

УДК 519.2

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ С ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Ю. Е. Воскобойников¹, А. В. Гочаков^{1, 2}

¹ Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет»,
630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

E-mail: voscob@mail.ru

² Государственное учреждение «Сибирский региональный научно-исследовательский
гидрометеорологический институт»,
630099, г. Новосибирск, ул. Советская, 30

Рассматривается класс алгоритмов вейвлет-фильтрации с двухпараметрическими пороговыми функциями. Для решения проблемы выбора двух пороговых величин предлагается алгоритм, позволяющий с приемлемой точностью оценить их оптимальные значения.

Ключевые слова: вейвлет-фильтрация, пороговые функции, оптимальная пороговая величина.

Введение. Последние десятилетия для фильтрации сигналов широко используется их разложение в базисе вейвлет-функций. В этом случае фильтрация включает три этапа:

- вычисление прямого дискретного вейвлет-преобразования (нахождение коэффициентов разложения по зашумлённым значениям дискретного сигнала);
- обработка «зашумлённых» коэффициентов разложения;
- вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования (нахождение «сглаженных» значений дискретной функции).

Совокупность этих трёх этапов будем называть вейвлет-фильтрацией, она относится к алгоритмам фильтрации в частотной области (обработке подвергаются коэффициенты разложения сигнала по некоторой системе базисных функций). Примерами таких алгоритмов являются также алгоритмы фурье-фильтрации.

Очевидно, что качество фильтрации зашумлённого сигнала определяется алгоритмами обработки второго этапа. Большинство используемых алгоритмов носит пороговый характер: коэффициент разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае коэффициент сохраняется или подвергается линейному преобразованию. Распространение на практике получили «жёсткая» и «мягкая» пороговые функции, зависящие только от одного параметра — величины порога. При этом выбор пороговой величины существенно влияет на ошибку фильтрации, и эта величина, по сути, является управляющим параметром алгоритма вейвлет-фильтрации.

В литературе рассмотрены несколько алгоритмов выбора пороговой величины. Некоторые из них позволяют с приемлемой точностью оценить оптимальное значение порога, минимизирующего среднеквадратическую ошибку (СКО) фильтрации (алгоритмы SURE [1], байесовский [2] и на основе критерия оптимальности [3]).

Названные однопараметрические пороговые функции имеют известные недостатки (обсуждаемые далее). В значительной степени они преодолеваются при использовании двухпараметрических пороговых функций, зависящих уже от двух параметров. Однако отсутствие в литературе аргументированных и приемлемых (по точности фильтрации) алгоритмов выбора этих параметров объясняет их слабое практическое применение.

Задачи данной работы — обобщение алгоритма выбора одного параметра на основе критерия оптимальности [3] на случай пороговой функции с двумя параметрами, построение алгоритма оценивания двух параметров из условия минимума СКО фильтрации и исследование эффективности построенного алгоритма.

Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации. Приведём основные понятия и определения, необходимые для изложения результатов работы.

Многомасштабное представление функции $f(t)$ в базисе вейвлет-функции имеет вид [4, 5]

$$\hat{f}(t) = \sum_k a_{j_0+J,k} \varphi_{J,k}(t) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (1)$$

Функции $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ называют масштабирующими (или отцовскими), а функции $\{\psi_{j,k}(t)\}$ — вейвлет-функциями (или материнскими). Аппроксимирующие $a_{j,k}$ и детализирующие $d_{j,k}$ коэффициенты разложения находятся из выражений

$$a_{j,k} = \int_R f(t) \varphi_{j,k}(t) dt; \quad d_{j,k} = \int_R f(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad (2)$$

где R — интервал определения функции $f(t)$. Переменная j характеризует уровень разложения, и её часто называют коэффициентом масштаба, а переменная k — временной сдвиг той или иной базисной функции. Системы функций $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ составляют ортогональные базисы пространств V_j, W_j , $-\infty < j < \infty$, и задаются соотношениями [6, 7]

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k), \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k),$$

где функции $\{\varphi(t-k)\}$, $\{\psi(t-k)\}$ — ортогональные базисы нулевых пространств V_0, W_0 . При этом пространство W_j ортогонально пространству V_j и $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$. Чем меньше номер j , тем более мелкие структуры исходной функции $f(t)$ могут быть представлены в базисах $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ и тем ближе реконструированный сигнал $\hat{f}(t)$ к исходному.

Теоретической основой пороговых алгоритмов является следующая предпосылка: уровень ошибок вычисления коэффициентов разложения сравнительно мал в отличие от коэффициентов разложения точного сигнала, что позволяет распознать две ситуации: шумовой коэффициент (обусловлен шумом измерения) и информативный коэффициент (в основном определяется значениями точного сигнала). Таким образом, для успешной фильтрации необходимо обратить в 0 шумовые коэффициенты, сохранив при этом информативные коэффициенты разложения.

На практике используются жёсткая и мягкая пороговые функции:

$$\text{hard}(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda, \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{soft}(\tilde{d}, \lambda) = \text{sign}(\tilde{d})[|\tilde{d}| - \lambda]_+, \quad (4)$$

где обозначение $[z]_+$ определяется как

$$[z]_+ = \begin{cases} z, & \text{если } z \geq 0, \\ 0, & \text{если } z < 0; \end{cases}$$

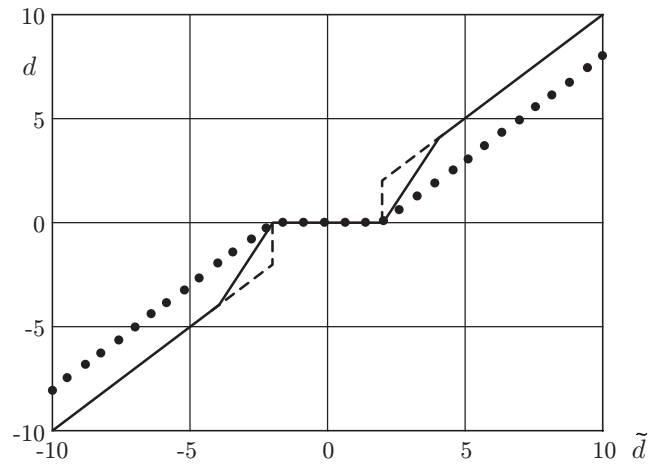


Рис. 1

λ — величина порога; d — обрабатываемый коэффициент разложения. Графики функций приведены на рис. 1 (штриховая кривая — функция (3), точечная — функция (4)).

Отметим следующие особенности этих функций:

1) из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину λ в функции soft возможно сглаживание (размытие) контрастных элементов обрабатываемого сигнала, особенно при больших λ ;

2) отсутствие в функции soft разрыва в окрестности точки λ в определённой степени предотвращает появление осцилляций (эффекта Гиббса) в особых точках сигнала, которые могут появиться при использовании пороговой функции hard.

Для преодоления этих недостатков функций (3), (4) были предложены [8] двухпараметрические функции, среди которых наиболее часто упоминается пороговая функция (обозначим её mix) вида

$$\text{mix}(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda_1, \\ \text{sign}(\tilde{d}) \frac{\lambda_2(|\tilde{d}| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \text{если } \lambda_1 < |\tilde{d}| \leq \lambda_2, \\ \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda_2, \end{cases} \quad (5)$$

включающая две пороговые величины. График этой функции приведён на рис. 1 (сплошная линия).

Пороги λ_1 , λ_2 , так же как и величина λ функций (3), (4), играют роль управляющих параметров, влияющих на ошибку фильтрации. При заниженных значениях λ_1 , λ_2 часть шумовых коэффициентов разложения не зануляется и результат обратного вейвлет-преобразования (отфильтрованная функция) может содержать значительный остаточный шум, т. е. функция не достаточно сглажена. При завышенных порогах λ_1 , λ_2 зануляются информативные коэффициенты и результат фильтрации оказывается переглаженным.

Для однопараметрических пороговых функций предложено несколько алгоритмов выбора величины λ . В работе [3] проведено сравнение некоторых из этих алгоритмов. Показано, что алгоритм, построенный на основе критерия оптимальности (используемого для выбора параметра регуляризации [9–11]), позволяет достаточно точно оценить оптималь-

ное значение порога λ_{opt} , при котором СКО фильтрации минимальна. Для одномерного дискретного сигнала СКО фильтрации определим функционалом

$$\Delta(\lambda) = M \left[\|\hat{f}_\lambda - f\|^2 \right], \quad (6)$$

где $M[\cdot]$ — оператор математического ожидания по плотности распределения шума; f , \hat{f}_λ — векторы, проекции которых равны значениям точного и сглаженного сигналов соответственно.

Для двухпараметрических пороговых функций в литературе отсутствуют алгоритмы выбора порогов λ_1 , λ_2 , позволяющие с приемлемой точностью оценить оптимальные пороги $\lambda_{\text{opt}1}$, $\lambda_{\text{opt}2}$, которые минимизируют СКО (6). При решении задачи оценивания λ_{opt} далее используется критерий оптимальности.

Оценивание пороговых величин на основе критерия оптимальности. Предположим, что:

— вместо точных значений f_i дискретной функции даны (известны) зашумлённые значения

$$\tilde{f}_i = f_i + \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

где шум измерения η_i имеет нулевое среднее $M[\eta_i] = 0$, дисперсию σ^2 и значения η_i , η_j не коррелированы при $i \neq j$;

— базисные функции $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ являются ортонормированными, что соответствует ортогональным вейвлетам (вейвлеты Добеши, Симлета, Кайфлета [12]);

— вычисление коэффициентов разложения по зашумлённым значениям \tilde{f}_i осуществляется алгоритмом Малла [5, 13], и результатом является набор следующих коэффициентов:

$$\{\tilde{d}_{j_0+1,k}\}, \{\tilde{d}_{j_0+2,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{j_0+J,k}\}, \{\tilde{a}_{j_0+J,k}\};$$

— относительный уровень ошибки вычисления аппроксимирующих коэффициентов $\{\tilde{a}_{j_0+J,k}\}$ существенно (на порядок и более) меньше уровней ошибок детализирующих коэффициентов [14], и поэтому пороговой обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты уровней $j_0 + 1$, $j_0 + 2$, \dots , $j_0 + J_{\text{fl}}$, где $J_{\text{fl}} \leq J$.

При сделанных предположениях случайные ошибки $\varepsilon_{j,k}^a$, $\varepsilon_{j,k}^d$ вычисления коэффициентов разложения

$$\tilde{d}_{j,k} = d_{j,k} + \varepsilon_{j,k}^d; \quad \tilde{a}_{j,k} = a_{j,k} + \varepsilon_{j,k}^a \quad (8)$$

имеют нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 и не коррелированы между собой [14], т. е.

$$M[\varepsilon_{j,k}^d] = 0; \quad M[\varepsilon_{j,k}^a] = 0; \quad D[\varepsilon_{j,k}^d] = \sigma^2; \quad D[\varepsilon_{j,k}^a] = \sigma^2. \quad (9)$$

Критерий оптимальности предложен в работе [9] и широко используется для выбора параметра регуляризации линейных регуляризирующих алгоритмов решения некорректных задач (например, [10, 11]). Алгоритмы, построенные на основе этого критерия, позволяют оценить (с хорошей точностью) оптимальный параметр регуляризации, не используя при этом количественной информации об искомом решении задачи.

В работе [3] данный критерий был использован для оценивания оптимального порога однопараметрических функций, который на каждом уровне j разложения задавался выражением

$$\lambda_j(\beta) = \beta \sqrt{2 \ln(N_j)} = \beta c_j. \quad (10)$$

Здесь N_j — количество обрабатываемых коэффициентов уровня j . Сомножитель $c_j = \sqrt{2 \ln(N_j)}$ делает порог уровневнезависимым и обеспечивает асимптотическую оптимальность по порядку при $N_j \rightarrow \infty$. Для нахождения оценки величины β_{opt} (которая минимизирует СКО фильтрации среди всех пороговых величин вида (10)) вводился критерий

$$\rho_W(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N e_{\beta i} \tilde{f}_i, \quad (11)$$

где $e_{\beta i}$ — проекции вектора невязки: $e_{\beta} = \tilde{f} - \hat{f}_{\beta}$. В качестве оценки для β_{opt} принимается величина β_W , для которой выполняется неравенство

$$\vartheta_{m, \gamma/2} \leq \rho_W(\beta_W) \leq \vartheta_{m, 1-\gamma/2}, \quad (12)$$

где $\vartheta_{m, \gamma/2}$, $\vartheta_{m, 1-\gamma/2}$ — квантили χ_m^2 -распределения с m степенями свободы уровней $\gamma/2$, $1-\gamma/2$ соответственно; γ — вероятность ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности параметра сглаживания (обычно $\gamma = 0,05$); $m = N$ — число значений фильтруемого сигнала (проекции вектора \tilde{f}). Для вычисления β_W используется любая итерационная процедура решения нелинейного уравнения:

$$\rho_W(\beta_W) = m, \quad (13)$$

которая завершается, как только очередное приближение $\beta^{(n)}$ удовлетворяет условию (12), и β_W определяется этим значением $\beta^{(n)}$.

Если число степеней свободы $m > 30$, то χ_m^2 -распределение хорошо аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием m и дисперсией $2m$. Тогда, приняв вероятность ошибки первого рода $\gamma = 0,05$, получаем формулы для вычисления квантилей, входящих в неравенство (12):

$$\vartheta_{m, 0,025} = m - 1,96\sqrt{2m}, \quad \vartheta_{m, 0,975} = m + 1,96\sqrt{2m}.$$

Перейдём к оцениванию оптимальных порогов функции (5). По аналогии с порогом (10) представим λ_1 , λ_2 в виде

$$\lambda_1(\beta) = \beta \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (14)$$

$$\lambda_2(\beta, C) = \beta C \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (15)$$

где множитель $C > 1$ следует из неравенства $\lambda_2 > \lambda_1$ для функции (10). Таким образом, требуется построить оценки β_W , C_W для оптимальных значений β_{opt} , C_{opt} , при которых СКО фильтрации минимальна. Введём критерий

$$\rho_W(\beta, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N e_{(\beta, C)i} \tilde{f}_i, \quad (16)$$

где $e_{(\beta, C)i}$ — проекции вектора невязки: $e_{(\beta, C)} = \tilde{f} - \hat{f}_{(\beta, C)}$, $\hat{f}_{(\beta, C)}$ — вектор сглаженных значений, вычисленных с использованием порогов (14), (15). В качестве оценок β_W ,

C_W для соответствующих оптимальных порогов примем такие значения β , C , которые удовлетворяют неравенству

$$\vartheta_{m,\gamma/2} \leq \rho_W(\beta_W, C_W) \leq \vartheta_{m,1-\gamma/2}. \quad (17)$$

Для вычисления значений β_W , C_W вместо решения нелинейного уравнения

$$\rho_W(\beta_W, C_W) = m,$$

включающего две неизвестные величины β , C , рассмотрим задачу минимизации функционала

$$F(\beta, C) = |\rho_W(\beta, C) - m|^2. \quad (18)$$

Заметим, что решение этой задачи всегда существует, и для его нахождения можно применять известные процедуры минимизации. В качестве β_W , C_W принимается такой элемент $\{\beta^{(n)}, C^{(n)}\}$ минимизирующей последовательности, для которого выполняется неравенство (17).

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлетов критерий $\rho_W(\beta, C)$ вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложения:

$$\rho_W(\beta, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - \text{mix}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_1(\beta), \lambda_2(\beta, C))). \quad (19)$$

Это позволяет находить значения критерия (при реализации процедуры минимизации) в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения, а затем (при найденных β_W , C_W и вычисленных оценках $\hat{d}_{j,k}$) только 1 раз выполнить обратное вейвлет-преобразование и получить сглаженные значения функции.

Отметим некоторые свойства $\rho_W(\beta, C)$, следующие из (19):

- все слагаемые, входящие в (19), не отрицательны (могут изменяться от 0 до $\tilde{d}_{j,k}^2$), поэтому $\rho_W(\beta, C) \geq 0$;
- при $\beta \rightarrow 0$ и $C < \infty$ справедлив предел $\rho_W(\beta, C) \rightarrow 0$;
- при $\beta \rightarrow \infty$ и $C < \infty$ справедлив предел

$$\rho_W(\beta, C) \rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\tilde{f}\|^2.$$

Последнее равенство имеет место для ортогональных вейвлетов при соответствующей нормировке базисных функций. Два последних свойства обуславливают следующее

Утверждение. Если выполняется неравенство

$$\rho_W(\infty, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i^2 > \vartheta_{m,1-\gamma/2}, \quad (20)$$

то существуют конечные значения β_W , C_W , для которых выполняется неравенство (17).

Невыполнение условия (20) означает, что значения $\tilde{f}_i = \eta_i$, т. е. $f_i \equiv 0$. В этом случае $\beta_W = \infty$ и сглаженные значения равны 0.

Заметим, что изложенный алгоритм построения оценок β_W , C_W легко обобщается для вейвлет-фильтрации изображений. В этом случае число степеней свободы m определяется как $m = N_x \times N_y$, где N_x, N_y — размеры фильтруемого изображения.

Существенной чертой приведённого алгоритма вычисления β_W, C_W является использование дисперсии шума σ^2 . На практике, как правило, эта величина не известна, а значит, можно применить оценку

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)}{0,6745}, \quad (21)$$

где оператор $\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)$ определяет медиану абсолютных величин детализирующих коэффициентов уровня разложения $j_0 + 1$ (объём выборки равен $N/2$). Данная оценка широко используется в робастных алгоритмах регрессионного анализа. Применительно к алгоритмам вейвлет-фильтрации эта оценка исследовалась в [14], где была показана приемлемая точность оценки (21). Так, для заданной дисперсии $\sigma^2 = 0,91 \cdot 10^{-1}$ значения (21), вычисленные по 30 реализациям длиной $N/2 = 1024$, находились в интервале $[0,88 \cdot 10^{-1}, 0,97 \cdot 10^{-1}]$.

Численные исследования двухпараметрического порогового алгоритма.

Приведём некоторые результаты вычислительного эксперимента по исследованию оптимальности построенных оценок β_W, C_W .

В качестве тестовых сигналов были взяты две дискретные функции, значения которых приведены на рис. 2, a, b (назовём их функциями 1 и 2 соответственно). Количество значений $N = 2048$. Выбор этих функций обусловлен присутствием в их спектре высококачественных составляющих, что существенно затрудняет фильтрацию шума.

Значения f_i указанных функций искажались аддитивным шумом η_i , который моделировался псевдослучайными числами, имеющими нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Дисперсия вычислялась по задаваемому относительному уровню шума $\delta_\eta = \|\tilde{f} - f\|/\|f\|$, $\delta_\eta = 0,05, 0,10, 0,15$. Зашумлённые значения функций 1, 2 при $\delta_f = 0,10$ представлены на рис. 3, a, b . В качестве критерия точности фильтрации была принята относительная ошибка

$$\delta_f(\beta, C) = \frac{\|\hat{f}(\beta, C) - f\|}{\|f\|}. \quad (22)$$

Изолинии функционала $\delta_f(\beta, C)$, значения которого были вычислены для функции 1 при $\delta_\eta = 0,10$, показаны на рис. 4. Из рисунка видно, что ошибка фильтрации сильно зависит от β и значительно слабее от параметра C .

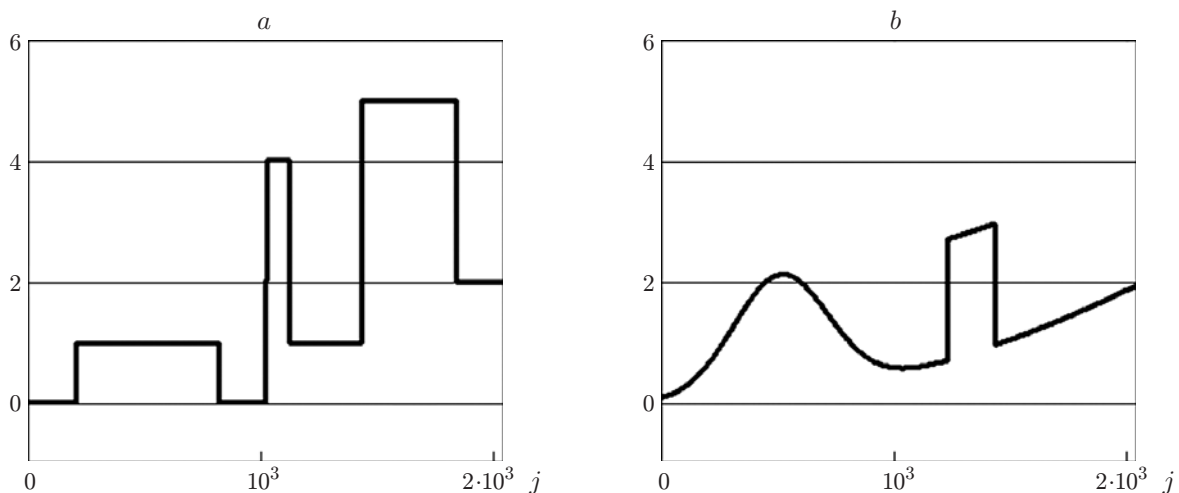


Рис. 2

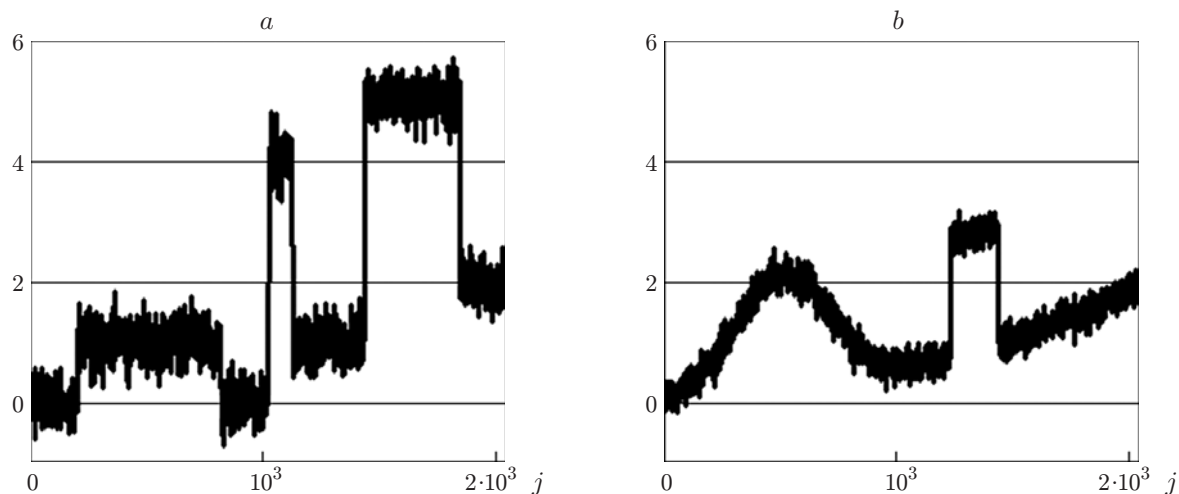


Рис. 3

Остановимся на очень важном вопросе: насколько точно β_W, C_W оценивают оптимальные значения параметров $\beta_{\text{opt}}, C_{\text{opt}}$, или насколько увеличивается ошибка фильтрации при параметрах β_W, C_W по сравнению с минимально возможной ошибкой фильтрации. Для ответа на этот вопрос был выполнен обширный вычислительный эксперимент, результаты которого для функции 2 при $\delta_\eta = 0,10$ приведены в табл. 1. Выделенные полужирным шрифтом значения соответствуют парам (β, C) , для которых выполняется неравенство (17), т. е. эти пары значений могут быть приняты в качестве пар (β_W, C_W) .

Анализ таблицы показывает:

— сильную зависимость ошибки фильтрации от параметра β и слабую зависимость от параметра C (эта закономерность также проявилась в расположении изолиний на рис. 3);

— все выделенные значения соответствуют либо минимальной ошибке фильтрации, либо незначительному её увеличению (не более чем на 10 %).

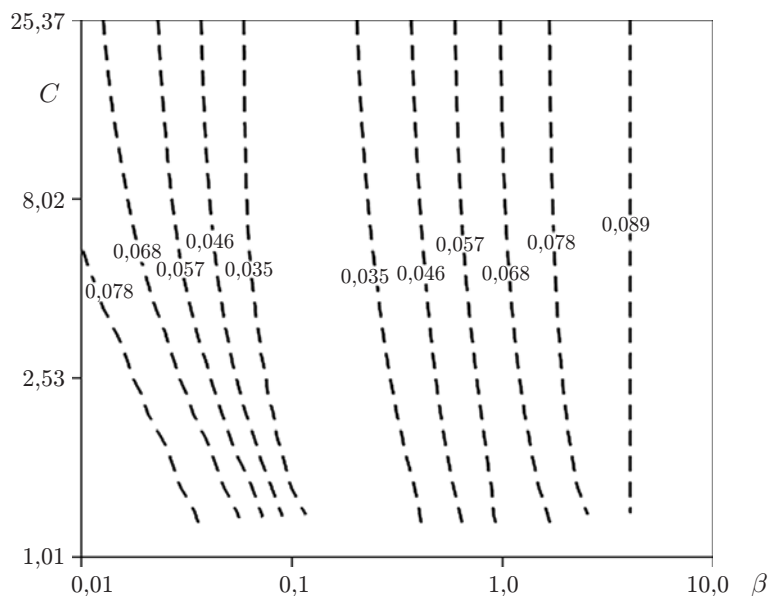


Рис. 4

Таблица 1

C	β						
	0,032	0,046	0,068	0,100	0,147	0,215	0,316
1,010	0,081	0,071	0,053	0,030	0,025	0,033	0,043
1,272	0,077	0,065	0,042	0,025	0,027	0,034	0,046
1,601	0,074	0,058	0,034	0,024	0,028	0,360	0,048
2,015	0,069	0,051	0,030	0,024	0,030	0,038	0,050
2,537	0,063	0,044	0,028	0,025	0,031	0,040	0,052
3,194	0,058	0,040	0,027	0,026	0,032	0,041	0,053
4,021	0,054	0,038	0,026	0,026	0,033	0,042	0,054
5,062	0,051	0,036	0,026	0,027	0,034	0,043	0,055
6,373	0,049	0,035	0,027	0,028	0,035	0,044	0,056
8,023	0,048	0,035	0,027	0,029	0,036	0,045	0,056
10,100	0,047	0,034	0,027	0,030	0,036	0,046	0,057
12,715	0,046	0,034	0,027	0,031	0,037	0,046	0,057

Аналогичные выводы можно сделать по данным, полученным при других условиях шума ($\delta_\eta = 0,05, 0,15$), а также для функции 1.

Заметим, что минимальная относительная ошибка фильтрации, найденная при использовании однопараметрической функции soft (4), была на 15–25 % больше минимальной ошибки фильтрации, вычисленной с помощью двухпараметрической функции. Это весомый аргумент в пользу двухпараметрических пороговых функций.

Величина относительной ошибки $\delta_f(\beta, C)$ является случайной (в силу статистической природы шума измерения η_i). Поэтому для определения неслучайных характеристик точности был проведён следующий вычислительный эксперимент.

Найдём коэффициент эффективности параметров (β_W, C_W) по формуле

$$E = \frac{\delta_{\min}}{\delta_f(\beta_W, C_W)}. \quad (23)$$

Очевидно, что чем больше E отклоняется от 1 к 0, тем больше проигрыш по точности алгоритма фильтрации с параметрами (β_W, C_W) по сравнению с минимально возможной ошибкой δ_{\min} (параметры $(\beta_{\text{opt}}, C_{\text{opt}})$).

Для вычисления оценок числовых характеристик и построения гистограммы случайной величины E генерировались случайные векторы

$$\tilde{f}^{(l)} = f + \eta^{(l)}, \quad l = 1, \dots, N_S,$$

где $\eta^{(l)}$ — l -я реализация случайного вектора $\eta = |\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N|^T$. Каждый вектор $\tilde{f}^{(l)}$ фильтровался алгоритмом вейвлет-фильтрации с параметрами (β_W, C_W) , вычислялось значение $E^{(l)}$. По выборочной совокупности $\{E^{(l)}\}$ находились среднее \bar{E} , минимальное E_{\min} , максимальное E_{\max} значения и строилась гистограмма. Объём выборки $N_S = 50$. Характеристики коэффициента эффективности для разных уровней шума и разных функций даны в табл. 2. Анализ средних значений \bar{E} показывает, что отклонение коэффициента эффективности параметров (β_W, C_W) от 1 в среднем не превосходит 8 %, что свидетельствует о приемлемой точности оценивания параметров $(\beta_{\text{opt}}, C_{\text{opt}})$. Этот вывод также подтверждает анализ гистограммы величины E , приведённой на рис. 5, где $\omega_k = n_k/N$ —

Таблица 2

δ_η	Функция 1			Функция 2		
	E_{\min}	\bar{E}	E_{\max}	E_{\min}	\bar{E}	E_{\max}
0,01	0,823	0,937	1	0,782	0,918	1
0,05	0,852	0,958	1	0,806	0,927	1
0,10	0,915	0,976	1	0,811	0,931	1
0,15	0,883	0,968	1	0,804	0,929	1

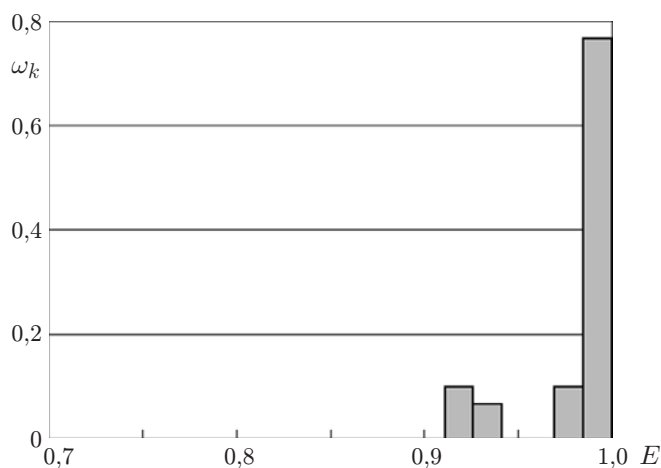


Рис. 5

относительная частота, n_k — число значений случайной величины E , попавших в k -й интервал гистограммы. Величина E вычислялась для функции 1 при $\delta_\eta = 0,1$. Видно, что значения E в основном сосредоточены в окрестности точки $\bar{E} = 0,975$ и имеют небольшие отклонения от этой точки.

Заключение. Результаты численных исследований представленного в данной работе способа выбора порогов свидетельствуют о приемлемой точности оценок β_W , C_W оптимальных порогов и позволяют рекомендовать использовать величины β_W , C_W в качестве порогов в алгоритмах вейвлет-фильтрации с двухпараметрическими пороговыми функциями. Предложенный подход легко обобщается на алгоритмы вейвлет-фильтрации изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zhang X.-P., Desai M. D.** Adaptive denoising based on SURE risk // IEEE Signal Process. Lett. 1998. **5**, N 10. P. 265–267.
2. **Abramovitch F., Sapatinas T., Silverman B. W.** Wavelet thresholding via a Bayesian approach // Journ. Royal Statist. Soc. Ser. B. 1998. **60**, N 4. P. 725–749.
3. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В.** Оценивание оптимальных пороговых величин в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений // Автометрия. 2011. **47**, № 2. С. 3–14.
4. **Новиков Л. В.** Основы вейвлет-анализа сигналов. С.-Пб.: Изд-во ООО «Модус+», 1999. 262 с.
5. **Mallat S.** Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans. AMS. 1989. **315**, N 1. P. 69–87.

6. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2002. 412 с.
7. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. М.: РХД, 2001. 186 с.
8. **Fodor I. K., Kamath C.** Denoising through wavelet shrinkage: An empirical study // SPIE Journ. Electron. Imaging. 2003. **12**, N 1. P. 151–160.
9. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующих алгоритмов восстановления изображений // Автометрия. 1995. № 3. С. 68–78.
10. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. 186 с.
URL: <http://old.sibstrin.ru/prikl/monogr07.html> (дата обращения: 29.06.2011).
11. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), НГАСУ. 2007. 184 с.
URL: <http://old.sibstrin.ru/prikl/obrat07.html> (дата обращения: 29.06.2011).
12. **Daubechies I.** Orthogonal bases of compactly supported wavelets // Commun. Pure Appl. Math. 1988. **41**, N 3. P. 34–45.
13. **Mallat S.** A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1989. **11**, N 9. P. 674–693.
14. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В.** Квазиоптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложений при фильтрации сигналов // Автометрия. 2010. **46**, № 1. С. 34–45.

Поступила в редакцию 29 июня 2011 г.
