УДК 621.391.266

МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО К ПАРАМЕТРАМ ВРАЩЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГРУППОВОГО ТОЧЕЧНОГО ОБЪЕКТА*

Д. Г. Хафизов

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Марийский государственный технический университет»,
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, 3
E-mail: HafizovDG@marstu.net

Рассмотрены вопросы получения формы пространственных групповых точечных объектов на основе метода главных компонент, который позволяет найти инвариантное к параметрам вращения представление кватернионного сигнала, задающего пространственный групповой точечный объект. Достоинством данного подхода является возможность оценки параметров вращения при отсутствии информации о нумерации точек в объекте.

Ключевые слова: пространственный групповой точечный объект, кватернионный сигнал, скалярное произведение, мера схожести, собственные числа, ковариационная матрица.

Введение. Применение теории кватернионных сигналов (КТС) для задач обработки пространственных групповых точечных объектов (ПГТО) рассматривалось в [1, 2]. В этих работах было показано, что величина скалярного произведения кватернионных сигналов как мера схожести и базовая операция, используемая при их обработке, является неинвариантной к углу поворота (пространственному положению) сигнального КТС по отношению к эталонному сигналу. Данная задача решалась с помощью таких подходов, как совмещение сигнального и эталонного КТС (при этом необходимо знать порядок кватернионов в сигнале) [1, 3, 4], собственная система отсчётов [5], амплитудно-фазовое представление КТС (при котором нумерация кватернионов в пространственном групповом точечном объекте не требуется) [6], сферические гармоники [1, 7] и метод оценки параметров вращения по результатам фильтрации [8].

Рассматриваемое в предлагаемой работе решение проблемы неинвариантности скалярного произведения к углу поворота основано на известном методе, применяемом в многомерном статистическом анализе данных, — методе главных компонент (МГК) [9, 10].

К тому же в задачах обработки изображений и распознавания образов широко используется понятие геометрической формы объекта или его изображения как некоторого инварианта к ряду преобразований. В то же время в научной литературе нет общепринятого определения понятия «форма». Существуют лишь некоторые подходы к формализации данного понятия. Причём эти подходы во многом зависят от моделей представления изображений объектов. В качестве одного из таких подходов в работе [1] было предложено ввести понятие формы как инварианта к операциям вращения, масштабирования и сдвига начальной точки, которая определялась относительно некоторого тестового изображения, обладающего особыми свойствами, что приводит к относительности самого понятия.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-07-00585-а).

Целью данной работы является получение аналитического описания пространственного группового точечного объекта, представленного в виде КТС, которое инвариантно к преобразованию вращения, что позволит ввести понятие формы ПГТО.

Постановка задачи. Имеется исходный (эталонный) кватернионный сигнал $\mathbf{Q}$ и сигнальный КТС $\mathbf{Q}^{(c)}$, который получен из $\mathbf{Q}$ путём поворота вокруг произвольной оси $r = r_1 i + r_2 j + r_3 k$ на произвольный угол 2φ. Необходимо показать, что $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}^{(c)}$ — это один и тот же ГТО, а также оценить параметры вращения.

Метод главных компонент (метод преобразования одной последовательности наблюдаемых переменных в другую последовательность переменных) заключается в получении новых показателей — главных компонент, являющихся линейными комбинациями исходных. Главные компоненты упорядочиваются по убыванию той дисперсии, которую они «объясняют». Первая главная компонента объясняет бóльшую часть дисперсии, чем вторая, вторая — бóльшую, чем третья, и т. д. [9, 10].

Метод главных компонент осуществляет переход к новой системе координат $y_1, \ldots, y_p$ в исходном пространстве признаков $x_1, \ldots, x_p$ — системе ортонормированных линейных комбинаций

$$\begin{cases} y_j(\mathbf{x}) = w_{1j}(x_1 - m_1) + \ldots + w_{pj}(x_p - m_p), \\ \sum\limits_{i=1}^{p} w_{ij}^2 = 1, \qquad j = \overline{1,p}, \\ \sum\limits_{i=1}^{p} w_{ij} w_{ik} = 0, \quad j,k = \overline{1,p},\ j \neq k, \end{cases} \tag{1}$$

где m_i — математическое ожидание признака x_i.

Линейные комбинации выбираются таким образом, что среди всех возможных линейных нормированных комбинаций исходных признаков первая главная компонента $y_1(\mathbf{x})$ обладает наибольшей дисперсией. Геометрически это выглядит как ориентация новой координатной оси y_1 вдоль направления наибольшей вытянутости эллипсоида рассеяния объектов исследуемой выборки в пространстве признаков $x_1, \ldots, x_p$. Вторая главная компонента имеет наибольшую дисперсию среди всех оставшихся линейных преобразований, некоррелированных с первой главной компонентой. Она интерпретируется как направление наибольшей вытянутости эллипсоида рассеяния, перпендикулярное первой главной компоненте, и т. д.

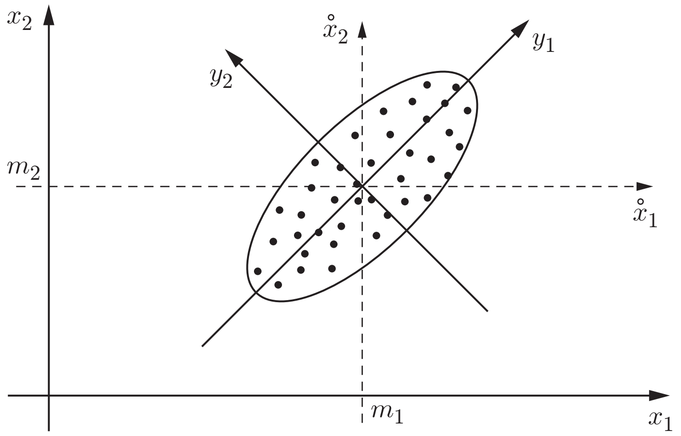
Вычисление коэффициентов главных компонент w_{ij} основано на том факте, что векторы $\mathbf{w}_1 = (w_{11}, \ldots, w_{p1})^T, \ldots, \mathbf{w}_p = (w_{1p}, \ldots, w_{pp})^T$ являются собственными (характеристическими) векторами ковариационной матрицы $\mathbf{S}$. В свою очередь, соответствующие собственные числа этой матрицы равны дисперсиям проекций множества объектов на оси главных компонент.

Метод главных компонент допускает следующую геометрическую интерпретацию:

— производится перенос начала координат в точку, являющуюся центром эллипсоида рассеяния;

— оси координат поворачиваются таким образом, чтобы новые оси были направлены вдоль осей эллипсоида рассеяния точек, причём разброс точек вокруг первой выбранной оси должен быть не меньше, чем вдоль второй выбранной оси, и т. д. (см. рисунок) [10].

Применение МГК для анализа КТС. Пусть имеется векторный КТС $\mathbf{Q}$ размерности s, каждая компонента кватернионов, входящих в состав сигнала, есть проекция на соответствующую ось в декартовой системе координат. МГК подразумевает переход к



Геометрическая интерпретация МГК для двумерного случая

другой ориентации осей координат, в которой координаты исходного объекта при пересчёте не будут изменяться в зависимости от их исходного положения.

Представим КТС в виде матрицы с тремя столбцами и s строками:

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ s-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} q_1(0) & q_2(0) & q_3(0) \\ q_1(1) & q_2(1) & q_3(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ q_1(s-1) & q_2(s-1) & q_3(s-1) \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (2)$$

Здесь столбцы в терминах МГК — это переменные, т. е. $p = 3$. Тогда элементы ковариационной матрицы $\mathbf{S}$ вычисляются следующим образом:

$$s_{i,j} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}(q_i(k) - \bar{q}_i)(q_j(k) - \bar{q}_j), \quad i, j = 0, 1, 2, \qquad (3)$$

где $\bar{q}_i$ и $\bar{q}_j$ — математические ожидания i и j столбца матрицы (2).

Коэффициент ковариации называется также центральным моментом второго порядка [11], а матрица $\mathbf{S} = \{s_{ij}\}$ — матрицей моментов.

Для определения главных компонент требуется найти собственные числа и собственные векторы ковариационной матрицы (3).

Собственные числа λ вычисляются из уравнения

$$\begin{vmatrix} s_{0,0} - \lambda & s_{0,1} & s_{0,2} \\ s_{1,0} & s_{1,1} - \lambda & s_{1,2} \\ s_{2,0} & s_{2,0} & s_{2,2} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (4)$$

которое имеет три решения: λ_0, λ_1, λ_2, причём $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2$. Для нахождения собственных векторов матрицы $\mathbf{S}$ необходимо решить три системы однородных уравнений (для каждого из λ_i, $i = 0, 1, 2$):

$$\begin{cases} (s_{00} - \lambda_0)w_{00} + s_{01}w_{10} + s_{02}w_{20} = 0, \\ s_{10}w_{00} + (s_{11} - \lambda_0)w_{10} + s_{12}w_{20} = 0, \\ s_{20}w_{00} + s_{21}w_{10} + (s_{22} - \lambda_0)w_{20} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

После решения данной системы найдём $\mathbf{w}_0 = (w_{00}, w_{10}, w_{20})$. Аналогично для λ_1 и λ_2 определим $\mathbf{w}_1 = (w_{01}, w_{11}, w_{21})$ и $\mathbf{w}_2 = (w_{02}, w_{12}, w_{22})$. Таким образом, $\mathbf{w}_0$ соответствует первой новой координатной оси, $\mathbf{w}_1$ — второй, $\mathbf{w}_2$ — третьей. Выполнив пересчёт координат исходного кватернионного сигнала

$$\mathbf{\Phi_Q} = \left\{\varphi_{\mathbf{Q}}(n)\right\}_{0,\, s-1},$$

где

$$\varphi_{\mathbf{Q}} = \varphi_{\mathbf{Q},1}i + \varphi_{\mathbf{Q},2}j + \varphi_{\mathbf{Q},3}k;$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{Q},1}(n) &= w_{00}(q_1(n) - \bar{q}_1) + w_{10}(q_2(n) - \bar{q}_2) + w_{20}(q_3(n) - \bar{q}_3); \\ \varphi_{\mathbf{Q},2}(n) &= w_{01}(q_1(n) - \bar{q}_1) + w_{11}(q_2(n) - \bar{q}_2) + w_{21}(q_3(n) - \bar{q}_3); \\ \varphi_{\mathbf{Q},3}(n) &= w_{02}(q_1(n) - \bar{q}_1) + w_{12}(q_2(n) - \bar{q}_2) + w_{22}(q_3(n) - \bar{q}_3), \end{aligned} \tag{6}$$

получим изображение КТС в новых координатных осях, причём это изображение по определению не будет зависеть от исходного положения КТС (параметров его вращения), т. е.

$$\mathbf{\Phi_Q} = \mathbf{\Phi}_{b\mathbf{Q}b^{-1}}. \tag{7}$$

Рассмотрим основные свойства, связанные с использованием собственных значений и собственных векторов.

1. Собственные значения линейного оператора выражают его свойства, и они не зависят от применяемой системы координат [11]. Это означает, что и для исходного КТС $\mathbf{Q}$, и для повёрнутого сигнала $b\mathbf{Q}b^{-1}$ собственные значения ковариационной матрицы будут одинаковы.

2. Использование собственных векторов означает применение в качестве координатных базисных векторов, направление которых зависит только от конфигурации группового точечного объекта.

3. Собственные векторы попарно ортогональны, т. е. задают ортонормированную систему координат.

4. Совокупность собственных векторов образует невырожденную модальную матрицу $\mathbf{T}$, определитель которой равен 1, и с её помощью задаётся преобразование координат, т. е. матрица является оператором вращения [1]

$$p = \mathbf{T}q.$$

Здесь $q = q_1i + q_2j + q_3k$ и $p = p_1i + p_2j + p_3k$ — исходный и повёрнутый кватернионы соответственно, причём $q = \mathbf{T}^{-1}p$. Следует отметить, что при представлении поворота с помощью вращающего кватерниона можно также перейти к матрице вращения:

$$\mathbf{P} = b\mathbf{Q}b^{-1} = \left\{bq(n)b^{-1}\right\}_{0,\, s-1} =$$

$$= \Big\{[(b_0^2 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2)q_1(n) + 2(b_1b_2 - b_0b_3)q_2(n) + 2(b_1b_3 + b_0b_2)q_3(n)]i +$$

$$+ [2(b_1b_2 + b_0b_3)q_1(n) + (b_0^2 + b_2^2 - b_1^2 - b_3^2)q_2(n) + 2(b_3b_2 - b_0b_1)q_3(n)]j +$$

$$+ [2(b_1b_3 - b_0b_2)q_1(n) + 2(b_3b_2 + b_0b_1)q_2(n) + (b_0^2 + b_3^2 - b_2^2 - b_1^2)q_3(n)]k\Big\}_{0,\, s-1},$$

или

$$p(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ p_3(n) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot q(n) = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ q_3(n) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 & 2(b_1b_2 - b_0b_3) & 2(b_3b_1 + b_0b_2) \\ 2(b_1b_2 + b_0b_3) & b_0^2 + b_2^2 - b_1^2 - b_3^2 & 2(b_3b_2 - b_0b_1) \\ 2(b_3b_1 - b_0b_2) & 2(b_3b_2 + b_0b_1) & b_0^2 + b_3^2 - b_2^2 - b_1^2 \end{bmatrix}.$$

Это обстоятельство позволяет считать данную матрицу как оценку параметров вращения КТС.

Заключение. В предлагаемой работе установлено, что использование метода главных компонент, основанного на характеристических числах и векторах, даёт возможность получить инвариантное по отношению к параметрам вращения изображение группового точечного объекта в пространстве. При этом вычисление модальной матрицы на основе собственных векторов матрицы ковариации $\mathbf{S}$ означает определение параметров вращения кватернионного сигнала. К достоинству метода можно отнести тот факт, что для получения изображения объекта в новых координатах нет необходимости в упорядочении точечных отметок ПГТО в соответствии с эталонным сигналом, а также не требуется знание самого эталонного сигнала.

Таким образом, можно говорить о понятии формы группового точечного объекта, представленного кватернионным сигналом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Комплекснозначные** и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов /Под ред. Я. А. Фурмана. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 456 с.
2. **Furman Ya. A.** Processing of quaternion signals specifying spatially located group point objects // Pattern Recogn. and Image Analysis. 2002. **12**, N 2. P. 175–193.
3. **Хафизов Д. Г.** Совмещение кватернионных сигналов при решении задачи обработки изображений группового точечного объекта // Вестн. Вятского научного центра Верхне-Волжского отделения Академии технологических наук РФ. 2002. № 1. С. 176–180.
4. **Фурман Я. А., Егошина И. Л.** Обратная задача вращения трёхмерных векторных сигналов // Автометрия. 2010. **46**, № 1. С. 46–56.

5. **Хафизов Р. Г., Хафизов Д. Г.** Распознавание групповых точечных объектов на основе представления в собственной системе отсчета кватернионных сигналов // Автометрия. 2005. **41**, № 3. С. 19–30.
6. **Хафизов Д. Г.** Упорядочение точек пространственного изображения группового точечного объекта на базе амплитудно-фазового представления // Автометрия. 2007. **43**, № 1. С. 10–23.
7. **Леухин А. Н., Хафизов Д. Г.** Оценка параметров вращений трехмерного группового точечного объекта без предварительной нумерации формирующих точек // Докл. 11-й Всерос. конф. «Математические методы распознавания образов». М., 2003. С. 130–133.
8. **Фурман Я. А., Рябинин К. Б.** Нахождение параметров вращения пространственного группового точечного объекта по результатам его фильтрации // Радиотехника и электроника. 2008. **53**, № 1. С. 86–97.
9. **Дронов С. В.** Многомерный статистический анализ: Учеб. пособие. Барнаул: Изд-во Алт. гос. ун-та, 2003. 213 с.
10. **Калинина В. Н., Соловьев В. И.** Введение в многомерный статистический анализ: Учеб. пособие. М.: ГУУ, 2003. 66 с.
11. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

Поступила в редакцию 4 апреля 2011 г.