УДК 519.872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ КРАТНЫХ ЗАЯВОК С ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ*

С. П. Моисеева, И. А. Захорольная

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет»,
634050, г. Томск, просп. Ленина, 36
E-mail: izax@mail2000.ru

Построена модель параллельного обслуживания заявок в системе массового обслуживания, состоящей из двух блоков с неограниченным числом обслуживающих приборов в каждом, с возможностью повторного обслуживания заявок в блоках. Найдено аналитическое выражение для производящей функции многомерного распределения вероятностей состояний случайного вектора, характеризующего число заявок в каждом блоке и число повторных обращений к каждому из них в нестационарном режиме.

Ключевые слова: немарковские системы с неограниченным числом обслуживающих приборов, пуассоновский поток кратных заявок, повторное обслуживание заявок.

Введение. На современном этапе развития теории массового обслуживания одним из востребованных направлений является исследование систем массового обслуживания (СМО) с групповым поступлением заявок и параллельным обслуживанием. Область применения таких СМО довольно обширна, например при моделировании современных информационно-вычислительных систем (необходимо учитывать пакетный характер трафика), при проектировании современных компьютерных сетей (один из основных принципов — параллельность процессов обработки информации) [1–5]. Поэтому требуются новые математические модели систем массового обслуживания, а именно системы с вариантами обслуживания заявок неординарных входящих потоков, в том числе с двумя и более блоками обслуживания.

Исследованию однолинейных СМО с неординарным входящим потоком (пуассоновским или рекуррентным) посвящены работы [6–10]. В [11] рассматриваются системы массового обслуживания с марковским неординарным входящим потоком с несколькими типами заявок, обобщённой дисциплиной преимущественного разделения прибора, марковским обслуживанием и накопителем бесконечной ёмкости. Но, как правило, все заявки в группе являлись однотипными и время их обслуживания одинаково распределённым, что не всегда используется при описании реальных вычислительных процессов. Подобные системы с двумерным пуассоновским потоком приведены в [12], но предлагаемый авторами метод довольно сложен и не применим для изучения аналогичных систем с произвольным временем обслуживания или не пуассоновским входящим потоком.

В связи с возникающей во многих практических задачах возможностью частичной циркуляции заявок в системе в настоящее время необходимо построение математических

*Работа выполнена при поддержке Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» и Федерального агентства по образованию РФ (проект «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи»).

моделей, учитывающих повторное обслуживание на приборах. Исследованию потоков повторных обращений в различных системах массового обслуживания с неограниченным числом приборов посвящены работы [13–17]. Рассмотренные системы имеют один блок обслуживания и не применимы в случае поступления потоков кратных заявок.

Всё вышеизложенное подтверждает, что построение и анализ математических моделей с параллельно функционирующими блоками обслуживания, общими входящими потоками кратных заявок и повторным обслуживанием в блоках имеют большое практическое значение.

В данной работе предлагается математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок в виде СМО с двумя блоками обслуживания и потоком кратных заявок с повторными обращениями к блокам. Ставится задача нахождения совместной производящей функции числа занятых приборов в блоках и повторных обращений к ним.

Математическая модель. Рассмотрим СМО с двумя обслуживающими блоками, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход системы поступает простейший с параметром λ поток сдвоенных заявок, т. е. в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают две заявки.

Порядок обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, а другая — во второй блок обслуживания и занимает любой из свободных приборов, на котором выполняется её обработка в течение случайного времени, распределённого по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2. По окончании обслуживания заявка k-го блока с вероятностью $1 - r_k$ покидает систему, а с вероятностью r_k возвращается обратно на прибор для повторного обслуживания ($k = 1, 2$).

Обозначим $i_k(t)$ число занятых приборов в k-м блоке обслуживания в момент времени t, $n_k(t)$ — число повторных обращений заявок к k-му блоку за время t.

Производящая функция числа занятых приборов в блоках и повторных обращений к ним. Рассматриваемый четырёхмерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t), n_1(t), n_2(t)\}$ является марковским [18]. Для его распределения вероятностей $P(i_1, i_2, n_1, n_2, t) = P\{i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2\}$ составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [19]:

$$\frac{dP(i_1, i_2, n_1, n_2, t)}{dt} = -(\lambda + i_1\mu_1 + i_2\mu_2)P(i_1, i_2, n_1, n_2, t) + i_1\mu_1 r_1 P(i_1, i_2, n_1 - 1, n_2, t) +$$

$$+ i_2\mu_2 r_2 P(i_1, i_2, n_1, n_2 - 1, t)i_1 + \lambda P(i_1 - 1, i_2 - 1, n_1, n_2, t) +$$

$$+ (i_1 + 1)\mu_1(1 - r_1)P(i_1 + 1, i_2, n_1, n_2, t) + (i_2 + 1)\mu_2(1 - r_2)P(i_1, i_2 + 1, n_1, n_2, t)(i_2 + 1), \quad (1)$$

решение которой удовлетворяет начальным условиям

$$P(i_1, i_2, n_1, n_2, 0) = R(i_1, i_2),$$

где $R(i_1, i_2)$ — начальное двумерное распределение числа занятых приборов в блоках обслуживания.

Определим производящую функцию четырёхмерного распределения $P(i_1, i_2, n_1, n_2, t)$ в виде

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} x_1^{i_1} x_2^{i_2} y_1^{n_1} y_2^{n_2} P(i_1, i_2, n_1, n_2, t).$$

Из системы (1) получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции $F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)$:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial t}+\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial x_1}\left(\mu_1x_1(1-r_1y_1)-\mu_1(1-r_1)\right)+$$

$$+\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial x_2}\left(\mu_2x_2(1-r_2y_2)-\mu_2(1-r_2)\right)=\lambda(x_1x_2-1)F(x_1,x_2,y_1,y_2,t), \tag{2}$$

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,0)=f(x_1,x_2). \tag{3}$$

Здесь $f(x_1,x_2)$ — производящая функция начального двумерного распределения числа занятых приборов в блоках обслуживания.

Решение дифференциального уравнения первого порядка в частных производных (2) определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристических кривых [20]:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\mu_1x_1(1-r_1y_1)-\mu_1(1-r_1)}=\frac{dx_21}{\mu_2x_2(1-r_2y_2)-\mu_2(1-r_2)}=$$

$$=\frac{dF(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\lambda(x_1x_2-1)F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}.$$

Найдём два первых интеграла этой системы. Из уравнений

$$dt=\frac{dx_1}{\mu_1x_1(1-r_1y_1)-\mu_1(1-r_1)},\quad dt=\frac{dx_2}{\mu_2x_2(1-r_2y_2)-\mu_2(1-r_2)}$$

получаем выражения

$$x_1=\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-C_1\mathrm{e}^{\mu_1(1-r_1y_1)t},\quad C_1=\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\Big)\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}, \tag{4}$$

$$x_2=\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-C_2\mathrm{e}^{\mu_2(1-r_2y_2)t},\quad C_2=\Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\Big)\mathrm{e}^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}. \tag{5}$$

Последний интеграл найдём из уравнения

$$dt=\frac{dF(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\lambda(x_1x_2-1)F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}.$$

Подстановкой (4) и (5) в данное уравнение для x_1 и x_2 получаем решение в виде

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=\Phi(C_1,C_2)\exp\Big\{\Big(\frac{(1-r_1)(1-r_2)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}-1\Big)\lambda t+$$

$$+\lambda C_1C_2\frac{\mathrm{e}^{[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t}-1}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)}-$$

$$- \lambda C_1 \frac{(1-r_2)(e^{\mu_1(1-r_1y_1)t}-1)}{\mu_1(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)} - \lambda C_2 \frac{(1-r_1)(e^{\mu_2(1-r_2y_2)t}-1)}{\mu_2(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}\Big\}. \tag{6}$$

Подставляя в (6) выражения (4), (5) для C_1 и C_2, общее решение уравнения (2) можно записать следующим образом:

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t) = \Phi\Big(\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\Big)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t},\ \Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\Big)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\Big)\times$$

$$\times \exp\Big\{\Big(\frac{(1-r_1)(1-r_2)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}-1\Big)\lambda t - \lambda\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\Big)\frac{(1-r_2)(1-e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})}{\mu_1(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)} -$$

$$- \lambda\Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\Big)\frac{(1-r_1)(1-e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})}{\mu_2(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)} +$$

$$+ \lambda\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\Big)\Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\Big)\frac{1-e^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t}}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)}\Big\}, \tag{7}$$

где $\Phi(u_1,u_2)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Вид функции $\Phi(u_1,u_2)$ определим из начальных условий (3) с учётом полученного общего решения (7):

$$\Phi(u_1,u_2) = f\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-u_1,\ \frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-u_2\Big).$$

Тогда производящая функция числа занятых приборов в блоках и повторных обращений к ним будет иметь вид

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t) =$$

$$= f\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - \Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\Big)e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t},\ \frac{1-r_2}{1-r_2y_2} - \Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\Big)e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\Big)\times$$

$$\times \exp\Big\{\lambda\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\Big)\Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\Big)\frac{1-e^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t}}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)} -$$

$$- \lambda\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}-x_1\Big)\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}\,\frac{1-e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}}{\mu_1(1-r_1y_1)} - \lambda\Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2}-x_2\Big)\frac{1-r_1}{1-r_1y_1}\,\frac{1-e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}}{\mu_2(1-r_2y_2)} +$$

$$+ \lambda t\Big(\frac{(1-r_1)(1-r_2)}{(1-r_1y_2)(1-r_2y_2)}-1\Big)\Big\}. \tag{8}$$

Полученное аналитическое выражение позволяет найти характеристики числа занятых приборов в блоках обслуживания, а также характеристики количества повторных обращений к блокам, а именно математическое ожидание числа повторных обращений к первому блоку, совершённых за время t:

$$Mn_1(t) = \left.\frac{\partial f\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - \frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}\,\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}, 1\right)}{\partial y_1}\right|_{y_1=1} + f(1,1)\Big[\frac{r_1}{1-r_1}\,\lambda\Big(t - \frac{1-\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1)t}}{\mu_1(1-r_1)}\Big)\Big].$$

Дисперсия числа повторных обращений к первому блоку имеет вид

$$Dn_1(t) = \left.\frac{\partial^2 f\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - \frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}\,\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}, 1\right)}{\partial y_1^2}\right|_{y_1=1} +$$

$$+ \left.\frac{\partial f\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - \frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}\,\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}, 1\right)}{\partial y_1}\right|_{y_1=1} \times$$

$$\times \left(1 - \left.\frac{\partial f\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - \frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}\,\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}, 1\right)}{\partial y_1}\right|_{y_1=1}\right) + \frac{r_1}{1-r_1}\lambda\Big(t - \frac{1-\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1)t}}{\mu_1(1-r_1)}\Big)\times$$

$$\times \left[2\left.\frac{\partial f\left(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - \frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}\,\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}, 1\right)}{\partial y_1}\right|_{y_1=1}(1-f(1,1)) + \frac{1+3r_1}{1-r_1}f(1,1)\right] +$$

$$+ \frac{r_1^2}{(1-r_1)^2}\lambda^2\Big(t - \frac{1-\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1)t}}{\mu_1(1-r_1)}\Big)^2 f(1,1)(1-f(1,1)) + 2f(1,1)\frac{r_1^2\lambda\mu_1 t}{(1-r_1)^2}\,\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1)t}.$$

Аналогичный вид имеют вероятностные характеристики числа повторных обращений ко второму блоку.

Рассмотрим случай, когда начальное распределение состояний системы совпадает с её стационарным распределением. Так как согласно (7)

$$F(x_1,x_2,1,1,t) = \Phi((1-x_1)\,\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1)t},\ (1-x_2)\,\mathrm{e}^{-\mu_2(1-r_2)t}) \times$$

$$\times \exp\Big\{\lambda(1-x_1)(1-x_2)\frac{1-\mathrm{e}^{-[\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)]t}}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)} -$$

$$- \lambda(1-x_1)\frac{1-\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1)t}}{\mu_1(1-r_1)} - \lambda(1-x_2)\frac{1-\mathrm{e}^{-\mu_2(1-r_2)t}}{\mu_2(1-r_2)}\Big\},$$

то

$$\lim_{t\to\infty} F(x_1,x_2,1,1,t) = \Phi(0,0)\exp\Big\{\frac{\lambda(1-x_1)(1-x_2)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)} - \frac{\lambda(1-x_1)}{\mu_1(1-r_1)} - \frac{\lambda(1-x_2)}{\mu_2(1-r_2)}\Big\}.$$

Очевидно, что

$$F(1,1,1,1,t) = 1 = \Phi(0,0)\exp\{0\},$$

откуда $\Phi(0,0) = 1$, а, следовательно,

$$f(x_1,x_2) = \exp\Big\{\frac{\lambda(1-x_1)(1-x_2)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)} - \frac{\lambda(1-x_1)}{\mu_1(1-r_1)} - \frac{\lambda(1-x_2)}{\mu_2(1-r_2)}\Big\}.$$

Таким образом, выражение (8) приобретает вид

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t) = \exp\Big\{\Big(\frac{(1-r_1)(1-r_2)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)} - 1\Big)\lambda t +$$

$$+\frac{\lambda\Big(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1} - \Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - x_1\Big)\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\Big)\Big(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2} - \Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2} - x_2\Big)\mathrm{e}^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\Big)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)} -$$

$$-\frac{\lambda\Big(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1} - \Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - x_1\Big)\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1y_1)t}\Big)}{\mu_1(1-r_1)} - \frac{\lambda\Big(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2} - \Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2} - x_2\Big)\mathrm{e}^{-\mu_2(1-r_2y_2)t}\Big)}{\mu_2(1-r_2)} +$$

$$+\lambda\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - x_1\Big)\Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2} - x_2\Big)\frac{1-\mathrm{e}^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t}}{\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)} -$$

$$-\lambda\Big(\frac{1-r_1}{1-r_1y_1} - x_1\Big)\frac{(1-r_2)(1-\mathrm{e}^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})}{\mu_1(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)} -$$

$$-\lambda\Big(\frac{1-r_2}{1-r_2y_2} - x_2\Big)\frac{(1-r_1)(1-\mathrm{e}^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})}{\mu_2(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}\Big\}.$$

В этом случае формулы для нахождения математического ожидания и дисперсии числа повторных обращений к k-му блоку запишем в виде

$$Mn_k(t) = \frac{r_k}{1-r_k}\lambda t,$$

$$Dn_k(t) = \frac{r_k}{1-r_k}\lambda\Big(\frac{1+r_k}{1-r_k}t - \frac{2r_k}{\mu_1(1-r_k)^2}(1-\mathrm{e}^{-\mu_k(1-r_k)t})\Big), \quad k = 1,2.$$

Проведённые в данной работе исследования представляют собой обобщение научных результатов, полученных для системы с повторными обращениями и одним блоком обслуживания [13, 14].

В качестве примера практического применения результатов рассмотрим распределённую вычислительную систему с двумя блоками обслуживания (серверами), на вход которой поступает поток задач. Пусть процесс решения каждой из задач предполагает одновременное использование двух алгоритмов, для реализаци которых требуется случайное время. Будем считать, что выполнение каждого из алгоритмов может привести к двум результатам: решение найдено или достигнуто какое-либо условие останова. В первом случае подзадача считается выполненной, а во втором необходима повторная реализация алгоритма, например, при других начальных условиях. При следующих заданных параметрах системы: $\lambda = 300$, $\mu_1 = 17$, $\mu_2 = 3$ задач в единицу времени, $r_1 = 0{,}2$, $r_2 = 0{,}1$, среднее число подзадач первого блока, потребовавших повторного решения, составит 75 задач в единицу времени при дисперсии, равной 109,743, а для второго — 33,333 задачи в единицу времени при дисперсии, равной 38,182. Корреляционный момент, составляющий 2506, отражает сильную зависимость исследуемых потоков, которая снижается при уменьшении вероятностей возврата заявок.

Заключение. Таким образом, в данной работе построена математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок в виде системы массового обслуживания с двумя блоками обслуживания и входящим потоком кратных заявок с повторными обращениями к блокам.

В ходе исследования системы получено аналитическое выражение для совместной производящей функции числа занятых приборов в блоках и повторных обращений к ним, что позволяет находить точные числовые характеристики рассматриваемого случайного вектора. Из вида производящей функции следует, что потоки обращений являются зависимыми и анализировать их необходимо только совместно. В работе представлены математическое ожидание и дисперсия числа повторных обращений к одному из обслуживающих блоков при произвольных начальных условиях.

Полученные результаты позволяют решать любые практические задачи из области применения данной математической модели вне зависимости от их предметной направленности: будь то анализ функционирования распределённых вычислительных систем или процесс формирования потоков постоянных клиентов коммерческой организации, реализующей взаимодополняющие товары [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Топорков В. В.** Модели распределенных вычислений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 320 с.
2. **Эндрюс Г. Р.** Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. 512 с.
3. **Хорошевский В. Г., Павский В. А.** Расчет показателей эффективности функционирования распределенных вычислительных систем // Автометрия. 2008. **44**, № 2. С. 3–15.
4. **Грэсь Т., Соловьев В. В., Булатова И. Р.** Моделирование потребления мощности в элементах цифровых устройств // Автометрия. 2009. **45**, № 6. С. 105–114.
5. **Ромм Я. Е., Забеглов В. В.** Параллельные схемы некоторых дискретных ортогональных преобразований // Автометрия. 2010. **46**, № 6. С. 54–70.
6. **Таташев А. Г.** Система массового обслуживания с групповым поступлением и инверсионной дисциплиной // Кибернетика и системный анализ. 1995. № 6. С. 163–165.
7. **Pechinkin A., Svischeva T.** The stationary state probability in the BMAP/G/1/r queueing system with inverse discipline and probabilistic priority // Trans. of XXIV Intern. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. Jurmala, Latvia. September 10–17, 2004. P. 141–147.
8. **Ежов И. И., Каданков В. Ф.** Система обслуживания Gx/G/1 // Математическая студия. 2001. **16**, № 2. С. 199–212.
9. **Ежов И. И., Каданков В. Ф.** Основные вероятностные характеристики системы обслуживания Gk/G/1 // УМЖ. 2001. **53**, № 10. С. 1343–1357.

10. **Чаплыгин В. В.** Стационарные характеристики системы массового обслуживания $G[X]/MSP/1/\infty$ с поступлением заявок группами ограниченного объема // Информационные процессы. 2006. **6**, № 2. С. 144–152.
11. **Апиче Ч. Д., Манзо Р.** Система обслуживания BMAPк/Gк/1 конечной емкости с обобщенной дисциплиной преимущественного разделения прибора // АиТ. 2006. № 3. С. 94–102.
12. **Чечельницкий А. А., Кучеренко О. В.** Стационарные характеристики параллельно функционирующих систем обслуживания с двумерным входным потоком // Сб. науч. ст. Минск, 2009. Т. 2. С. 262–268.
13. **Моисеева С. П., Морозова А. С., Назаров А. А.** Распределение вероятностей двумерного потока обращений в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с повторным обращением // Вестн. ТГУ. 2006. № 16. С. 125–128.
14. **Морозова А. С., Моисеева С. П., Назаров А. А.** Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2005. **13**, вып. 5. С. 88–92.
15. **Ананина И. А., Назаров А. А., Галажинская О. Н.** Исследование потоков в системе обслуживания с неограниченным числом фаз и линий методом предельной декомпозиции // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети. Матер. междунар. науч. конф. «Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей». Минск, 2009. С. 170–174.
16. **Моисеева С. П., Ананина И. А., Назаров А. А.** Исследование потоков в системе $M|GI|\infty$ с повторными обращениями методом предельной декомпозиции // Вестн. ТГУ. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3(8). С. 56–67.
17. **Назаров А. А., Семенова И. А.** Исследование систем массового обслуживания с повторными вызовами методом асимптотического анализа // Автометрия. 2011. **47**, № 4. С. 104–113.
18. **Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.** Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005. 408 с.
19. **Баруча-Рид А. Т.** Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 512 с.
20. **Эльцгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
21. **Захорольная И. А., Моисеева С. П.** Математическая модель процесса изменения дохода от продажи взаимодополняющих товаров // Тр. Десятой междунар. конф. по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий. Красноярск, 2011. С. 157–160.

Поступила в редакцию 26 апреля 2011 г.