употребляемых в томографии алгоритмов, реализующих формулу обращения (2), который был предложен в [12]. Через  $\mathbf{A}$  обозначен оператор, вносящий априорную информацию;  $\mathbf{P}]_{\varphi_0, \pi}[$  — оператор, вычисляющий проекции от функции  $g^{(n)}$  в интервале углов  $]_{\varphi_0, \pi}[$ ;  $f$  — имеющиеся данные.

**2. Обсуждение результатов вычислительного эксперимента.** Для вычислительного эксперимента использовался математический фантом, изображённый на рис. 2. Он моделирует свойства объектов, характерных для задач дефектоскопии: функция  $g(x, y)$  имеет разрывы и содержит мелкомасштабные высококонтрастные структуры. Расчёты производились на квадратной сетке размером  $1025 \times 1025$  узлов. Одномерные проекции вычислялись в 1025 узлах. Их распределение по углу в интервале от 0 до  $\varphi_0$  было равномерным. К значению проекции в каждой точке прибавлялась случайная величина, имеющая нормальное распределение с равным нулю средним и дисперсией  $\sigma^2 = \xi \bar{f}^2$ , где  $\xi$  — положительное число,  $\bar{f}$  — среднее значение проекционных данных в отсутствие шума.

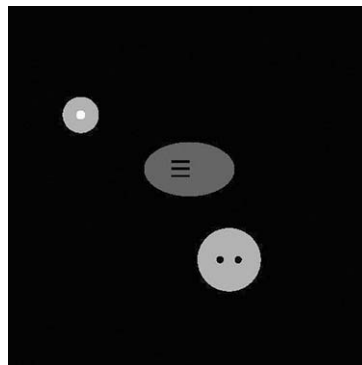


Рис. 2. Математический фантом

В расчётах варьировались величина угла  $\varphi_0$ , число проекций  $N$ , значение параметра  $\xi$ , определяющего уровень шума. Кроме того, изменялись параметры, управляющие работой алгоритмов. Для контроля точности использовались нормированные среднеквадратичные ошибки восстановления отсутствующих проекций и реконструкции искомой функции:

$$\Delta_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^J (f(\varphi_i, t_j) - \tilde{f}(\varphi_i, t_j))^2}{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^J (f(\varphi_i, t_j))^2}}; \quad (13)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I (g(x_i, y_j) - \tilde{g}(x_i, y_j))^2}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I (g(x_i, y_j))^2}}.$$

В (13) через  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  обозначены оценки неизвестных проекционных данных и искомой функции, а  $f$  и  $g$  — их истинные значения;  $N_1$  — число генерируемых проекций;  $\varphi_i = \varphi_0 + i\Delta\varphi$ .

Вычислительный эксперимент показал, что все три метода, описанные в разд. 1, позволяют повысить качество реконструкции по сравнению со стандартными томографическими алгоритмами в условиях ограниченного угла обзора объекта. Однако каждый из них имеет характерные особенности, которые следует учитывать при решении практических задач.

На рис. 3 представлены зависимости ошибки реконструкции  $\Delta$  (рис. 3, а) и ошибки восстановления проекций  $\Delta_p$  (рис. 3, б) от величины угла  $\varphi_0$  для различных алгоритмов. Число известных проекций  $N$  составляет 300. Величина параметра  $\xi$ , характеризующего уровень шума, равна 0,03. Здесь и далее результаты приводятся для итераций, на которых ошибка  $\Delta_p$  достигает минимума. Следует отметить, что во всех проведённых расчётах зависимости ошибки восстановления отсутствующих проекций от номера итерации для всех исследуемых алгоритмов имели минимум.

На рис. 3, а, б кривые 1 соответствуют алгоритму Принса — Виллски, минимизирующему функционал (5) при условиях (6) согласно работе [7]; 2 — алгоритму из [8], основанному на решении систем (7), (8); 3 — алгоритму пополнения проекций (12). Кривая 4 на рис. 3, а приведена для сравнения, она показывает результаты, полученные алгоритмом Шеппа — Логана при непосредственном применении к имеющимся данным без предварительного восстановления отсутствующих проекций. Из рис. 3 видно, что для всех

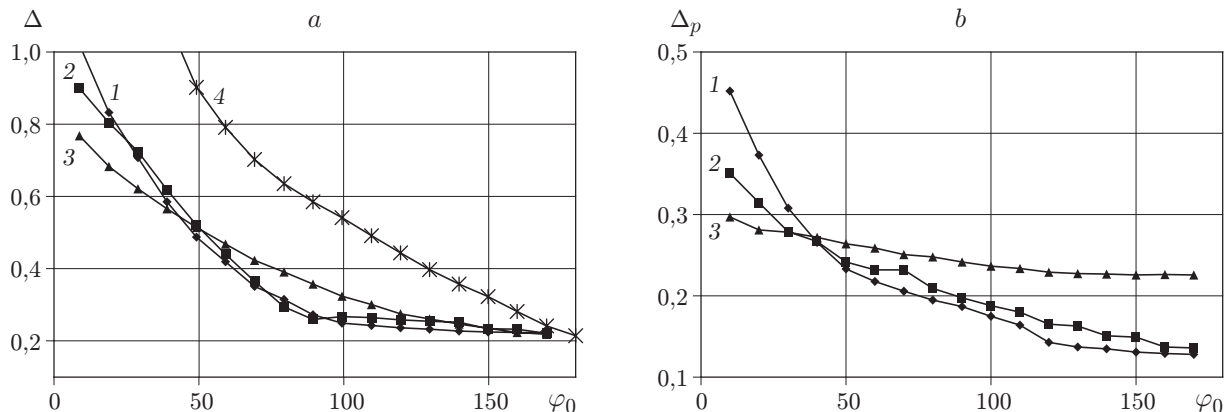


Рис. 3. Зависимости ошибок от угла  $\varphi_0$ : при реконструкции фантома (а) и проекций (б)

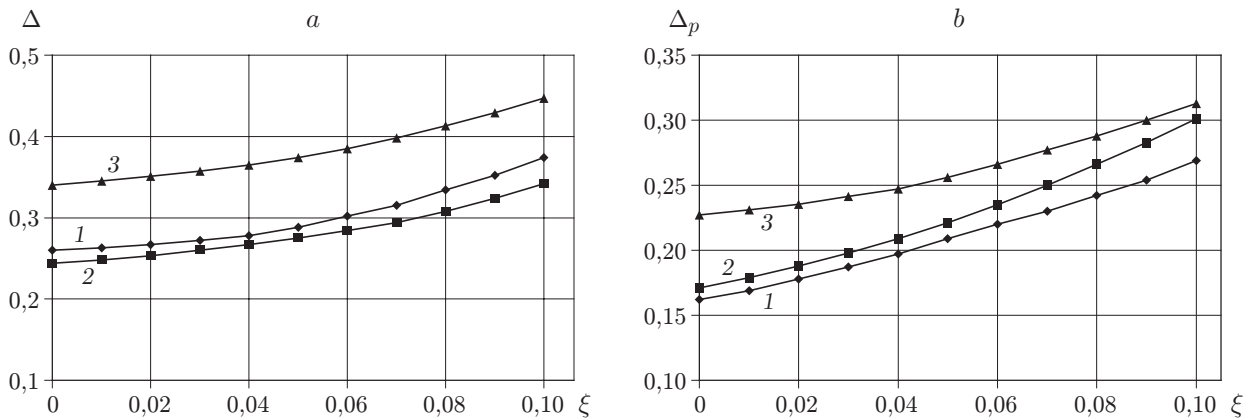


Рис. 4. Зависимости ошибок от уровня шума: при реконструкции фантома (а) и проекций (б)

алгоритмов точность восстановления как проекционных данных, так и искомой функции падает с уменьшением угла  $\varphi_0$ . В случае, когда угол  $\varphi_0$  составляет менее  $30^\circ$ , алгоритм (12) даёт несколько лучший результат. По-видимому, это связано с ухудшением устойчивости решения обратных задач (5)–(7).

Исследование зависимостей величин ошибок  $\Delta$ ,  $\Delta_p$  от числа проекций  $N$  при заданном угле  $\varphi_0$  в целом показало, что значения  $\Delta$ ,  $\Delta_p$  уменьшаются с ростом  $N$ . Однако, когда количество проекций превосходит 500, дальнейшее увеличение их числа приводит лишь к незначительному повышению точности. В [9] получено, что при  $N < 25$  итерационный процесс (12) расходится после первой же итерации независимо от величины угла  $\varphi_0$ . В исследованиях, проведённых в данной работе, этот результат подтвердился. Кроме того, установлено, что при  $N < 50$  наименьшая ошибка реконструкции алгоритмом Принса — Виллски достигается в случае, когда параметр  $\gamma$  в (5) равен 0. Объяснение этому дано в разд. 1.2.

В процессе численного моделирования получено, что при правильном выборе стабилизирующих параметров все три алгоритма достаточно устойчивы по отношению к случайному шуму в широких пределах изменения его дисперсии  $\sigma^2$ . При этом с ростом  $\sigma^2$  минимумы зависимостей ошибок от номеров итераций сдвигаются к началу кривых. В работе [7] отмечено, что стабильность алгоритма (5), (6) повышается путём увеличения параметров  $\beta$  и  $\gamma$  в выражении функционала (5). Регуляризация алгоритма (7), (8) про-

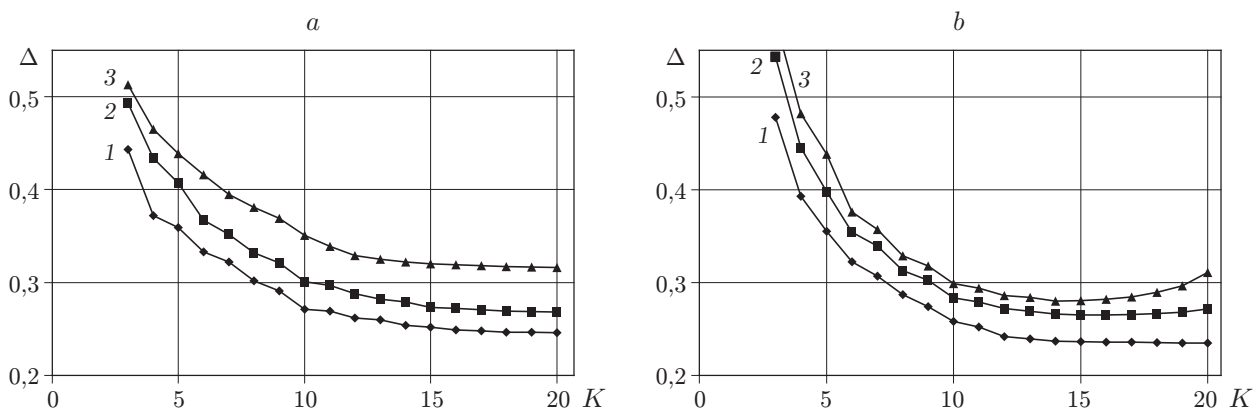


Рис. 5. Зависимости ошибки реконструкции  $\Delta$  от максимального порядка используемых моментов  $K$ : а — алгоритм Принса — Виллски, б — алгоритм (7), (8)



водилась посредством сглаживания одномерных проекций кубическими сплайнами. Для стабилизации алгоритма (12) в оператор априорной информации  $\mathbf{A}$  включаются процедуры сглаживания. Их описание содержится в [9]. Зависимости ошибок  $\Delta$  и  $\Delta_p$  от параметра  $\xi$ , характеризующего уровень шума, даны на рис. 4, *a, b*. Нумерация кривых имеет тот же смысл, что и на рис. 3.

На рис. 5 даны зависимости ошибки реконструкции различными алгоритмами от максимального порядка используемых моментов  $K$ . Кривые 1–3 соответствуют разному уровню шума:  $\xi = 0,025, 0,05$  и  $0,075$ . Из сравнения рис. 5, *a* и *b* видно, что, когда число используемых моментов составляет 7–14, алгоритм (7), (8) обеспечивает более низкую ошибку реконструкции. Одна из возможных причин этого состоит в том, что результаты, приведённые на рис. 5, *a*, получены при постоянном  $\gamma$ , равном 0,005, в то время как в работе [7] указывалось, что при увеличении количества множителей Лагранжа целесообразно увеличивать значение параметра  $\gamma$ . Порядки моментов, вычисленные согласно критерию (9) с оценкой дисперсии (11), оказались равными 15, 15, 14 для  $\xi = 0,025, 0,05, 0,075$  соответственно. При этом в левую часть (9) подставлялось среднее значение момента для известных проекций, величина  $\varepsilon$  в оценке (11) бралась равной шагу сетки на проекции.

Как видно из рис. 5, для получения нормированной среднеквадратичной ошибки порядка 0,35 при принятой нами связи между высшим порядком используемых моментов и количеством множителей Лагранжа (см. разд. 1.4) надо учитывать 7–8 первых моментов для алгоритма Принса — Виллски и 6–7 моментов для предлагаемого в данной работе алгоритма. Время счёта для обоих алгоритмов растёт приблизительно линейно с увеличением числа моментов. Но время, приходящееся на один момент, для алгоритма (5), (6)

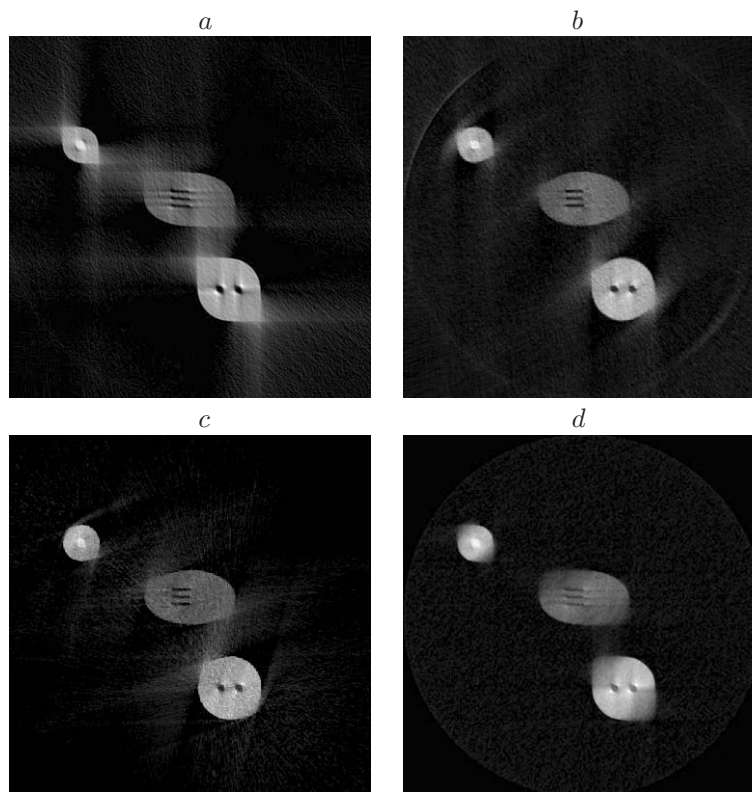


Рис. 6. Реконструированные томограммы: *a* — алгоритм Шеппа — Логана,  $\Delta = 0,614$ ; *b* — алгоритм Принса — Виллски,  $\Delta = 0,301$ ; *c* — алгоритм (7), (8),  $\Delta = 0,283$ ; *d* — алгоритм (12),  $\Delta = 0,371$

выше в силу его сложности. Так, для угла  $\varphi_0 = 90^\circ$ , которому соответствуют результаты, приведённые на рис. 5, оно примерно в 1,8 раза больше. С уменьшением диапазона углов, в котором известны проекционные данные, соотношение времён счёта, приходящегося на один момент, для алгоритмов (5), (6) и (7), (8) повышается (при  $\varphi_0 = 60^\circ$  оно составляет 2,1, а при  $\varphi_0 = 30^\circ$  — порядка 3). Резкое увеличение времени счёта алгоритмом Принса — Виллски при малом угле обзора объекта также отмечалось в работе [7]. Это связано с тем, что замедляется сходимость итерационного процесса по нахождению множителей Лагранжа.

Отсюда следует, что для достижения одинаковой точности реконструкции алгоритм Принса — Виллски должен затратить существенно больше времени счёта, чем алгоритм, предлагаемый авторами. Быстродействие алгоритма (12) зависит от числа итераций, необходимого для удовлетворительного восстановления проекций, и способа реализации оператора  $\mathbf{R}^{-1}$ . В проведённых расчётах он оказался в 1,7–2,5 раза медленнее, чем другие алгоритмы.

На рис. 6 представлены томограммы, полученные различными алгоритмами. Реконструкция проводилась по трёмстам проекциям, величина угла  $\varphi_0 = 90^\circ$ , уровень шума соответствовал  $\xi = 0,05$ . Проекция сглаживались кубическими сплайнами.

**Заключение.** Проведённые в данной работе исследования показали, что на основе условия Кавальери для преобразования Радона могут быть построены алгоритмы, позволяющие улучшить качество реконструкции по проекционным данным, заключённым в ограниченном диапазоне углов. Путём численного моделирования установлено, что разработанные авторами алгоритмы (7), (8) и (12) обеспечивают практически такую же точность реконструкции, как и алгоритм Принса — Виллски, предложенный в [7]. В то же время они зависят от меньшего числа параметров, для задания которых требуется дополнительная априорная информация. Кроме того, скорость счёта алгоритма (7), (8) при уменьшении угла обзора объекта не падает столь значительно, как скорость алгоритма Принса — Виллски.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хермен Г. Т.** Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 342 с.
2. **Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.** Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.
3. **Delaney A. H., Bresler Y.** Globally convergent edge-preserving regularized reconstruction: An application to limited-angle tomography // IEEE Trans. Image Process. 1998. **7**, N 2. P. 204–221.
4. **Quinto E. T.** Exterior and limited-angle tomography in non-destructive evaluation // Inverse Problems. 1998. **14**, N 2. P. 339–353.
5. **Hanson K. M., Weeks G. W.** Bayesian approach to limited-angle reconstruction in computed tomography // JOSA. 1983. **73**, N 11. P. 1501–1509.
6. **Rantala M., Vanska S., Jarvenpaa S. et al.** Wavelet-based reconstruction for limited-angle X-ray tomography // IEEE Trans. Med. Image. 2006. **25**, N 2. P. 210–217.
7. **Prince J. L., Willsky A. S.** Constrained sinogram restoration for limited-angle tomography // Opt. Eng. 1990. **29**, N 5. P. 535–544.
8. **Важнецва Н. В., Лихачев А. В.** Новый метод повышения точности томографической реконструкции при ограниченном угле сканирования // Тр. III Евразийского конгресса по медицинской физике и инженерии «Медицинская физика–2010». М.: Изд-во МГУ, 2010. Т. 1. С. 30–32.

- 
9. **Лихачев А. В.** Алгоритм пополнения проекционных данных в задачах томографии с ограниченным диапазоном углов обзора // Автометрия. 2009. **45**, № 1. С. 83–91.
  10. **Хелгасон С.** Преобразование Радона: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 152 с.
  11. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000. 208 с.
  12. **Shepp L. A., Logan B. F.** The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. **21**, N 3. P. 21–43.

*Поступила в редакцию 18 октября 2011 г.*

---