УДК 621.391.15

СЖАТИЕ НЕРАВНОЗНАЧНЫМИ СИМВОЛАМИ ИНФОРМАЦИИ, ПОРОЖДЁННОЙ НЕИЗВЕСТНЫМ ИСТОЧНИКОМ БЕЗ ПАМЯТИ*

В. К. Трофимов, Т. В. Храмова

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики», 630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86
E-mail: trofimov@sibsutis.ru

Предложен метод сжатия информации, порождённой неизвестным источником без памяти, неравнозначными символами и доказана его оптимальность.

Ключевые слова: энтропия, кодирование, стоимость кодирования, источник сообщений.

Введение. Проблемы передачи и сжатия информации актуальны практически в любой сфере деятельности человека. Существуют различные типы источников, порождающих информацию, модели каналов передачи информации и виды кодирования (сжатия) информации. В качестве базовой модели канала передачи информации рассмотрим канал без шума, т. е. будем считать, что при передаче информация не подвергается искажению. Характеризуя источник информации, следует упомянуть, что он может быть как известным (статистически изученным), так и неизвестным. Процесс сжатия информации заключается в отображении последовательности, порождённой источником, в последовательность, состоящую из символов кодового алфавита. Длительности символов кодового алфавита могут быть как одинаковыми, так и различными. В зависимости от ситуации возникает потребность изучения конкретной схемы «источник—кодер—канал—декодер—получатель».

Данная работа посвящена изучению равномерного по входу, но неравномерного по выходу кодирования сообщений, порождённых неизвестным источником без памяти, словами выходного алфавита, состоящего из неравнозначных символов.

Основные определения и обозначения. Постановка задачи. Рассмотрим источник Θ с алфавитом $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, генерирующий бесконечную последовательность, которая разбивается на блоки (слова) длины N. Известно, что источник Θ является источником без памяти, т. е. появление любой буквы $x_{i_j} \in X$ в сообщении $w_i = x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_N}$ не зависит от предыдущих символов. Если $p_\Theta(x_{i_j})$ — вероятность порождения буквы $x_{i_j} \in X$ источником Θ, то обозначим через $p_\Theta(w_i)$ вероятность появления блока $w_i = x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_N}$. Очевидно, в этом случае

$$p_\Theta(w_i) = p_\Theta(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_N}) = \prod_{j=1}^{N} p_\Theta(x_{i_j}). \qquad (1)$$

*Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (ведущая научная школа № 5176.2010.9) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-07-00095-а).

Энтропия источника без памяти Θ [1–3] определяется равенством

$$H(\Theta) = -\sum_{x_i \in X} p_\Theta(x_i) \log p_\Theta(x_i). \tag{2}$$

Здесь и далее $\log x = \log_2 x$, $0 \log 0 = 0$.

Пусть M^N — множество всех последовательностей длины N и M^* — множество всех последовательностей конечной длины, состоящих из элементов множества M.

Последовательность букв, порождённых источником Θ, разобьём на слова (блоки) длины N, которые с помощью отображения φ переведём в слова выходного алфавита $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, где каждый символ y_i, $i = \overline{1,k}$, имеет свою стоимость передачи, равную $t(y_i) = t_i$, $i = \overline{1,k}$. Вектор с компонентами $t_1, t_2, \ldots, t_k$ обозначим через $\bar{t}$, т. е. $\bar{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Вектор, все координаты которого равны 1, будем обозначать $\bar{t}_1$. Таким образом, каждому кодовому алфавиту ставится в соответствие некоторый вектор $\bar{t}$: $t_i = t(y_i)$, $i = \overline{1,k}$. При передаче букв азбукой Морзе мы имеем дело с выходным алфавитом «точка, тире», символы которого не равнозначны, а при кодировании букв алфавита кодом Бодо все буквы кодового алфавита, состоящего из символов «0» и «1», равнозначны. Основы теории передачи сообщений по каналу без шума были заложены в основополагающей работе Шеннона [1], который установил, что для любого выходного алфавита Y с вектором $\bar{t}$ пропускная способность канала $C(\bar{t})$ вычисляется по формуле

$$C(\bar{t}) = \log \omega_0(\bar{t}), \tag{3}$$

где $\omega_0(\bar{t})$ — наибольший положительный корень уравнения $\omega^{-t_1} + \omega^{-t_2} + \ldots + \omega^{-t_m} = 1$. В частности, при $\bar{t} = \bar{t}_1$ величина $\omega_0(\bar{t}_1) = m$, поэтому (3) принимает вид

$$C(\bar{t}_1) = \log m. \tag{4}$$

В результате кодирования каждому блоку $w_i \in X^N$ ставится в соответствие некоторое кодовое слово $\varphi(w_i) \in Y^*$. При этом длительность $l(\varphi(w_i), \bar{t})$ кодового слова $\varphi(w_i)$ определяется как сумма длительностей входящих в него символов. Если $\varphi(w_i) = y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_l}$, то $l(\varphi(w_i), \bar{t}) = \sum\limits_{j=1}^{l} t(y_{i_j})$. При $\bar{t} = \bar{t}_1$ величина $l(\varphi(w_i), \bar{t}_1)$ равна числу букв в слове $\varphi(w_i)$. Величину

$$\tilde{L}(N, \Theta, \varphi, \bar{t}) = \sum_{w \in X^N} p(w) l(\varphi(w), \bar{t}) \tag{5}$$

назовём стоимостью кодирования блоков длины N, порождённых источником Θ, при отображении φ и выходном алфавите с вектором $\bar{t}$. Среднюю длительность букв выходного алфавита, приходящихся на одну букву входного алфавита, обозначим $L(N, \Theta, \varphi, \bar{t})$. Очевидно,

$$L(N, \Theta, \varphi, \bar{t}) = \frac{\tilde{L}(N, \Theta, \varphi, \bar{t})}{N}. \tag{6}$$

Разность между $L(N, \Theta, \varphi, \bar{t})$ и $H(\Theta)/C(\bar{t})$ обозначим $R(N, \Theta, \varphi, \bar{t})$ и назовём избыточностью кодирования φ, т. е.

$$R(N, \Theta, \varphi, \bar{t}) = L(N, \Theta, \varphi, \bar{t}) - H(\Theta)/C(\bar{t}). \tag{7}$$

Множество всех источников без памяти, порождающих буквы входного алфавита X, обозначим Ω_0. Пусть $\Omega \subseteq \Omega_0$ — произвольное подмножество источников из Ω_0, тогда величину $R(N,\Omega,\bar{t})$, определяемую равенством

$$R(N,\Omega,\bar{t}) = \inf_{\varphi} \sup_{\Theta\in\Omega} R(N,\Theta,\varphi,\bar{t}), \tag{8}$$

следуя [2], назовём избыточностью универсального кодирования для множества источников $\Omega \subseteq \Omega_0$ с длительностями выходных символов, определяемых вектором $\bar{t}_1$. В частности, если Ω содержит единственный источник Θ, то мы имеем дело с известным источником. Из основной теоремы Шеннона [1] следует, что величина $R(N,\Omega,\bar{t})$ всегда неотрицательна. С другой стороны, с ростом N величи́ны $R(N,\Theta,\bar{t})$ и $R(N,\Omega,\bar{t}_1)$ стремятся к 0. Хорошо известно, что избыточность кодирования $R(N,\Theta,\bar{t}_1)$ достигает своего минимума при кодировании методом Хаффмена [3, 4]. Однако этот метод не позволяет априори оценить, какой избыточности можно достигнуть при его применении. Классический метод кодирования Шеннона позволил получить для $R(N,\Theta,\bar{t}_1)$ оценку вида

$$0 \le R(N,\Theta,\bar{t}_1) < 1/N. \tag{9}$$

В работе [5] доказано, что почти для всех источников без памяти справедливы неравенства

$$\lambda/N \le R(N,\Theta,\bar{t}) < 1/N, \tag{10}$$

где $\lambda > 0$. Таким образом, в [5] установлено, что код Шеннона при кодировании блоков близок к оптимальному.

Кодирование неизвестного источника впервые рассматривалось в работах [6] и [7]. В [7], например, установлено, что величина $R(N,\Omega_0,\bar{t}_1)$ с ростом N стремится к 0. Такое кодирование называется универсальным. Асимптотически точное значение для $R(N,\Omega_0,\bar{t}_1)$ получено в [2], где доказано, что

$$R(N,\Omega_0,\bar{t}_1) \cong \frac{k-1}{2}\frac{\log N}{N\log m}. \tag{11}$$

Соотношения $f(n) \cong g(n)$ и $f(n) \gtrsim g(n)$ здесь и далее означают, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/g(n) \ge 1$ соответственно. Из неравенств (9)–(11) вытекает, что множитель $((k-1)/2)\log N$ является «платой» за незнание источника. Так как $\log N$ растёт медленнее, чем N^{ε}, где ε сколь угодно мало, то эту плату можно считать приемлемой.

Универсальное кодирование для равнозначных букв выходного алфавита широко изучалось как у нас в стране, так и за рубежом. Библиографию по этому вопросу можно найти в [8, 9].

Кодирование источников при неравнозначных символах кодового алфавита имеет ряд особенностей. В частности, при $\bar{t} \ne \bar{t}_1$ до настоящего времени не существует алгоритма построения оптимального кода, поэтому оценка величин $R(N,\Theta,\bar{t})$ и $R(N,\Omega_0,\bar{t})$ приобретает особое значение. При получении хороших оценок можно говорить если не об оптимальных кодах, то, по крайней мере, о близких к оптимальным. В работах [10, 11] были построены коды, для которых

$$0 \le R(N,\Theta,\bar{t}) < \lambda/N, \tag{12}$$

где λ — постоянная, определяемая входным алфавитом. Из (10) и (7) следует, что скорости убывания избыточности совпадают при кодировании неравнозначными и равнозначными символами. Поведение $R(N, \Omega_0, \bar{t})$ при $\bar{t} \neq \bar{t}_1$ ранее не изучалось. В данной работе получено асимптотически точное равенство для избыточности $R(N, \Omega_0, \bar{t})$ кодирования блоков длины N, порождённых неизвестным источником без памяти, словами выходного алфавита с неравнозначными символами. Доказано асимптотическое равенство

$$R(N, \Omega_0, \bar{t}) \cong \frac{k-1}{2C(\bar{t})} \frac{\log N}{N}. \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (13), видим, что платой за незнание источника, как и в случае равнозначности букв выходного алфавита, является множитель $\log N$. При $\bar{t} = \bar{t}_1$ с учётом (4) из (13) следует (11).

Основная сложность доказательства соотношения (13) заключается в установлении справедливости верхней оценки для $R(N, \Omega_0, \bar{t})$. Для её получения предложен конструктивный метод кодирования.

Разбиение отрезка, порождённое длительностями символов кодового алфавита. Рассмотрим произвольный источник Θ с алфавитом входа $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и кодовым алфавитом $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Пусть также задан вектор $\bar{t}_Y = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $t_i = t(y_i)$, $i = \overline{1, m}$, и $\omega_0(t_Y)$ — наибольший положительный корень уравнения $\omega^{-t_1} + \omega^{-t_2} + \ldots + \omega^{-t_m} = 1$.

Рассмотрим разбиение произвольного интервала $[a; b)$:

$$\Im_Y([a; b)) = \{I_j([a; b))\}_{j = \overline{1, m}},$$

которое состоит из m непересекающихся интервалов $I_j([a; b)) = [a_{j-1}; a_j)$ и определяется как

$$I_j([a; b)) = [a_{j-1}; a_j) = \Big[a + (b-a) \sum_{i=1}^{j-1} \omega_0^{-t_i};\ a + (b-a) \sum_{i=1}^{j} \omega_0^{-t_i}\Big), \quad a_0 = a,\ a_m = b. \tag{14}$$

Следует отметить, что $\Im_Y([a; b))$ состоит из полузакрытых слева интервалов $I_j([a; b)) = [a_{j-1}; a_j)$, при этом длина интервала $|I_j([a; b))|$ обратно пропорциональна длительности буквы y_j. В самом деле, согласно (14) получаем

$$|I_j([a; b))| = a_j - a_{j-1} = a + (b-a) \sum_{i=1}^{j} \omega_0^{-t_i} - \Big(a + (b-a) \sum_{i=1}^{j-1} \omega_0^{-t_i}\Big) = (b-a)\omega_0^{-t_j}. \tag{15}$$

Через $\Im_Y^n([a; b))$ обозначим разбиение, полученное n-кратным применением процедуры разбиения $\Im_Y([a; b))$ к интервалу $[a, b)$, т. е. разбиение разбиений:

$$\begin{gathered} \Im_Y^n([a; b)) = \{I_{j_1 j_2 \cdots j_n}([a; b))\}_{j_i = \overline{1, m},\, i = \overline{1, n}}; \\ I_{j_1 j_2 \cdots j_n}([a; b)) = I_{j_n}(I_{j_{n-1}}(\ldots I_{j_2}(I_{j_1}([a; b)))\ldots)). \end{gathered} \tag{16}$$

По определению $Y^1 = Y$. Значение n далее будем называть глубиной разбиения $\Im_Y^n([a;b))$. Как следует из определения $\Im_Y^n([a;b))$, всегда выполняются соотношения

$$I_{j_1 j_2 \ldots j_k}([a;b)) \subset I_{j_1 j_2 \ldots j_{k-1}}([a;b));$$

$$\Im_Y^n([a;b)) = \bigcup_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1} \in \{1, 2, \ldots, m\}^{n-1}} \Im_Y^n([a_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1}}; a_{j_1 j_2 \ldots (j_{n-1}+1)})). \tag{17}$$

Сформулируем и докажем ряд утверждений, касающихся свойств описанных выше разбиений.

Лемма 1 (о свойствах разбиения $\Im_Y^n([a;b))$). Пусть на интервале $[a;b)$ задано разбиение $\Im_Y^n([a;b)) = \{I_{j_1 j_2 \ldots j_n}([a;b))\}_{j=\overline{1,m}}$. Тогда

1) границы $a_{j_1 j_2 \ldots (j_n - 1)}$ и $a_{j_1 j_2 \ldots j_n}$ интервала $I_{j_1 j_2 \ldots j_n}([a;b)) = [a_{j_1 j_2 \ldots (j_n - 1)}; a_{j_1 j_2 \ldots j_n})$ вычисляются по следующим формулам:

$$a_{j_1 j_2 \ldots (j_n - 1)} = a + (b-a) \times$$

$$\times \Big(\sum_{i=1}^{j_1 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \omega_0^{-t_{j_1}} \sum_{i=1}^{j_2 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \ldots + \omega_0^{-t_{j_1}} \omega_0^{-t_{j_2}} \ldots \omega_0^{-t_{j_{n-1}}} \sum_{i=1}^{j_n - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} \Big),$$

$$a_{j_1 j_2 \ldots j_n} = a + (b-a) \Big(\sum_{i=1}^{j_1 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \omega_0^{-t_{j_1}} \sum_{i=1}^{j_2 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \ldots +$$

$$+ \omega_0^{-t_{j_1}} \omega_0^{-t_{j_2}} \ldots \omega_0^{-t_{j_{n-2}}} \sum_{i=1}^{j_{n-1} - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \omega_0^{-t_{j_1}} \omega_0^{-t_{j_2}} \ldots \omega_0^{-t_{j_{n-1}}} \sum_{i=1}^{j_n} \omega_0^{-t_{j_i}} \Big); \tag{18}$$

2) длина интервала $I_{j_1 j_2 \ldots j_n}([a;b))$ выражается как

$$|I_{j_1 j_2 \ldots j_n}([a;b))| = (b-a)\omega_0^{-\sum_{i=1}^{n} t_{j_i}}. \tag{19}$$

Доказательство проведём индукцией по n. База индукции: $n = 1$, $I_{j_1}([a,b)) = [a_{j_1 - 1}; a_{j_1})$, тогда по определению разбиения и согласно (14)–(16)

$$a_{j_1 - 1} = a + (b-a) \sum_{i=1}^{j_1 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}}, \quad a_{j_1} = a + (b-a) \sum_{i=1}^{j_1} \omega_0^{-t_{j_i}},$$

$$|I_{j_1}([a,b))| = a_{j_1} - a_{j_1 - 1} = (b-a)\omega_0^{-t_{j_1}}.$$

Допустим, что утверждение имеет место для $I_{j_1 j_2 \ldots j_n}([a;b)) = [a_{j_1 j_2 \ldots (j_n - 1)}; a_{j_1 j_2 \ldots j_n})$. По определению разбиения

$$I_{j_1 j_2 \ldots j_{n+1}}([a;b)) = I_{j_{n+1}}([a_{j_1 j_2 \ldots (j_n - 1)}; a_{j_1 j_2 \ldots j_n})) = [a_{j_1 j_2 \ldots (j_{n+1} - 1)}; a_{j_1 j_2 \ldots j_{n+1}})$$

и верны соотношения

$$a_{j_1 j_2 \cdots (j_{n+1}-1)} = a_{j_1 j_2 \cdots (j_n - 1)} + |I_{j_1 j_2 \ldots j_n}([a;b))| \sum_{i=1}^{j_{n+1}-1} \omega_0^{-t_{j_i}},$$

$$a_{j_1 j_2 \cdots j_{n+1}} = a_{j_1 j_2 \cdots (j_n - 1)} + |I_{j_1 j_2 \ldots j_n}([a;b))| \sum_{i=1}^{j_{n+1}} \omega_0^{-t_{j_i}}.$$

Откуда с учётом предположения индукции следует (18). Действительно,

$$a_{j_1 j_2 \cdots (j_{n+1}-1)} = a + (b-a)\Big(\sum_{i=1}^{j_1 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \omega_0^{-t_{j_1}} \sum_{i=1}^{j_2 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \ldots +$$

$$+ \omega_0^{-t_{j_1}} \omega_0^{-t_{j_2}} \ldots \omega_0^{-t_{j_{n-1}}} \sum_{i=1}^{j_n - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} \Big) + (b-a)\omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n} t_{j_i}} \sum_{i=1}^{j_{n+1}-1} \omega_0^{-t_{j_i}} =$$

$$= a + (b-a)\Big(\sum_{i=1}^{j_1 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \omega_0^{-t_{j_1}} \sum_{i=1}^{j_2 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \ldots + \omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_{j_i}} \sum_{i=1}^{j_n - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n} t_{j_i}} \sum_{i=1}^{j_{n+1}-1} \omega_0^{-t_{j_i}} \Big),$$

$$a_{j_1 j_2 \cdots j_{n+1}} = a + (b-a)\Big(\sum_{i=1}^{j_1 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \omega_0^{-t_{j_1}} \sum_{i=1}^{j_2 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \ldots +$$

$$+ \omega_0^{-t_{j_1}} \omega_0^{-t_{j_2}} \ldots \omega_0^{-t_{j_{n-1}}} \sum_{i=1}^{j_n - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} \Big) + (b-a)\omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n} t_{j_i}} \sum_{i=1}^{j_{n+1}} \omega_0^{-t_{j_i}} =$$

$$= a + (b-a)\Big(\sum_{i=1}^{j_1 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \omega_0^{-t_{j_1}} \sum_{i=1}^{j_2 - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \ldots + \omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_{j_i}} \sum_{i=1}^{j_n - 1} \omega_0^{-t_{j_i}} + \omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n} t_{j_i}} \sum_{i=1}^{j_{n+1}} \omega_0^{-t_{j_i}} \Big).$$

По определению разбиения $\Im_Y([a;b))$

$$|I_{j_1 j_2 \cdots j_{n+1}}([a;b))| = a_{j_1 j_2 \cdots j_{n+1}} - a_{j_1 j_2 \cdots (j_{n+1}-1)} = (b-a)\omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_{j_i}}.$$

Таким образом, получаем (19). Что и требовалось доказать.

Построение эффективных кодов. Пусть на X^N задан закон распределения вероятностей (1) $p(w_i) = p_i$, $p_i > 0$. Рассмотрим порождённое данным законом отношение нестрогого порядка, а именно положим $w_i \le w_{i'}$, если $p(w_i) \le p(w_{i'})$. Не уменьшая общности, можно считать, что $p_1 \ge \ldots \ge p_{i-1} \ge p_i \ge \ldots \ge p_{2^N} > 0$. В соответствие каждой последовательности $w_i = x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_N}$ поставим величину

$$\alpha(w_i) = \sum_{n=1}^{i-1} p(w_n),\ i = \overline{2, 2^N},\ \alpha(w_1) = 0. \tag{20}$$

Пусть задан некоторый закон распределения $p(w_i) = p_i$, $p_i > 0$, для источника Θ. Кодирование

$$\varphi_{\omega_0, p}(w_i) = y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_n} \tag{21}$$

— функция, которая ставит в соответствие кодовой последовательности $w_i = x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ $\ldots, x_{i_N}$ слово из букв кодового алфавита $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_n}$, где $j_1 j_2 \ldots j_n$ — набор индексов интервала $I_{j_1 j_2 \cdots j_n}([0;1)) \subset \Im_Y^n([0;1))$, удовлетворяющего следующим условиям:

$$1)\quad \alpha(w_i) \in I_{j_1 j_2 \cdots j_n}([0;1));$$

$$2)\quad \begin{cases} \alpha(w_{i-1}) \notin I_{j_1 j_2 \cdots j_n}([0;1)), \\ \alpha(w_{i+1}) \notin I_{j_1 j_2 \cdots j_n}([0;1)); \end{cases} \tag{22}$$

$$3)\quad \left[\begin{array}{l} \alpha(w_{i-1}) \in I_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}([0;1)), \\ \alpha(w_{i+1}) \in I_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}([0;1)) \end{array}\right.$$

(здесь $\alpha(w_i)$ — значения, определённые равенством (20)). Условия (22) гарантируют дешифруемость кодирования (21). Отметим, что условие $p_i > 0$ обеспечивает конечность процедуры кодирования. Поскольку смежные значения $\alpha(w_{i-1}) \ne \alpha(w_i)$, $i = \overline{1, n}$, то каким бы малым ни было различие между ними, существует n' такое, что для разбиения $\Im_Y^{n'}([0;1))$ значения $\alpha(w_{i-1})$ и $\alpha(w_i)$ окажутся в различных (не обязательно смежных) интервалах из $\Im_Y^{n'}([0;1))$.

Лемма 2. Для кодирования $\varphi_{\omega_0, p}$: $X^N \to Y^*$, где $\varphi_{\omega_0, p}(w_i) = y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_n}$, имеют место следующие неравенства:

$$|I_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}([0;1))| > p(w_i),$$

$$|I_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}([0;1))| \le \omega_0^{-t(\varphi_{\omega_0, p}(w_i)) + t^{**}}, \quad t^{**} = \max_{1 \le j \le m} \{t_j\}$$

(t^{**} — константа, зависящая от канала).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим произвольное сообщение w_i и соответствующее ему кодовое слово $\varphi(w_i)$. Для данного сообщения $\alpha_i \in I_{i_1 i_2 \ldots i_n}([0;1))$, тогда один или оба соседних элемента (α_{i-1} и α_{i+1}) принадлежат интервалу $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}([0;1))$. Следовательно, длина этого интервала больше, чем расстояние от α_i до ближайшего соседа α_{i-1} или α_{i+1}, так как по условию $p_{i-1} \ge p_i$:

$$|I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}([0;1))| > \min\{\alpha_i - \alpha_{i-1},\ \alpha_{i+1} - \alpha_i\} = \min\{p_{i-1},\ p_i\} = p_i.$$

2. Из леммы 1 $|I_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}([0;1))| = \omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_{j_i}}$. Произведя преобразования, получим

$$|I_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}}([0;1))| = \omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_{j_i}} = \omega_0^{-\sum\limits_{i=1}^{n-1} t_{j_i} - t_{j_n} + t_{j_n}} =$$

$$= \omega_0^{-t(\varphi(w_i)) + t_{j_n}} \le \omega_0^{-t(\varphi(w_i)) + t^{**}}, \quad t^{**} = \max_{1 \le i \le m} \{t_i\}.$$

Что и требовалось доказать.

Кодирование неизвестного источника без памяти. Рассмотрим неизвестный источник без памяти Θ, закон распределения которого $P_\Theta = \{p_\Theta(x_i) \,|\, x_i \in X\}$ неизвестен. Зададим на множестве X^N всех блоков $w_i \in X^N$ закон распределения

$$\bar{p}(w_i) = \bar{p}_i = \frac{\Gamma(k/2) \prod\limits_{i'=1}^{k} \Gamma(n_{i'} + 1/2)}{\pi^{k/2} \Gamma(N + k/2)}, \tag{23}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция; $n_{i'}$ — число вхождений буквы $x_{i'}$ в сообщение w_i.

Лемма 3 (оценка плотности энтропии источника). Для источника без памяти Θ с алфавитом $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, генерирующего последовательности $w_i = x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_N}$, верно неравенство

$$\log p_i \le \log \bar{p}_i - \log \left(\frac{k-1}{2e}\right)^{(k-1)/2} + \frac{1}{2} + \log \left(N + \frac{k-1}{2}\right)^{(k-1)/2}, \tag{24}$$

где p_i определяется равенством (1), а $\bar{p}_i$ — равенством (23).

Доказательство. Сравним значения p_i и $\bar{p}_i$. Переформулировав равенство (1), получим

$$p_i = \prod_{i'=1}^{k} p^{n_{i'}}(x_{i'}), \tag{25}$$

где $n_{i'}$ — число вхождений $x_{i'}$ в сообщение w_i; $p(x_{i'})$ — вероятность появления буквы $x_{i'} \in$ $\in X$. Максимальное значение функции (25) достигается при $p(x_{i'}) = n_{i'} \Big/ \sum\limits_{i'=1}^{k} n_{i'} = n_{i'}/N$ и имеет вид

$$\max_p \{p_i\} = \frac{n_1^{n_1} n_2^{n_2} \ldots n_k^{n_k}}{N^N}. \tag{26}$$

С учётом (23) и (26) получаем неравенство

$$\frac{\bar{p}_i}{p_i} \ge \frac{\bar{p}_i}{\max\limits_p \{p_i\}} = \frac{\Gamma(k/2) \prod\limits_{i'=1}^{k} \Gamma(n_{i'} + 1/2)}{\pi^{k/2} \Gamma(N + k/2)} \, \frac{N^N}{n_1^{n_1} n_2^{n_2} \ldots n_k^{n_k}}.$$

Логарифмируя и преобразовывая последнее неравенство, получим

$$\log\bar{p}_i \geq \log p_i - \frac{k}{2}\log\pi + \log\frac{N^N}{n_1^{n_1}n_2^{n_2}\dots n_k^{n_k}} + \log\Gamma\Big(\frac{k}{2}\Big) + \sum_{j=1}^{k}\log\Gamma\Big(n_j + \frac{1}{2}\Big) - \log\Gamma\Big(N + \frac{k}{2}\Big). \quad (27)$$

Применим к последним слагаемым в правой части (27) формулу Стирлинга $n! \approx (n/e)^n \times \times\sqrt{2\pi n}$ в виде

$$\log\Gamma(z) = \log\sqrt{2\pi} + (z - 1/2)\log(z - 1/2) - z\log e + \xi(z)\log e,$$

где $1/2 - 1/(2\log e) \leq \xi(z) \leq 1/2$:

$$\log\bar{p}_i \geq \log p_i + \frac{k}{2} + \log\Big(\frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2} - \log\frac{(N + (k-1)/2)^{N + (k-1)/2}}{N^N} -$$

$$-\log e^{k/2} + \Big(\xi\Big(\frac{k}{2}\Big) + \sum_{j=1}^{k}\xi\Big(n_j + \frac{1}{2}\Big) - \xi\Big(N + \frac{k}{2}\Big)\Big)\log e.$$

С учётом ограничений на величину $\xi(z)$ неравенство (27) принимает вид

$$\log\bar{p}_i \geq \log p_i + \log\Big(\frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2} - \log\Big(1 + \frac{k-1}{2N}\Big)^N - \log\Big(N + \frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2} - \frac{1}{2}.$$

В силу того что $\Big(1 + \frac{k-1}{2N}\Big)^N < e^{(k-1)/2}$ и, следовательно, $-\log\Big(1 + \frac{k-1}{2N}\Big)^N > > -\log e^{(k-1)/2}$, имеем

$$\log\bar{p}_i \geq \log p_i + \log\Big(\frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2} - \log e^{(k-1)/2} - \log\Big(N + \frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2} - \frac{1}{2}.$$

Из последнего неравенства следует (24). Что и требовалось доказать.

Из леммы 3 непосредственно вытекает следующая

Лемма 4 (оценка информационной дивергенции распределения источника и среднего распределения). Для источника без памяти с алфавитом $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, генерирующего последовательности $w_i = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_N}$, имеет место неравенство

$$D(p\,\|\,\bar{p}) \leq -\log\Big(\frac{k-1}{2e}\Big)^{(k-1)/2} + \frac{1}{2} + \log\Big(N + \frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2}. \quad (28)$$

Доказательство. По определению $D(p\,\|\,\bar{p}) = \sum_{i=1}^{k^N} p_i\log(p_i/\bar{p}_i)$. Тогда из леммы 3 следует, что

$$\log\frac{p_i}{\bar{p}_i} \leq -\log\Big(\frac{k-1}{2e}\Big)^{(k-1)/2} + \frac{1}{2} + \log\Big(N + \frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2},$$

$$\sum_{i=1}^{k^N} p_i\log\frac{p_i}{\bar{p}_i} \leq \sum_{i=1}^{k^N}\Big[p_i\Big(-\log\Big(\frac{k-1}{2e}\Big)^{(k-1)/2} + \frac{1}{2} + \log\Big(N + \frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2}\Big)\Big],$$

$$\sum_{i=1}^{k^N} p_i \log \frac{p_i}{\bar{p}_i} \le -\log \Big(\frac{k-1}{2e}\Big)^{(k-1)/2} \sum_{i=1}^{k^N} p_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k^N} p_i + \log \Big(N + \frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2} \sum_{i=1}^{k^N} p_i.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{k^N} p_i = 1$, с учётом определения дивергенции получаем (28). Что и требовалось доказать.

Верхняя оценка избыточности универсального кодирования множества источников без памяти.

Теорема 1. Для источника с неизвестной статистикой Θ, $\Theta \in \Omega_0$, существует равномерное по входу кодирование $\varphi_{\omega_0, p}$ в алфавит с неравнозначными длительностями кодовых символов, для избыточности которого имеет место оценка

$$R(N, \Theta, \varphi_{\omega_0,p}, \bar{t}) < \frac{T(k) + \frac{k-1}{2}\log\Big(N + \frac{k-1}{2}\Big)}{C(\bar{t})N} + \frac{t^{**}}{N}, \tag{29}$$

где N — длина входного блока; $C(\bar{t})$ — пропускная способность канала; $T(k)$ — константа, задаваемая алфавитом источника.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Закон распределения p для источника неизвестен. Рассмотрим среднее распределение $\bar{p}$ и кодирование $\varphi_{\omega_0,\bar{p}}$ источника Θ, определяемые равенствами (23) и (21) соответственно. Тогда из свойств разбиения $\Im_Y([0;1))$ и леммы 2 следует

$$\bar{p}_i = \bar{p}(w_i) < \omega_0^{-t(\varphi_{\omega_0,\bar{p}}(w_i)) + t^{**}}, \quad t^{**} = \max_{1 \le j \le m}\{t_j\}.$$

Логарифмируя данное неравенство, получим

$$\log_{\omega_0} \bar{p}_i < -\log_{\omega_0} \omega_0^{t(\varphi_{\omega_0,\bar{p}}(w_i)) - t^{**}}, \quad \text{или} \quad \frac{\log \bar{p}_i}{\log \omega_0} < -(t(\varphi_{\omega_0,\bar{p}}(w_i)) - t^{**}).$$

Умножая последнее неравенство на p_i и суммируя по i, имеем

$$\sum_{i=1}^{k^N} p_i \log \bar{p}_i < -\log\omega_0 \Big(\sum_{i=1}^{k^N} p_i t(\varphi_{\omega_0,\bar{p}}(w_i)) - \sum_{i=1}^{k^N} p_i t^{**}\Big).$$

Согласно (3) и (5) неравенство принимает вид

$$C(\bar{t})(\tilde{L}_{\varphi_{\omega_0,\bar{p}}} - t^{**}) < -\sum_{i=1}^{k^N} p_i \log \bar{p}_i.$$

Преобразуя правую часть и используя оценку плотности энтропии, имеем

$$C(\bar{t})(\tilde{L}_{\varphi_{\omega_0,p}} - t^{**}) < -\log\Big(\frac{k-1}{2e}\Big)^{(k-1)/2} + \frac{1}{2} + \log\Big(N + \frac{k-1}{2}\Big)^{(k-1)/2} + H(\Theta^N),$$

$$C(\bar{t})(\tilde{L} - t^{**}) < H(\Theta^N) + T(k) + \frac{k-1}{2}\log\Big(N + \frac{k-1}{2}\Big), \quad T(k) = \log\Big(\frac{k-1}{2e}\Big)^{(k-1)/2} - \frac{1}{2}.$$

С учётом равенства $H(\Theta^N) = NH(\Theta)$ [11] получаем неравенство (29). Что и требовалось доказать.

Нижняя оценка избыточности универсального кодирования множества источников без памяти. Пусть, как обычно, величина $R(N,\Theta,\varphi,\bar t)$, определяемая равенством (7), является избыточностью кодирования φ. Обозначим через $f(\Theta)$ заданное на Ω_0 распределение вероятностей

$$f(\Theta)=\frac{\Gamma(k/2)}{\pi^{k/2}}\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k}\sqrt{p_\Theta(x_i)}}. \tag{30}$$

Величину

$$\bar R(N,\Omega,\bar t)=\inf_{\varphi}\int\limits_{\Theta\in\Omega} f(\Theta)R(N,\Theta,\varphi,\bar t)d\Theta, \tag{31}$$

где $d\Theta=dp_\Theta(x_1)\dots dp_\Theta(x_k)$, $\int\limits_{\Omega_0}$ — k-мерный интеграл по множеству Ω_0, назовём средней избыточностью универсального кодирования множества источников Ω_0.

Теорема 2. Для средней избыточности $\bar R(N,\Omega,\bar t)$ универсального кодирования множества источников Ω_0 справедливо асимптотическое неравенство

$$\bar R(N,\Omega_0,\bar t)\gtrsim\frac{k-1}{2C(\bar t)}\frac{\log N}{N}. \tag{32}$$

Доказательство. Как следует из основной теоремы Шеннона, правая часть (31) достигает своего минимума при кодировании $\varphi_{1/2}(w)$, для которого

$$|\varphi_{1/2}(w)|=\log_{\omega_0}\bar p(w_i)=\frac{1}{C(\bar t)}\log_2\bar p(w_i),$$

отсюда и из (31) получаем

$$\bar R(N,\Omega_0,\bar t)\geq\frac{1}{C(\bar t)}\int\limits_{\Omega_0} f(\Theta)R(N,\Theta,\varphi,\bar t_1)d\Theta. \tag{33}$$

Из последнего неравенства и из [3, 9] следует $\bar R(N,\Omega_0,\bar t)\gtrsim\dfrac{k-1}{2C(\bar t)}\dfrac{\log N}{N}$. Что и требовалось доказать.

Асимптотика $\boldsymbol{R(N,\omega_0,t)}$. Сформулируем и докажем основное утверждение работы.

Теорема 3. Для избыточности $R(N,\Omega_0,\bar t)$ универсального кодирования множества источников без памяти Ω_0 буквами неравнозначного выходного алфавита справедливо асимптотическое равенство

$$R(N,\Omega_0,\bar t)\cong\frac{k-1}{2C(\bar t)}\frac{\log N}{N}. \tag{34}$$

Доказательство. Оценка сверху следует из теоремы 1. Действительно, из теоремы 1 и соотношений (6) и (7) имеем

$$R(N,\Theta,\varphi_{\omega_0,p},\bar t)\leq\frac{k-1}{2C(\bar t)}\frac{\log\left(N+\frac{k-1}{2}\right)+t^{**}+T(k)}{N}. \tag{35}$$

Неравенство (35) справедливо при любом законе распределения вероятностей p, величины t^{**} и $T(k)$ ограничены. Правая часть не зависит от закона распределения p, следовательно, из соотношения (35) получаем

$$\sup_{\Theta\in\Omega_0} R(N,\Theta,\varphi_{\omega_0,p},\bar{t}) \le \frac{k-1}{2C(\bar{t})}\,\frac{\log\left(N+\frac{k-1}{2}\right)+t^{**}+T(k)}{N}. \tag{36}$$

Так как по определению (8) $R(N,\Omega,\bar{t}) \le \sup\limits_{\Theta\in\Omega_0} R(N,\Theta,\varphi_{\omega_0,p},\bar{t})$, то из (36) следует верхняя оценка для $R(N,\Omega_0,\bar{t})$. Справедливость нижней оценки вытекает из определения (31), неравенства $R(N,\Omega_0,\bar{t}) \ge \bar{R}(N,\Omega_0,\bar{t})$ и теоремы 2. Что и требовалось доказать.

Заключение. В данной работе идея универсального кодирования обобщена на случай, когда оно осуществляется неравнозначными символами. Предложено универсальное кодирование блоков, порождённых неизвестным источником без памяти. Доказана его асимптотическая оптимальность. В частном случае равнозначности букв выходного алфавита получаются хорошо известные результаты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример построения кода. Рассмотрим источник сообщений с алфавитом $X = \{0,1\}$. Пусть длина сообщений источника $N=3$, а длительности кодовых символов $t(0)=1$, $t(1)=3$. В качестве закона распределения вероятностей на множестве бинарных последовательностей источника возьмём функцию $p(w_i) = 1/4C_3^k$ (где k — число единиц в слове $w_i = x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$). Упорядочим последовательности по убыванию их вероятности. Вычислим соответствующие каждому блоку значения $\alpha(w_i) = \sum\limits_{i'=1}^{i-1} p(w_{i'})$ (табл. 1).

Построим разбиение $\Im([0;1))$ согласно заданным длительностям кодовых символов.

Приближённое значение корня уравнения $\omega^{-1}+\omega^{-3}=1$ есть $\omega_0 = 1{,}47$. Определим длины и границы интервалов (табл. 2):

$$|I_0([0;1))| = \omega_0^{-1} \approx 1{,}47^{-1} \approx 0{,}68, \quad |I_1([0;1))| = \omega_0^{-3} \approx 1{,}47^{-3} \approx 0{,}32;$$

$$I_0([0;1)) \approx [0;0{,}68), \quad I_1([0;1)) \approx [0{,}68;1).$$

Таблица 1

i	w_i	$p(w_i)$	$\alpha(w_i)$
1	000	1/4	0
2	111	1/4	1/4
3	001	1/12	1/2
4	010	1/12	7/12
5	011	1/12	8/12
6	100	1/12	9/12
7	101	1/12	10/12
8	110	1/12	11/12

Таблица 2

i	$\alpha(w_i)$	$I_j([0;1))$
1	0	I_0
2	$1/4 = 0{,}25$	I_0
3	$1/2 = 0{,}5$	I_0
4	$7/12 = 0{,}5833$	I_0
5	$8/12 = 0{,}67$	I_0
6	$9/12 = 0{,}75$	I_1
7	$10/12 = 0{,}833$	I_1
8	$11/12 = 0{,}917$	I_1

Таблица 3

i	$\alpha(w_i)$	$I_{j_1j_2}([0;1))$
1	0	I_{00}
2	0,25	I_{00}
3	0,5	I_{01}
4	$7/12 = 0{,}5833$	I_{01}
5	$8/12 = 0{,}67$	I_{01}
6	0,75	I_{10}
7	$10/12 = 0{,}833$	I_{10}
8	$11/12 = 0{,}917$	I_{11}

Оба полученных интервала содержат несколько значений $\alpha(w_i)$, следовательно, условие 2 из (22) не выполняется при определении кодирования $\varphi_{\omega_0,p}$ и необходимо разбить каждый из полученных интервалов на более мелкие, т. е. найти разбиение интервала $[0;1)$, другими словами, разбиения $\Im(I_0[0;1))$ и $\Im(I_1[0;1))$ (табл. 3):

$$|I_{00}([0;1))| = \omega_0^{-2} \approx 0{,}46,$$

$$|I_{01}([0;1))| = |I_{10}([0;1))| = \omega_0^{-1}\omega_0^{-3} \approx 0{,}22, \quad |I_{11}([0;1))| = \omega_0^{-3}\omega_0^{-3} \approx 0{,}1;$$

$$I_{00}([0;1)) \approx [0;0{,}46), \quad I_{01}([0;1)) \approx [0{,}46;0{,}68), \quad I_{10}([0;1)) \approx [0{,}68;0{,}9), \quad I_{11}([0;1)) \approx [0{,}9;1).$$

В результате

$$\alpha(w_1), \alpha(w_2) \in I_{00}([0;1)), \quad \alpha(w_3), \alpha(w_4), \alpha(w_5) \in I_{01}([0;1)),$$

$$\alpha(w_6), \alpha(w_7) \in I_{10}([0;1)), \quad \alpha(w_8) \in I_{11}([0;1)).$$

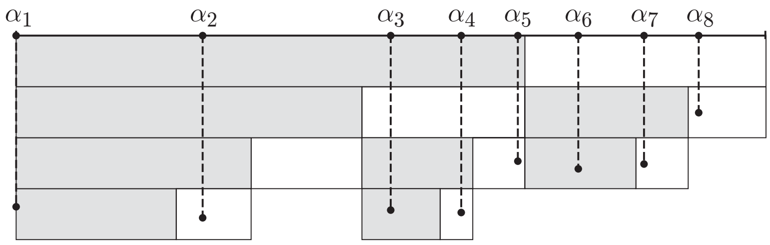
Это означает, что для последнего интервала $I_{11}([0;1))$ разбиение строить не требуется, условия (22) из определения кодирования выполняются для $\alpha(w_8)$ и, следовательно, найден код $\varphi_{\omega_0,p}(110) = 11$.

Таблица 4

i	$\alpha(w_i)$	$I_{j_1j_2j_3}([0;1))$
1	0	I_{000}
2	0,25	I_{000}
3	0,5	I_{010}
4	$7/12 = 0{,}5833$	I_{010}
5	$8/12 = 0{,}67$	I_{011}
6	0,75	I_{100}
7	$10/12 = 0{,}833$	I_{101}
8	$11/12 = 0{,}917$	I_{11}

Таблица 5

i	$\alpha(w_i)$	$I_{j_1j_2j_3j_4}([0;1))$
1	0	I_{0000}
2	0,25	I_{0001}
3	0,5	I_{0100}
4	$7/12 = 0{,}5833$	I_{0101}
5	$8/12 = 0{,}67$	—
6	0,75	—
7	$10/12 = 0{,}833$	—
8	$11/12 = 0{,}917$	—



Остальные интервалы необходимо разбить. В результате построения разбиений $\Im(I_{00}[0;1))$, $\Im(I_{01}[0;1))$ и $\Im(I_{10}[0;1))$ (табл. 4) получим:

$$|I_{000}([0;1))| = \omega_0^{-3} \approx 0{,}31, \quad |I_{001}([0;1))| = |I_{010}([0;1))| = |I_{100}([0;1))| = \omega_0^{-5} \approx 0{,}15,$$

$$|I_{011}([0;1))| = |I_{101}([0;1))| = \omega_0^{-7} \approx 0{,}07;$$

$$I_{000}([0;1)) \approx [0;0{,}31), \quad I_{001}([0;1)) \approx [0{,}31;0{,}46), \quad I_{010}([0;1)) \approx [0{,}46;0{,}61),$$

$$I_{011}([0;1)) \approx [0{,}61;0{,}68), \quad I_{100}([0;1)) \approx [0{,}68;0{,}83), \quad I_{101}([0;1)) \approx [0{,}83;0{,}9).$$

Проверим условия (22) в определении кодирования $\varphi_{\omega_0,p}$:

$$\alpha(w_1), \alpha(w_2) \in I_{000}([0;1)), \quad \alpha(w_3), \alpha(w_4) \in I_{010}([0;1)),$$

$$\alpha(w_5) \in I_{011}([0;1)), \quad \alpha(w_6) \in I_{100}([0;1)), \quad \alpha(w_7) \in I_{101}([0;1)).$$

Условия (22) из определения кодирования выполняются для $\alpha(w_5)$–$\alpha(w_7)$ и, значит, найдены кодовые последовательности $\varphi_{\omega_0,p}(011) = 011$, $\varphi_{\omega_0,p}(100) = 100$ и $\varphi_{\omega_0,p}(101) = 101$. Условие 2 из (22) ещё не выполняется для $\alpha(w_1)$, $\alpha(w_2)$, $\alpha(w_3)$ и $\alpha(w_4)$, следовательно, необходимо построить разбиения $\Im(I_{000}[0;1))$ и $\Im(I_{010}[0;1))$:

$$|I_{0000}([0;1))| = \omega_0^{-4} \approx 0{,}21,$$

$$|I_{0001}([0;1))| = |I_{0100}([0;1))| = \omega_0^{-6} \approx 0{,}1, \quad |I_{0101}([0;1))| = \omega_0^{-8} \approx 0{,}05;$$

Таблица 6

w_i	$\varphi(w_i)$
000	0000
001	0100
010	0101
011	011
100	100
101	101
110	11
111	0001

$$I_{0000}([0;1)) \approx [0;0{,}21), \quad I_{0001}([0;1)) \approx [0{,}21;0{,}31),$$

$$I_{0100}([0;1)) \approx [0{,}46;0{,}56), \quad I_{0101}([0;1)) \approx [0{,}56;0{,}61),$$

$$I_{100}([0;1)) \approx [0{,}68;0{,}83), \quad I_{101}([0;1)) \approx [0{,}83;0{,}9).$$

На данном этапе условия (22) из определения кодирования выполняются для всех рассматриваемых значений $\alpha(w_i)$ и, значит, найдены кодовые последовательности $\varphi_{\omega_0,p}(000) = 0000$, $\varphi_{\omega_0,p}(111) = 0001$, $\varphi_{\omega_0,p}(001) = 0100$ и $\varphi_{\omega_0,p}(010) = 0101$ (табл. 5).

Более наглядно разбиение проиллюстрировано на рисунке (серым цветом выделены участки, пропорциональные по длине интервалу $|I_0| = \omega_0^{-1}$ и соответствующие кодовому символу «0», а белым цветом — участки, пропорциональные по длине интервалу $|I_1| = \omega_0^{-3}$ и соответствующие кодовому символу «1»), там же отмечены значения $\alpha_i = \alpha(w_i)$.

Кодовые слова для сообщений приведены в табл. 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шеннон К.** Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1969. С. 243–332.
2. **Кричевский Р. Е.** Связь между избыточностью кодирования и достоверностью сведений об источнике // Проблемы передачи информации. 1968. **4**, № 3. С. 48–57.
3. **Фано Р.** Передача информации. Статистическая теория связи. М.: Мир, 1965. 440 с.
4. **Галлагер Р. Г.** Теория информации и надежная связь. М.: Сов. радио, 1974. 720 с.
5. **Кричевский Р. Е.** Длина блока, необходимая для получения заданной избыточности // ДАН СССР. 1996. **171**, № 1. С. 37–40.
6. **Колмогоров А. Н.** Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. 1966. **1**, № 1. С. 3–11.
7. **Фитингоф Б. М.** Оптимальное кодирование при неизвестной и меняющейся статистике сообщений // Проблемы передачи информации. 1966. **2**, № 2. С. 3–11.
8. **Krichevsky R. E., Trofimov V. K.** The performance of universal encoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1981. **27**, N 2. P. 199–207.
9. **Verdu S.** Fifty years of Shannon theory // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. **44**, N 6. P. 2057–2078.
10. **Чисар И.** О каналах без шума // Проблемы передачи информации. 1970. **6**, № 4. С. 3–15.
11. **Katona G.** General Theory of Noiseless Channels. CISM, Udine, Italy. Ser. Courses and Lectures. 1970. N 31. 69 p.

Поступила в редакцию 21 июля 2011 г.