УДК 681.5 : 004.3

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИИ ВЛОЖЕНИЯ*

А. З. Асанов, Д. Н. Демьянов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18
E-mail: askhat.asanov@yandex.ru

Показана возможность точного решения задачи синтеза системы управления (с эталонной моделью) многосвязным динамическим объектом на основе технологии вложения. Представленный алгоритм синтеза обеспечивает устойчивость и физическую реализуемость получаемого решения.

Ключевые слова: многосвязный динамический объект, адаптивное управление, алгоритм синтеза, технология вложения.

Введение. Одним из способов построения систем управления многосвязными объектами является формирование адаптивных систем [1] либо автоматических систем с эталонной моделью, эквивалентных по своим свойствам в определённых условиях функционирования адаптивным системам [2]. В таких системах автоматического управления (САУ) постоянство показателей качества при изменении параметров объекта достигается за счёт организации многотемповых движений, где все изменения переменных параметров переводятся в изменение «быстрых» парциальных движений, которые не проявляются в регулируемой координате. Вместе с тем организация автоматических систем с эталонной моделью, особенно в случае многосвязной системы, является весьма непростой задачей.

Среди алгебраических методов синтеза многосвязных систем автоматического управления (МСАУ) наиболее перспективной представляется технология вложения систем [3, 4], использующая новый для теории управления математический аппарат, погружающий решаемую задачу в некоторую более общую задачу высокой размерности. Применение технологии вложения (в совокупности с методом канонизации матриц при решении матричных уравнений) позволяет найти семейство возможных решений задачи синтеза. При этом возникает дополнительная задача выбора решения из полученного множества путём введения определённых критериев. Данная задача должна решаться, очевидно, совместно с задачами обеспечения внутренней устойчивости и физической реализуемости получаемых решений [5]. Аналитическому решению таких задач для случая многосвязной системы и посвящается предлагаемая работа.

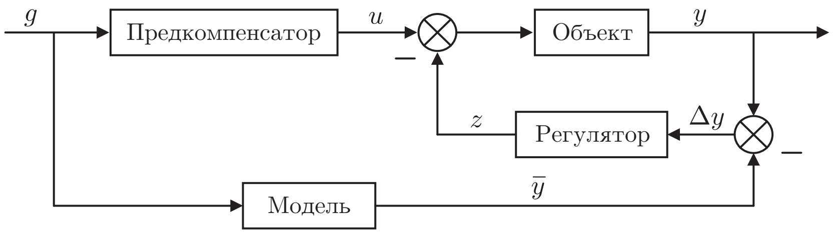
Постановка задачи. Пусть рассматривается динамический объект, описываемый уравнениями в пространстве состояний:

$$\dot{x} = A_{\text{o}}x + B_{\text{o}}u; \quad y = C_{\text{o}}x. \tag{1}$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^s$, $y \in R^m$ — векторы состояния, управления и выхода; A_{o}, B_{o}, C_{o} — числовые матрицы соответствующих размеров.

Для динамического объекта (1) строится многосвязная система управления с эталонной моделью, структурная схема которой показана на рисунке.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-08-00311).



Представленная система управления включает в себя предкомпенсатор с передаточной матрицей $G(p)$, регулятор в цепи обратной связи с передаточной матрицей $K(p)$ и эталонную модель, которая формализует желаемое поведение системы и описывается уравнениями в пространстве состояний:

$$\dot{\bar{x}} = A_{\text{м}}\bar{x} + B_{\text{м}}g; \quad \bar{y} = C_{\text{м}}\bar{x}. \tag{2}$$

Здесь $\bar{x} \in R^n$, $g \in R^s$, $\bar{y} \in R^m$ — векторы состояния, управления и выхода; $A_{\text{м}}, B_{\text{м}}, C_{\text{м}}$ — числовые матрицы соответствующих размеров.

Качество управления определяется по вектору рассогласования Δy и задаётся передаточной матрицей от вектора внешних управляющих воздействий к рассогласованию выходных векторов системы и эталонной модели $E^g_{\Delta y}(p)$.

Предполагается, что объект управления (1) полностью управляем и наблюдаем, количество входных и выходных сигналов одинаково ($m = s < n$), а его передаточная матрица обратима ($\mathrm{rank}B = \mathrm{rank}C = m$). При создании системы управления используются только регулярные законы ($\det G(p) \neq 0$).

Для заданного объекта управления (1) и эталонной модели (2) необходимо найти передаточные матрицы $K(p)$ и $G(p)$, при которых передаточная матрица $E^g_{\Delta y}(p)$ имеет требуемый вид. Построенная система управления должна быть устойчивой и физически реализуемой.

Синтез законов управления. При решении поставленной задачи будем использовать технологию вложения систем [3].

Совокупность уравнений, описывающих рассматриваемую систему управления, может быть представлена в виде следующего соотношения:

$$\Omega \begin{bmatrix} x^T & \bar{x}^T & y^T & \bar{y}^T & z^T & g^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_0^T & \bar{x}_0^T & 0 & 0 & 0 & g^T \end{bmatrix}^T.$$

Здесь через x_0 и $\bar{x}_0$ обозначены векторы начальных условий для объекта управления и эталонной модели, а символом Ω — проматрица рассматриваемой системы, имеющая вид

$$\Omega = \begin{bmatrix} pI - A_{\text{о}} & 0 & 0 & 0 & B_{\text{о}} & -B_{\text{о}}G \\ 0 & pI - A_{\text{м}} & 0 & 0 & 0 & -B_{\text{м}} \\ -C_{\text{о}} & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{\text{м}} & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K & K & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

В результате поэтапного применения технологии вложения систем нахождение искомых матриц регулятора и предкомпенсатора может быть сведено к решению системы линейных матричных уравнений [4]

$$\begin{cases} \pi_x B_{\text{o}} G + \pi_{\bar{x}} B_{\text{м}} = E^g_{\Delta y}, \\ \pi_x (pI - A_{\text{o}}) + \pi_x B_{\text{o}} K C_{\text{o}} = C_{\text{o}}, \\ \pi_{\bar{x}} (pI - A_{\text{м}}) - \pi_x B_{\text{o}} K C_{\text{м}} = -C_{\text{м}} \end{cases} \qquad (3)$$

(символами π_x и $\pi_{\bar{x}}$ обозначены вспомогательные полиномиальные матрицы соответствующих размеров).

Из второго уравнения системы (3) с использованием общего алгоритма решения билинейных матричных уравнений [3] можно получить выражение, определяющее класс эквивалентных передаточных матриц регулятора [4]:

$$\langle K(p) \rangle_{\mu,\,\eta} = \tilde{E}[C_{\text{o}} - \pi_x (pI - A_{\text{o}})]\tilde{C}_{\text{o}} + \mu(p)\bar{C}^L_{\text{o}} + \bar{E}^R \eta(p), \qquad (4)$$

где $E = \pi_x B_{\text{o}}$, а $\mu(p), \eta(p)$ — произвольные матрицы подходящего размера.

Условием существования решения (4) является выполнение соотношений

$$\begin{cases} \bar{E}^L [C_{\text{o}} - \pi_x (pI - A_{\text{o}})] = 0, \\ [C_{\text{o}} - \pi_x (pI - A_{\text{o}})]\bar{C}^R_{\text{o}} = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь и далее по тексту для некоторой матрицы M символом $\tilde{M}^L$ обозначается левый матричный делитель единицы, $\tilde{M}^R$ — правый матричный делитель единицы, $\bar{M}^L$ — левый матричный делитель нуля, $\bar{M}^R$ — правый матричный делитель нуля, $\tilde{M} = \tilde{M}^R \tilde{M}^L$ — сводный канонизатор [3]. При этом справедливо равенство

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}^L \\ \bar{M}^L \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \tilde{M}^R & \bar{M}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из первого и третьего уравнений системы (3) при известной матрице $K(p)$ можно получить выражение, определяющее класс эквивалентных передаточных матриц предкомпенсатора:

$$\langle G(p) \rangle_{\varphi} = \tilde{E}[E^g_{\Delta y} - (\pi_x B_{\text{o}} K C_{\text{м}} - C_{\text{м}})(pI - A_{\text{м}})^{-1} B_{\text{м}}] + \bar{E}^R \varphi \qquad (6)$$

($\varphi(p)$ — произвольная матрица подходящего размера).

Условием существования решения (6) является выполнение соотношения

$$\bar{E}^L [E^g_{\Delta y} - (\pi_x B_{\text{o}} K C_{\text{м}} - C_{\text{м}})(pI - A_{\text{м}})^{-1} B_{\text{м}}] = 0. \qquad (7)$$

Таким образом, общее решение задачи синтеза определяется соотношениями (4) и (6), а условием его существования будет выполнение соотношений (5) и (7).

Трансформация класса решений. Рассмотрим полученные соотношения с учётом сделанных ранее предположений о свойствах исследуемого объекта управления.

Из второго уравнения системы (5) после проведения преобразований с использованием свойств матричных делителей нуля получим

$$\pi_x = \psi C_{\text{о}}(pI - A_{\text{о}})^{-1}, \tag{8}$$

где $\psi(p)$ — произвольная матрица подходящего размера.

При этом выражение, определяющее матрицу $\psi(p)$, будет иметь вид

$$\psi = \pi_x(pI - A_{\text{о}})\tilde{C}_{\text{о}}. \tag{9}$$

Отметим, что из условия полноты ранга матрицы $C_{\text{о}}$ следует единственность матрицы ψ, т. е. между матрицами π_x и ψ существует однозначное соответствие.

Из первого уравнения системы (5), учитывая соотношение (8), свойства матричных делителей нуля и обратимость передаточной матрицы объекта управления, получим

$$\bar{\psi}^L C_{\text{о}} = 0. \tag{10}$$

Так как по условию матрица $C_{\text{о}}$ имеет полный ранг, то у неё отсутствуют левые матричные делители нуля. Следовательно, условие (10) выполняется лишь в том случае, если матрица ψ также не имеет левого делителя нуля, т. е. матрица ψ должна быть квадратной и обратимой.

С учётом соотношения (8) и сделанных выше выводов о свойствах матрицы ψ выражение (4) запишем как

$$K(p) = W_{\text{о}}^{-1}(\psi^{-1} - I). \tag{11}$$

Здесь $W_{\text{о}} = C_{\text{о}}(pI - A_{\text{о}})^{-1}B_{\text{о}}$ — передаточная матрица объекта управления.

В результате преобразований соотношение (6) будет иметь вид

$$G(p) = W_{\text{о}}^{-1}\psi^{-1}E^g_{\Delta y} + W_{\text{о}}^{-1}W_{\text{м}}, \tag{12}$$

где $W_{\text{м}} = C_{\text{м}}(pI - A_{\text{м}})^{-1}B_{\text{м}}$ — передаточная матрица эталонной модели.

Условие (7) при этом выполняется всегда, так как матрица E является произведением двух квадратных обратимых матриц.

Таким образом, искомые передаточные матрицы регулятора и предкомпенсатора задаются соотношениями (11) и (12), а вспомогательная матрица ψ — формулой (9), где π_x — произвольная полиномиальная матрица полного ранга.

Анализ класса решений. Соотношения (11) и (12) определяют решение задачи синтеза в зависимости от матрицы ψ. Проанализируем, в каких случаях (при выполнении каких условий) полученная САУ будет устойчивой и физически реализуемой.

Так как рассматриваемая система является многосвязной, то для оценки её устойчивости исследуем различные комбинации передаточных матриц от внешних входов к внутренним сигналам [5], учитывая соотношения (11) и (12):

$$W_1 = (I + W_{\text{о}}K)^{-1}(W_{\text{о}}G - W_{\text{м}}) = E^g_{\Delta y},$$

$$W_2 = (I + W_{\text{о}}K)^{-1}(G + KW_{\text{м}}) = \psi W_{\text{о}}^{-1}\psi^{-1}(E^g_{\Delta y} + W_{\text{м}}),$$

$$W_3 = (I + W_{\text{о}}K)^{-1}W_{\text{о}} = \psi W_{\text{о}},$$

$$W_4 = (I + W_{\text{o}}K)^{-1} = \psi,$$

$$W_5 = (I + KW_{\text{o}})^{-1}K = W_{\text{o}}^{-1}(I - \psi),$$

$$W_6 = (I + KW_{\text{o}})^{-1} = W_{\text{o}}^{-1}\psi W_{\text{o}}.$$

Для устойчивости многосвязной системы требуется, чтобы все полиномиальные матрицы W_i, $i = \overline{1,\, 6}$, не имели полюсов с положительной действительной частью.

Таким образом, устойчивость синтезированной системы управления с точно известными значениями коэффициентов будет обеспечиваться при выполнении следующих ограничений:

1) полюсы передаточных матриц W_{o}, $W_{\text{м}}$, $E^g_{\Delta y}$, ψ не должны иметь положительной действительной части;

2) передаточные нули матриц W_{o}, ψ не должны иметь положительной действительной части.

Условием физической реализуемости системы управления является то, что степень полинома числителя каждого из элементов передаточной матрицы регулятора и предкомпенсатора не должна превосходить степени полинома соответствующего знаменателя. Для формирования строгих условий физической реализуемости воспользуемся методом порядковых отображений [6].

Порядковым отображением отношения двух полиномов будем называть разность степеней полиномов знаменателя и числителя, т. е.

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad \Lambda(W) = \lambda(a) - \lambda(b).$$

Здесь символами $\lambda(a)$, $\lambda(b)$ обозначены степени соответствующих полиномов.

Условием физической реализуемости проектируемой системы управления будет являться выполнение неравенств

$$\Lambda(K) \geq 0; \quad \Lambda(G) \geq 0. \tag{13}$$

Рассмотрим соотношение (11). Матрица $K(p)$ представляет собой произведение двух полиномиальных матриц W_{o}^{-1} и $(\psi^{-1} - I)$.

Выберем вспомогательную матрицу

$$\psi = (\psi^* + I)^{-1}, \tag{14}$$

где ψ^* — матрица дробно-рациональных функций, все ненулевые элементы ψ^*_j которой располагаются на главной диагонали.

Тогда в развёрнутом виде первое из неравенств системы (13) запишем как

$$\Lambda\Big(\|W_{ij}^{-1}\psi_j^*\|_{mm}\Big) \geq 0. \tag{15}$$

Если $\Lambda(W_{ij}^{-1}) = q_{ij}$, а $\Lambda(\psi_j^*) = \gamma_j$, то неравенство (15) можно представить в виде системы линейных неравенств

$$q_{ij} + \gamma_j \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \;\; j = \overline{1, m}. \tag{16}$$

Решив систему (16) при известных q_{ij}, получим условия, накладываемые на порядковые образы элементов матрицы ψ^*.

Рассмотрим соотношение (12). С учётом выражения (14)

$$G(p) = W_{\text{o}}^{-1}\psi^* E_{\Delta y}^g + W_{\text{o}}^{-1}E_{\Delta y}^g + W_{\text{o}}^{-1}W_{\text{м}}. \tag{17}$$

Очевидно, что при создании качественной системы управления требуется осуществить развязку каналов (каждый входной сигнал влияет на один и только на один выходной). Тогда матрицы $E_{\Delta y}^g$ и $W_{\text{м}}$ должны иметь диагональную структуру.

Матрица $G(p)$, являющаяся суммой трёх матриц, будет физически реализуемой, если каждая из матриц-слагаемых физически реализуема. С учётом сделанного предположения о диагональной структуре матриц $E_{\Delta y}^g$ и $W_{\text{м}}$ по аналогии с системой (16) получим совокупность линейных неравенств, обеспечивающих физическую реализуемость предкомпенсатора:

$$q_{ij} + \gamma_j + \chi_j \geq 0; \quad q_{ij} + \chi_j \geq 0; \quad q_{ij} + \xi_j \geq 0, \tag{18}$$

где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$, а символами χ_j и ξ_j обозначены порядковые образы элементов матриц $E_{\Delta y}^g$ и $W_{\text{м}}$ соответственно.

Отметим, что если элементами матрицы $E_{\Delta y}^g$ являются правильные дроби, из выполнения неравенства (16) следует выполнение первого неравенства системы (18).

Алгоритм аналитического синтеза. Обобщая полученные выше результаты, можно сформулировать общий алгоритм аналитического синтеза устойчивой физически реализуемой многосвязной системы управления с эталонной моделью.

1. Задать передаточные матрицы W_{o}, $W_{\text{м}}$, $E_{\Delta y}^g(p)$.

2. Вычислить полюсы и передаточные нули объекта управления. Если они имеют положительную действительную часть, то решение задачи синтеза невозможно.

3. Вычислить полюсы матриц $W_{\text{м}}$ и $E_{\Delta y}^g(p)$. Если они имеют положительную действительную часть, то решение задачи синтеза невозможно — следует вернуться к п. 1 и изменить требования к проектируемой системе управления.

4. Вычислить порядковые образы элементов матриц W_{o}^{-1}, $E_{\Delta y}^g$, $W_{\text{м}}$.

5. Проверить выполнение второго и третьего неравенств системы (18). Если указанные условия не выполняются, то физически реализуемое решение задачи синтеза невозможно — следует вернуться к п. 1 и изменить требования к проектируемой системе управления.

6. Из неравенства (16) определить ограничения на порядковые образы γ_j элементов матрицы ψ^*.

7. Построить диагональную матрицу ψ^* такую, что все ψ_j^* не имеют полюсов с положительной действительной частью, все $\psi_j^* + 1$ не имеют нулей с положительной действительной частью, а порядковые образы элементов ψ_j^* равны γ_j.

8. Вычислить вспомогательную матрицу ψ по формуле (14).

9. Вычислить искомые передаточные матрицы регулятора и предкомпенсатора по формулам (11) и (12).

Конец алгоритма.

Пример. Рассмотрим динамический объект, заданный системой уравнений в пространстве состояний, причём матрицы коэффициентов имеют вид

$$A_{\text{o}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B_{\text{o}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\text{o}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть эталонная модель поведения системы и желаемая передаточная матрица от управляющего воздействия к рассогласованию выходных векторов представлены в виде

$$W_{\text{м}} = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{p+9} & 0 \\ 0 & \dfrac{7}{p+7} \end{pmatrix}, \quad E^g_{\Delta y} = \begin{pmatrix} \dfrac{p}{(p+7)(p+9)} & 0 \\ 0 & \dfrac{p}{(p+7)(p+9)} \end{pmatrix}.$$

Требуется найти передаточные матрицы регулятора и предкомпенсатора, обеспечивающие заданные требования к системе управления.

Решение:

1. Проверка разрешимости задачи. Полюсы объекта управления: $p_1 = -4{,}24$, $p_{2,3} = -1{,}38 \pm 1{,}18i$; полюсы эталонной модели: $p_1 = -7$, $p_2 = -9$; полюсы матрицы $E^g_{\Delta y}$: $p_1 = -15$, $p_2 = -20$. Передаточные нули объекта управления: $p^0_1 = -10$. Все они имеют отрицательную действительную часть, значит, задача синтеза имеет решение.

2. Определение порядковых образов матриц $W_{\text{о}}^{-1}$, $W_{\text{м}}$, $E^g_{\Delta y}$. Обратная передаточная матрица динамического объекта:

$$W_{\text{о}}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{p^2+5p+10}{p+10} & \dfrac{2p^2+11p-6}{p+10} \\ \dfrac{-p}{p+10} & \dfrac{p^2+10p+14}{p+10} \end{pmatrix}.$$

Порядковые образы:

$$\Lambda(W_{\text{о}}^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Lambda(W_{\text{м}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Lambda(E^g_{\Delta y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Проверка разрешимости задачи. Второе и третье условия системы (18) имеют вид

$$-1+1 \geq 0; \quad -1+1 \geq 0; \quad 0+1 \geq 0; \quad -1+1 \geq 0,$$

$$-1+1 \geq 0; \quad -1+1 \geq 0; \quad 0+1 \geq 0; \quad -1+1 \geq 0.$$

Условия выполняются, требования к проектируемой МСАУ корректировать не нужно.

4. Определение вспомогательной матрицы ψ. Найдём порядковые образы элементов ψ^*_j из условия (16):

$$-1+\gamma_1 \geq 0;\ -1+\gamma_2 \geq 0;\ 0+\gamma_1 \geq 0;\ -1+\gamma_2 \geq 0 \ \Rightarrow\ \gamma_1 \geq 1; \quad \gamma_2 \geq 1.$$

Выберем элементы ψ^*_j с порядковыми образами γ_1 и γ_2 такие, что их полюсы и нули функций $\psi^*_j + 1$ не имеют положительной действительной части. Например:

$$\psi^* = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p+6} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{p+8} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \dfrac{p+6}{p+7} & 0 \\ 0 & \dfrac{p+8}{p+9} \end{pmatrix}.$$

5. Определение передаточных матриц регулятора и предкомпенсатора. По формулам (11) и (12) получим

$$K = \begin{pmatrix} \dfrac{p^2+5p+10}{(p+10)(p+6)} & \dfrac{2p^2+11p-6}{(p+10)(p+8)} \\ \dfrac{-p}{(p+10)(p+6)} & \dfrac{p^2+10p+14}{(p+10)(p+8)} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{10p^3+104p^2+370p+540}{(p+6)(p+9)(p+10)} & \dfrac{16p^2+88p-48}{(p+8)(p+10)} \\ -\dfrac{10p^2+54p}{(p+6)(p+9)(p+10)} & \dfrac{8p^2+80p+112}{(p+8)(p+10)} \end{pmatrix}.$$

Пример окончен.

Заключение. В представленной работе показана возможность точного решения задачи синтеза автоматической системы управления многосвязным динамическим объектом с эталонной моделью, эквивалентной по своим свойствам в определённых условиях функционирования адаптивной системе. Предложен алгоритм синтеза МСАУ, который обеспечивает устойчивость и физическую реализуемость получаемых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шпилевая О. Я.** Системы управления с аддитивной настройкой на основе метода вектора скорости // Автометрия. 2011. **47**, № 3. С. 92–99.
2. **Соколов Н. И., Рутковский В. Ю., Судзиловский Н. Б.** Адаптивные системы автоматического управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1988. 208 с.
3. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд. науч. лит. Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
4. **Асанов А. З.** Аналитическое конструирование адаптивной системы с эталонной моделью // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника. 2003. № 3. С. 7–12.
5. **Методы** классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5 томах. Т. 3. Синтез регуляторов систем автоматического управления /Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 616 с.
6. **Васильев В. И., Шаймарданов Ф. А.** Синтез многосвязных автоматических систем методом порядкового отображения. М.: Наука, 1983. 126 с.

Поступила в редакцию 11 мая 2012 г.