

УДК 621.378.325.535.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДАТЧИКА ВОЛНОВОГО ФРОНТА ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ*

М. С. Андреева, Н. Г. Ирошников, А. В. Корябин,
А. В. Ларичев, В. И. Шмальгаузен

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»,
119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2
E-mail: larichev@optics.ru*

Предложена методика оценки структурной постоянной C_n^2 и внешнего масштаба L_0 турбулентных флуктуаций при измерениях параметров волнового фронта светового пучка, прошедшего турбулентную трассу, с помощью датчика Гартмана. Метод основан на разложении фазовых флуктуаций в пределах заданной апертуры в ряд по полиномам Цернике и анализе статистики коэффициентов этого разложения. Применение методики для оценки параметров турбулентности в жидкостной ячейке дало результаты, хорошо согласующиеся с оценками, полученными другими методами. Приведены также результаты моделирования по измерению поперечной составляющей скорости ветра на трассе, определяемой посредством корреляции локальных наклонов на четырёх виртуальных субапертурах.

Ключевые слова: атмосферная турбулентность, моделирование турбулентности, полиномы Цернике, распространение излучения, датчик Шэка — Гартмана.

Введение. Оценка параметров атмосферной турбулентности имеет важное значение при разработке и анализе функционирования адаптивных оптических систем (АОС), предназначенных для компенсации влияния атмосферной турбулентности на фазу светового излучения. Другой актуальной задачей является анализ астроклимата при выборе мест для установки телескопов.

Важнейшие параметры атмосферной турбулентности — величины структурной постоянной C_n^2 и внешнего масштаба L_0 турбулентных флуктуаций показателя преломления, так как именно они определяют спектральную плотность фазовых флуктуаций на приёмной апертуре [1–3].

В данной работе предлагается методика оценки C_n^2 и L_0 по измерениям параметров волнового фронта (ВФ) светового пучка, прошедшего турбулентную трассу, с помощью датчика Гартмана. Программное обеспечение многих датчиков ВФ позволяет в реальном времени вычислять коэффициенты разложения фазовых флуктуаций на приёмной апертуре АОС по полиномам Цернике [4]. Рассматриваемая методика оценки C_n^2 и L_0 основана на анализе статистики этих коэффициентов.

Поперечная к направлению распространения светового пучка составляющая скорости ветра в значительной степени определяет частотные характеристики фазовых флуктуаций, и поэтому её измерение с помощью датчика ВФ также является важной задачей. В данной работе приведены результаты моделирования алгоритма оценки поперечной составляющей скорости ветра по корреляции локальных наклонов на нескольких субапертурах, программно выделяемых в пределах приёмной апертуры АОС.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-02-01353-а).

Оценка структурной постоянной C_n^2 и внешнего масштаба L_0 турбулентности. Представим фазу $\phi(\mathbf{r}, t)$ световой волны, прошедшей через турбулентную среду, в виде разложения по полиномам Цернике [1]:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^M a_j(t) Z_j(\mathbf{r}/R), \quad (1)$$

где $a_j(t)$ — коэффициенты разложения; $Z_j(\mathbf{r}/R)$ — полиномы Цернике в представлении сквозной нумерации с соответствующими радиальными и азимутальными индексами n и m : $j = j(m, n)$; R — радиус приёмной апертуры. Статистика коэффициентов разложения $a_j(t)$, в частности ковариационная матрица $\beta_{jk} = \langle a_j a_k \rangle$, определяется пространственным спектром флуктуаций показателя преломления в среде распространения. Рассмотрим только диагональные элементы (β_{jj}) этой матрицы.

В случае колмогоровской турбулентности выражения для β_{jk} были получены в [5]. Значения β_{jk} пропорциональны отношению $(D/r_0)^{5/3}$, здесь $D = 2R$ — диаметр приёмной апертуры, а r_0 — радиус корреляции фазы световой волны на приёмной апертуре (фридовский радиус) [1]:

$$r_0 = \left[0,423 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 C_n^2 L \right]^{-3/5}, \quad (2)$$

где λ — длина волны, L — длина трассы.

Колмогоровский спектр турбулентных флуктуаций показателя преломления $\sim \varkappa^{11/3}$ явно не содержит каких-либо пространственных масштабов и поэтому удобен для проведения теоретических оценок.

Вместе с тем в ряде случаев, например при анализе влияния турбулентности на работу телескопов с апертурой в несколько метров и более [6], необходимо учитывать величину внешнего масштаба турбулентности L_0 . Тогда двумерный пространственный спектр $\Phi(\varkappa)$ флуктуаций показателя преломления турбулентной среды будет иметь вид [1, 6, 7]

$$\Phi(\varkappa) = \frac{A}{(\varkappa^2 + \varkappa_0^2)^{11/6}}, \quad (3)$$

где $\varkappa_0 = 1/L_0$, а величину A можно выразить через параметр r_1 , который формально определяется по формуле, совпадающей с (2) для фридовского радиуса r_0 :

$$A = 0,0229 r_1^{-5/3}. \quad (4)$$

В работе [7] получено выражение для ковариационной матрицы коэффициентов разложения фазы светового поля, прошедшего через турбулентную атмосферу, для общего случая двух разнесённых приёмных апертур. В более простом случае одной апертуры выражение для диагональных элементов матрицы ковариаций запишется следующим образом [6, 7]:

$$\beta_{jj} = \langle a_j a_j \rangle = A^2 \pi^{8/3} D^{5/3} (n+1) f_n(\pi D/L_0) = 3,878 (D/r_1)^{5/3} f_n(\pi D/L_0),$$

$$f_n(x_0) = (n+1) \int_0^\infty \frac{J_{n+1}^2(x) dx}{x(x^2 + x_0^2)^{11/6}}. \quad (5)$$

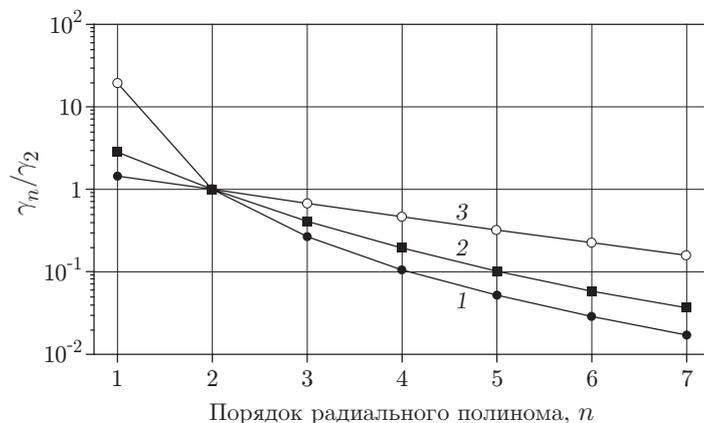


Рис. 1. Зависимость $\gamma_n/\gamma_2(n)$ для различных величин отношения D/L_0 (кривая 1 — $D/L_0 = 0$ ($L \rightarrow \infty$), 2 — $D/L_0 = 1$, 3 — $D/L_0 = 10$); точки γ_n/γ_2 соответствуют целым значениям n

Здесь n — радиальная степень j -го полинома Цернике. Таким образом, значения диагональных элементов ковариационной матрицы $\beta_{jj} = \gamma_{n(j)}$ не зависят от азимутального индекса m . Если $L_0 \rightarrow \infty$, $D/L_0 \rightarrow 0$, то коэффициенты γ_n совпадают со значениями, полученными в [5] для колмогоровского спектра турбулентности.

В данной задаче коэффициенты γ_n удобно нормировать на коэффициент γ_2 для полиномов второго порядка (рис. 1). Коэффициент γ_1 для полиномов первого порядка (средних по апертуре наклонов) может иметь меньшую относительную ошибку измерения (аппаратную), однако вибрации экспериментальной установки влияют именно на средние наклоны. Коэффициенты для полиномов порядка выше второго, как правило, имеют большую относительную ошибку измерения.

Из формулы (5) следует, что отношение γ_n/γ_2 не зависит от величины D/r_1 , а определяется только значением D/L_0 . Поэтому измеренные значения $\tilde{\gamma}_n/\tilde{\gamma}_2$ для нескольких $n > 2$ можно непосредственно использовать для оценки внешнего масштаба турбулентности \hat{L}_0 . При этом необходимо установить, для какого значения D/L_0 зависимость $\gamma_n/\gamma_2(D/L_0)$ наилучшим образом аппроксимирует экспериментальные значения $\tilde{\gamma}_n/\tilde{\gamma}_2$.

После этого любое из экспериментальных значений $\tilde{\gamma}_n$ можно использовать для вычисления величины \tilde{r}_1 , обратив формулу (5):

$$\tilde{r}_1 = D[3,878 f_n(\pi D/\hat{L}_0)/\tilde{\gamma}_n]^{3/5}, \quad (6)$$

где \hat{L}_0 получена на этапе аппроксимации кривых γ_n/γ_2 . Теперь оценка средней по трассе структурной постоянной турбулентности \tilde{C}_n^2 следует из формулы (2):

$$\tilde{C}_n^2 = \tilde{r}_1^{-5/3}[0,423(2\pi/\lambda)^2 L]^{-1}. \quad (7)$$

Значения, вычисляемые по (6) и (7), зависят от радиальной степени используемых полиномов. Для повышения точности оценок можно брать среднее по абберациям нескольких порядков.

Кратко алгоритм получения оценок структурной постоянной и внешнего масштаба турбулентности представим следующим образом.

1. В процессе регистрации ВФ светового пучка, прошедшего турбулентную трассу длиной L , вычисляем коэффициенты $a_j(t)$ разложения (1) и диагональные элементы их ковариационной матрицы: $\beta_{jj} = \langle a_j a_j \rangle$.

2. Коэффициенты β_{jj} с одинаковым азимутальным индексом n усредняем и получаем коэффициенты $\tilde{\gamma}_n$.

3. Нормируем коэффициенты $\tilde{\gamma}_n$ на $\tilde{\gamma}_2$; находим значение L_0 , при котором нормированные коэффициенты наилучшим образом аппроксимируют теоретическую зависимость. Это можно сделать, сравнивая нормированные коэффициенты с предварительно рассчитанными значениями $\gamma_n/\gamma_2(L_0)$ по критерию χ^2 [8].

4. По формуле (5) вычисляем оценку \tilde{r}_1 .

5. По формуле (7) вычисляем оценку \tilde{C}_n^2 .

Проверка методики в эксперименте проводилась на модельной турбулентности в жидкостной ячейке [9]. В такой ячейке для создания флуктуаций показателя преломления среды используется турбулентная конвекция в слое жидкости, заключённом между плоскими горизонтальными пластинами: нагревателем и холодильником, расположенными в нижней и верхней частях ячейки соответственно. При больших значениях числа Рэлея ($Ra = 10^7-10^9$), когда конвективный теплообмен превалирует над теплообменом, обусловленным теплопроводностью, в ячейке возникает развитая турбулентность, которая согласно литературным оценкам [10, 11] является локально-изотропной во всём объёме жидкости за исключением пристенных слоёв.

Турбулентный режим в кювете можно варьировать путём изменения разности температур ΔT между нагревателем и холодильником, вертикального расстояния между ними и использованием жидкостей с различными теплофизическими параметрами.

Исследования параметров турбулентности в жидкостной ячейке проводились с помощью датчика волнового фронта ShaH-3020 [12], изготовленного по схеме Шэка — Гартмана [1]. Его пространственное разрешение при входной апертуре 30 мм и 1500 субапертурах составляет около 0,75 мм. Программное обеспечение датчика позволяет по измеренным на субапертурах локальным наклонам восстанавливать фазовый профиль анализируемого пучка и его разложение по полиномам Цернике. В экспериментах с ячейкой использовалось 35 полиномов — до седьмого радиального порядка включительно. Максимальная частота измерений датчика составляла 56 Гц.

Результаты экспериментов для значений $\Delta T = 10, 15, 20$ и 25 °C и расстояния между нагревателем и холодильником в 10 см приведены в таблице (для r_1 и C_n^2 даны диапазоны полученных оценок и их средние значения). Для оценки внешнего масштаба использовались дисперсии коэффициентов Цернике γ_n с радиальной степенью $n = 3-6$.

Полученные оценки $L_0 = 2-3$ мм практически совпадают с результатами [13] для близких к нашим значениям геометрических размеров ячейки и других параметров эксперимента. Кроме того, значения C_n^2 , вычисленные по формулам (6) и (7), хорошо согласуются с оценками C_n^2 , приведёнными в [14] на основе измерения дисперсии флуктуаций интенсивности в узком пучке.

$\Delta T, \text{ }^\circ\text{C}$	$L_0, \text{ мм}$	$r_1, \text{ мм}$	$\langle r_1 \rangle, \text{ мм}$	$C_n^2, \text{ м}^{-2/3}$	$\langle C_n^2 \rangle, \text{ м}^{-2/3}$
10	$2,0 \pm 0,15$	0,3–0,37	0,33	$(0,88-1,2) \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$
15	$2,5 \pm 0,25$	0,25–0,28	0,27	$(1,4-1,6) \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$
20	$2,5 \pm 0,25$	0,19–0,21	0,20	$(2,2-2,8) \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$
25	$3,0 \pm 0,30$	0,15–0,17	0,16	$(3,2-3,8) \cdot 10^{-7}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$

Моделирование измерений скорости ветра. Поперечная составляющая скорости ветра на трассе распространения излучения является важным климатическим параметром для систем адаптивной оптики, так как вместе с интенсивностью турбулентных флуктуаций определяет необходимый частотный диапазон контура обратной связи [1]. В настоящее время широко применяется метод DIMM (Differential Image Motion Monitor — дифференциальный измеритель смещения (фокальных) пятен), в котором скорость поперечного ветра вычисляется по разности смещений изображений тестового источника на четырёх измерительных субапертурах [15]. Приборы, реализующие этот принцип, позволяют измерять интенсивность турбулентности (параметр C_n^2) и скорость поперечного ветра, при этом погрешность измерения скорости существенно зависит от положения турбулентного слоя на трассе [16, 17]. В предлагаемой работе изучалась возможность измерения скорости поперечного ветра с помощью данных, которые обеспечивает датчик волнового фронта гартмановского типа.

Пусть на апертурах A_1 и A_2 (рис. 2, *a*) измеряется какой-либо параметр ВФ светового пучка, например коэффициент a_j некоторой aberrации в разложении (1). Если придерживаться гипотезы Тейлора, то ветер, поперечный к оптической оси приёмной апертуры, приводит к сносу фазовых флуктуаций пучка на апертуре. Строго говоря, если оставаться в рамках приближения геометрической оптики, скорость сноса фазовых флуктуаций на апертуре приблизительно соответствует скорости поперечного ветра только в двух случаях: когда ветер имеет заметную скорость лишь на небольшом участке трассы, непосредственно прилегающем к приёмной апертуре, или когда он однороден вдоль всей трассы распространения широкого коллимированного пучка. Тогда, измерив промежуток времени Δt , через который величина a_j на апертуре A_2 будет максимально близка к значению a_j на апертуре A_1 , можно сказать, что проекция V_{12} поперечной составляющей скорости ветра \mathbf{V} на линию, соединяющую центры апертур, выражается как

$$V_{12} = d_{12}/\Delta t, \tag{8}$$

где d_{12} — расстояние между центрами апертур. Время сноса производной фазы, т. е. наклонов, можно измерять, используя гартмановский датчик ВФ. В качестве меры «похожести» естественно применять коэффициент взаимной корреляции.

Если измерения проводятся с частотой f , то максимальная поперечная скорость ветра, которая может быть измерена таким методом (как следует из теоремы Котельникова и

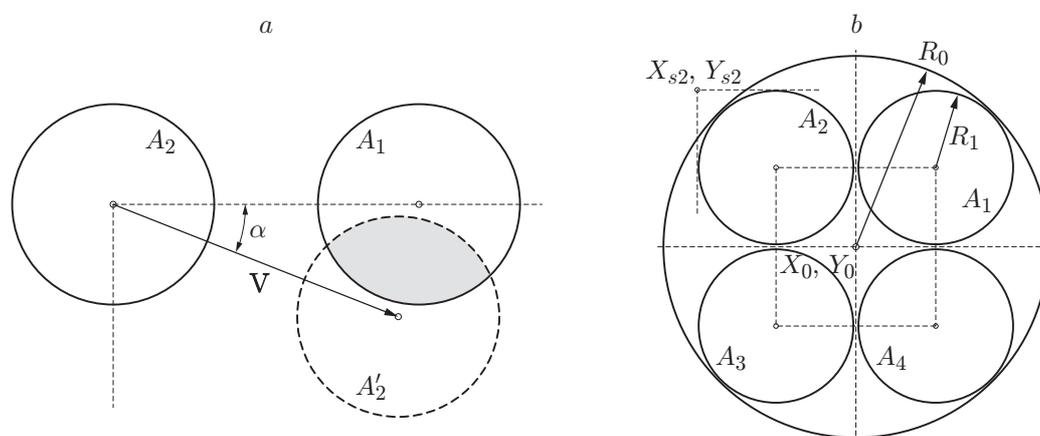


Рис. 2. Расположение измерительных апертур: *a* — при измерении горизонтальной составляющей скорости ветра, *b* — при моделировании

гипотезы Тейлора), составляет

$$V_{\max} = d_{12}f/2. \quad (9)$$

При использовании гартмановского датчика ВФ апертуры для корреляционных измерений могут быть виртуальными, т. е. программно выделенными из общей апертуры (рис. 2, *b*). Эти апертуры могут иметь и другую геометрию, например быть перекрывающимися, некруглыми и т. д. Если ограничиться неперекрывающимися круглыми апертурами, то максимальный радиус R_{\max} субапертур $A_1 \dots A_4$ при их касании выражается через радиус R_0 всей приёмной апертуры: $R_{\max} = R_0/(1 + \sqrt{2})$.

Численное моделирование измерения скорости ветра проводилось следующим образом. В качестве фазы принимаемого светового поля использовался записанный в файл фазовый экран с колмогоровским спектром шириной 1024 пикселя и длиной 10^{20} строк, сгенерированный методом, описанным в [18]. Круглая измерительная апертура A_0 помещалась сначала в левом верхнем углу экрана, при этом координаты центра апертуры имели значения $X_c = R_0$, $Y_c = R_0$.

При моделировании горизонтальной компоненты ветра производилось смещение измерительной апертуры (изменение координаты X_c) на величину Δx . Моделирование вертикальной компоненты ветра осуществлялось смещением на несколько строк (Δy) всего фазового экрана (рис. 3). Эти смещения моделировали снос ВФ за время между двумя измерениями $\Delta t = 1/f$.

Алгоритм программы моделирования можно представить следующим образом.

1. В каждом положении измерительной апертуры на виртуальных субапертурах вычисляются средние X - и Y -наклоны ВФ — коэффициенты a_2 и a_1 в разложении (1). Результаты запоминаются в массивах $X[i, k]$, $Y[i, k]$, где $i = 1, \dots, 4$ — номер субапертуры, $k = 1, \dots, L_s$ (L_s — длина выборки, которая составляла удвоенный диаметр полной апертуры в пикселях: $2R_0$).

2. После заполнения массивов $X[i, k]$, $Y[i, k]$ рассчитываются выборочные корреляционные функции:

$$K_{xij}[q] = \langle (X[i, k] - \langle X[i, k] \rangle)(X[j, k + q] - \langle X[j, k + q] \rangle) \rangle,$$

$$K_{yij}[p] = \langle (Y[i, k] - \langle Y[i, k] \rangle)(Y[j, k + p] - \langle Y[j, k + p] \rangle) \rangle, \quad i, j = 1, \dots, 4.$$

3. Находятся координаты максимумов S_{xij} , S_{yij} выборочных корреляционных функций и обновляются соответствующие гистограммы-распределения этих максимумов $H_{xij}[\cdot]$, $H_{yij}[\cdot]$; указанная процедура повторяется N раз.

4. Определяются координаты, соответствующие максимумам распределений, т. е. средние по N выборкам смещения максимумов $s_{xij} = \langle S_{xij} \rangle$, $s_{yij} = \langle S_{yij} \rangle$ корреляционных функций.

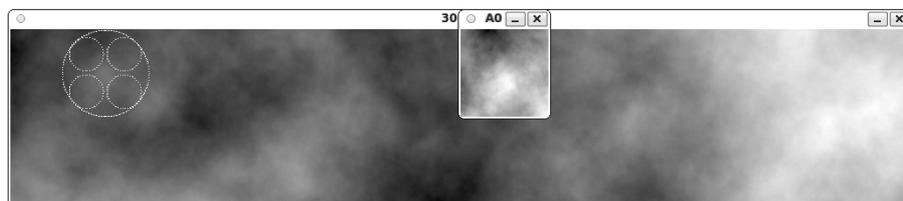


Рис. 3. Окно программы моделирования. В центре выделен фрагмент фазового экрана, соответствующий текущему положению измерительной апертуры

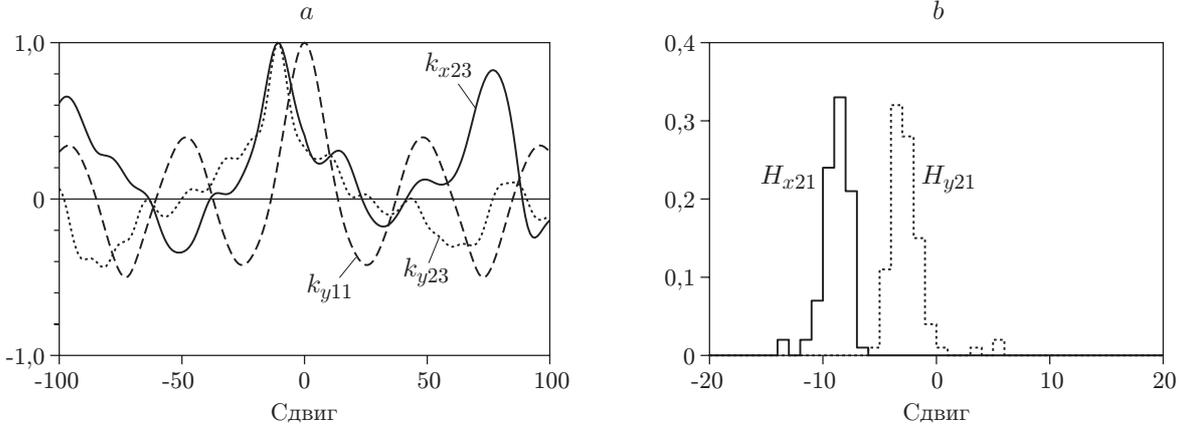


Рис. 4. Результаты численного моделирования: *a* — коэффициенты корреляции для вертикально разнесённых субапертур, $\alpha = 90^\circ$; *b* — гистограммы положения максимумов коэффициентов корреляции для горизонтально разнесённых субапертур, $\alpha = 45^\circ$

Основные параметры численного моделирования: радиус апертуры $R_0 = 50$; радиусы субапертур $R_1, \dots, R_4 = 20$; расстояние между центрами субапертур по осям X и Y $d = 43$; длина выборки $L_s = 200$; длина массива корреляции $L_c = 201$; количество выборок для накопления гистограмм $N = 100$.

Примеры вычисленных коэффициентов корреляции

$$k_{xij}[q] = K_{xij}[q] / \sqrt{K_{xii}[0]K_{xjj}[0]}, \quad k_{yij}[p] = K_{yij}[p] / \sqrt{K_{yii}[0]K_{yjj}[0]}$$

приведены на рис. 4, *a*, гистограммы положения максимумов — на рис. 4, *b*. Для чисто вертикального ветра $\Delta x = 0$. Тогда смещения максимумов корреляционных функций обеих компонент наклона совпадают и соответствует ожидаемым величинам. Для контроля дан также график автокорреляционного коэффициента k_{y11} (штриховая кривая). Как и следовало ожидать, автокорреляционная функция симметрична и её ширина равна диаметру субапертуры.

Оказалось, что для случая ветра с отличными от нуля обеими компонентами скорости $\Delta x, \Delta y \neq 0$ максимумы корреляционных функций для компонент наклона смещаются на разную величину и разница зависит от угла α между вектором скорости и осями координат. Для корреляционных функций субапертур, расположенных в диагональных направлениях, также отмечена разница в смещениях максимумов корреляционных функций для x - и y -компонент наклонов ВФ, но при углах α , отличных от 45° . При $\alpha = 45^\circ$ смещения максимумов этих субапертур совпадают.

По результатам обработки гистограмм были построены зависимости нормированного сдвига максимумов корреляционных функций x - и y -компонент наклонов от угла α (рис. 5). Сдвиги нормировались на отношение расстояния между субапертурами к проекции суммарного смещения $\Delta z = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ на линию, соединяющую центры субапертур. Величина Δz соответствует суммарному сносу ВФ на апертуре за время $\Delta t = 1/f$ между двумя измерениями: $\Delta z = v/f$. Таким образом, для субапертур A_1 и A_2 осуществлялась нормировка

$$\begin{aligned} g_{x21} &= s_{x21}(\Delta x/d_{21}) \quad \text{при } \Delta z = \Delta x, \\ g_{y21} &= s_{y21}(\Delta y/d_{21}). \end{aligned} \tag{10}$$

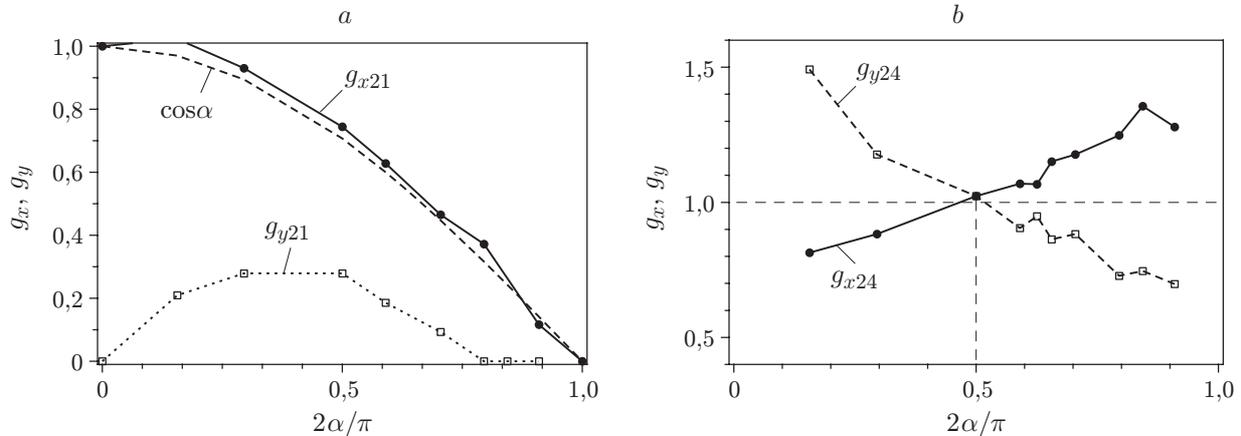


Рис. 5. Результаты численного моделирования сдвигов максимумов корреляционных функций x - и y -компонент наклонов: a — горизонтальное, b — диагональное разнесения субапертур

Наиболее информативными оказались зависимости g_{x21} и g_{y23} (рис. 5, a). В соответствии с симметрией задачи зависимость g_{x21} от угла α совпадает с зависимостью g_{y23} от угла $(\pi/2 - \alpha)$. Кроме того, указанные зависимости близки к функциям $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ (штриховая кривая на рис. 5, a), что позволяет предложить для определения скорости следующие соотношения:

$$\frac{s_{x21}}{d_{21}} \approx \frac{\cos \alpha}{v_x}, \quad v_x = v \cos \alpha \rightarrow \frac{s_{x21}}{d_{21}} \approx \frac{1}{v}. \quad (11)$$

Аналогичное соотношение получается для s_{y23} :

$$\frac{s_{y23}}{d_{23}} \approx \frac{\sin \alpha}{v_y}, \quad v_y = v \sin \alpha \rightarrow \frac{s_{y23}}{d_{23}} \approx \frac{1}{v}. \quad (12)$$

При условии точных измерений имеем

$$v_x = \Delta x, \quad v_y = \Delta y, \quad v = \Delta z.$$

На практике из пары сдвигов s_{x21} и s_{y23} для вычисления модуля скорости v по формулам (11), (12) следует использовать тот, который больше по абсолютной величине.

Заметим, что в данной работе задача распространения излучения на турбулентной трассе не рассматривалась, поэтому полученные результаты носят оценочный характер. При более строгом анализе следует конкретизировать расстояние от приёмной апертуры до сносимого ветром турбулентного слоя (или нескольких слоёв), решать задачу распространения излучения на атмосферной трассе и оценивать точность определения поперечной скорости в зависимости от параметров турбулентности и геометрии трассы [17, 19]. Возможно, что при этом более информативным параметром для сравнения на виртуальных субапертурах окажется не средний наклон ВФ, а его другая средняя по субапертуре характеристика, например дефокусировка. Кроме того, для достижения необходимой точности измерений требуется иная конфигурация виртуальных субапертур: их форма, количество, взаимное расположение и т. п.

Заключение. Предложенная и проверенная в лабораторных условиях методика позволяет с помощью гартмановского датчика волнового фронта измерять структурную постоянную C_n^2 и внешний масштаб турбулентности L_0 . Результаты численного моделирования показывают также принципиальную возможность измерения поперечной составляющей

скорости ветра на трассе с помощью корреляционной обработки средних по виртуальным субапертурам характеристик волнового фронта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лукин В. П.** Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986. 248 с.
2. **Лукин В. П.** Выбор базовых параметров адаптивных оптических систем // Автометрия. 2012. **48**, № 2. С. 3–11.
3. **Лукин В. П., Фортес Б. В.** Адаптивное формирование пучков и изображений в атмосфере. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 214 с.
4. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
5. **Noll R. J.** Zernike polynomials and atmospheric turbulence // JOSA. 1976. **66**, N 3. P. 207–211.
6. **Winker D. M.** Effect of a finite outer scale on the Zernike decomposition of atmospheric optical turbulence // JOSA. A. 1991. **8**, N 10. P. 1568–1573.
7. **Takato N., Yamaguchi I.** Spatial correlation of Zernike phase-expansion coefficients for atmospheric turbulence with finite outer scale // JOSA. A. 1995. **12**, N 5. P. 958–963.
8. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 899 с.
9. **Ирошников Н. Г., Ларичев А. В., Корябин А. В., Шмальгаузен В. И.** Экспресс-анализ параметров турбулентности // Вестн. МГУ. Сер. Физика, астрономия. 2009. № 5. С. 74–78.
10. **Deardorff J. W., Willis G. E.** Investigation of turbulent thermal convection between horizontal plates // Journ. Fluid Mechanics. 1967. **28**, N 4. P. 675–704.
11. **Garon A. M., Goldstein R. J.** Velocity and heat transfer measurements in thermal convection // Phys. Fluids. 1973. **16**, N 11. P. 1818–1825.
12. **Датчик** волнового фронта ShaH. URL: <http://www.visionica.ru/shah.htm> (дата обращения: 5.12.2011).
13. **Maccioni A., Dainty J. C.** Measurement of thermally induced optical turbulence in a water cell // Journ. Modern Optics. 1977. **44**, N 6. P. 1111–1126.
14. **Гурвич А. С., Каллистратова М. А., Мартвель Ф. Э.** Исследование сильных флуктуаций интенсивности света в турбулентной среде при малом волновом параметре // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1977. **XX**, № 7. С. 1020–1031.
15. **Sarazin M., Roddier F.** The ESO differential image motion monitor // Astron. and Astrophys. 1990. **227**, N 1. P. 294–300.
16. **Антошкин Л. В., Ботыгина Н. Н., Емалеев О. Н. и др.** Дифференциальный измеритель турбулентности ДИТ-2 // Оптика атмосферы и океана. 1998. **11**, № 11. С. 1219–1223.
17. **Лукин В. П.** Дифференциальный измеритель параметров атмосферной турбулентности // Фотоника. 2010. Вып. 5. С. 16–21.
18. **Vorontsov A. M., Paramonov P. V., Valley M.** Generation of infinitely-long phase screens for modeling optical wave propagation through turbulence // Proc. SPIE. 2005. **5891**. P. 63–76.
19. **Коняев П. А.** Модификация метода расщепления для численного решения квазиоптических задач // Тез. докл. VI Всесоюз. симп. по распространению лазерного излучения в атмосфере. Томск: ИОА СО АН СССР, 1981. Ч. III. С. 195–198.

Поступила в редакцию 5 декабря 2011 г.