УДК 519.1

ОБОБЩЁННЫЕ ЧИСЛА КАТАЛАНА В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ СЛУЧАЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

А. Л. Резник, В. М. Ефимов, А. А. Соловьев, А. В. Торгов

Учреждение Российской академии наук
Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Расширено понятие числовой последовательности Каталана, сформулированы и решены задачи, приводящие к обобщённым числам Каталана.

Ключевые слова: числа Каталана, путь, дискретная решётка, ограничивающие плоскости, зеркальное отражение.

Введение. Числовую последовательность Каталана можно задать непосредственно:

$$C_l = \frac{1}{l+1} C_{2l}^{l} \tag{1}$$

либо с использованием рекуррентного соотношения

$$C_{l+1} = \sum_{i=0}^{l} C_i C_{l-i}.$$

Числа Каталана встречаются во многих приложениях теории вероятностей и математической статистики [1]. Первые задачи, в которых возникли эти числа, присутствуют ещё в работах Л. Эйлера, но в историю науки они вошли под именем бельгийского математика Каталана, который жил столетием позже. Напомним несколько наиболее известных комбинаторных задач, решение которых приводит к числам Каталана.

1. Сколькими способами могут быть расставлены l левых и l правых скобок в математическом выражении, чтобы не нарушались правила их расстановки (т. е. чтобы количество встречающихся правых скобок не превышало количества левых)?

2. Сколькими различными способами можно передвинуть шахматную фигуру с поля a1 на поле h8, не пересекая главную диагональ, если на каждом шаге фигуру можно перемещать либо на соседнее поле вправо, либо на соседнее поле вверх? Обобщить задачу, когда шахматное поле имеет размеры не 8×8, а $l \times l$.

3. Школьный автобус привёз в школу l мальчиков и l девочек. Мальчики и девочки выходят из автобуса в произвольном порядке. Какова вероятность того, что на школьном дворе мальчиков всегда будет не меньше, чем девочек?

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00458), Президиума РАН (проект № 228/2009) и Президиума СО РАН (интеграционный проект № 71/2009).

4. Из l символов «a» и l символов «b» составляются различные слова длиной $2l$. Сколько среди них таких слов, что при их просмотре слева направо количество встретившихся символов «b» никогда не превышает количества встретившихся символов «a»?

Постановка задачи. В наших исследованиях числа Каталана встретились при изучении вопросов, относящихся к надёжности различных методов считывания изображений точечной структуры [2, 3]. Так, при доказательстве одного из соотношений, описывающих вероятность безошибочного считывания случайного дискретного изображения интегратором, обладающим двумя пороговыми уровнями [4, 5], нам потребовалось решить следующую задачу:

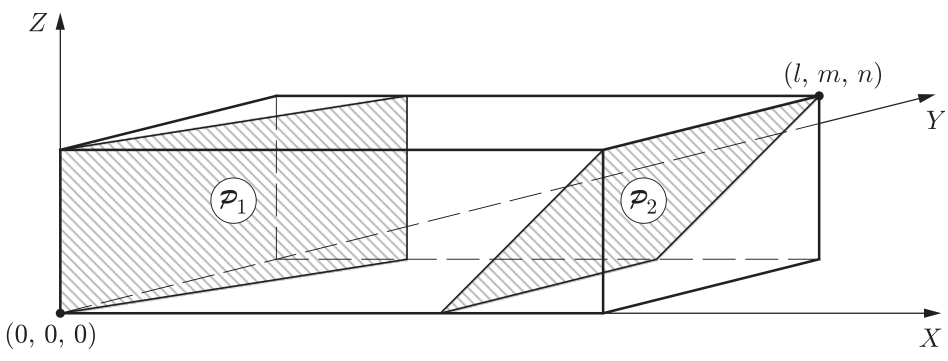
Из l символов «a», m символов «b» и n символов «c» составляются различные слова длиной $(l+m+n)$. Нужно определить, сколько среди всех этих слов таких, что при просмотре слова слева направо количество встреченных символов «b» никогда не превышает количества встреченных символов «a», а при просмотре слова справа налево количество встреченных символов «c» никогда не превышает количества встреченных символов «a».

Решение основной задачи. Оказалось, что проще всего эту задачу решить, если её переформулировать, придав ей геометрическую интерпретацию. Будем рассматривать (см. рисунок) различные пути на трёхмерной дискретной решётке в системе координат (X, Y, Z), которые ведут из точки $(0, 0, 0)$ в точку (l, m, n). Каждое слово сопоставим с одним из таких путей. При этом символу «a» будет соответствовать перемещение из текущей точки (i, j, k) в соседнюю точку $(i+1, j, k)$, символу «b» — перемещение в точку $(i, j+1, k)$, а символу «c» — в точку $(i, j, k+1)$. Наша задача состоит в том, чтобы найти количество таких путей из точки $(0, 0, 0)$ в точку (l, m, n), которые не пересекают ни плоскости $\mathcal{P}_1$, задаваемой уравнением $X - Y = 0$ (т. е. все рассматриваемые пути целиком лежат в полупространстве $X \geq Y$), ни плоскости $\mathcal{P}_2$, задаваемой уравнением $X - Z + n - l = 0$ (т. е. каждый из рассматриваемых путей целиком лежит не только в полупространстве $X \geq Y$, но также в полупространстве $l - X \geq n - Z$).

Решение этой переформулированной задачи проведём следующим образом: из общего количества путей S, ведущих из точки $(0, 0, 0)$ в точку (l, m, n), равного

$$S = \frac{(l+m+n)!}{l!m!n!},$$

вычтем количество путей Q, которые пересекают хотя бы одну из плоскостей $\mathcal{P}_1$ либо $\mathcal{P}_2$. В свою очередь, для вычисления Q необходимо сложить количество Q_1 путей, пересекающих плоскость $\mathcal{P}_1$, с количеством Q_2 путей, пересекающих плоскость $\mathcal{P}_2$, и вычесть из полученной суммы количество Q_{12} путей, пересекающих как плоскость $\mathcal{P}_1$, так и плоскость $\mathcal{P}_2$ (поскольку в сумме они учтены дважды).



Параллелепипед с ограничивающими плоскостями $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$

Вычислим сначала количество путей Q_1. Для этого воспользуемся стандартным приёмом, часто помогающим при решении подобного рода задач. Возьмём произвольный путь, пересекающий плоскость $\mathcal{P}_1$, и найдём точку их первого пересечения. Её координаты, очевидно, имеют вид (u, u, v), а следующая точка пути имеет координаты $(u, u+1, v)$. В оставшейся части пути, лежащей после точки $(u, u+1, v)$, произведём следующее «зеркальное» преобразование: каждое перемещение по оси X заменим перемещением по оси Y, и наоборот, каждое перемещение по оси Y заменим перемещением по оси X. Нетрудно видеть, что такой «исправленный» путь будет заканчиваться не в точке (l, m, n), а в точке $(m-1, l+1, n)$. Таким образом, каждому пути, ведущему из точки $(0,0,0)$ в точку (l, m, n) и пересекающему плоскость $\mathcal{P}_1$, мы поставили в соответствие вполне определённый путь, ведущий из точки $(0,0,0)$ в точку $(m-1, l+1, n)$. Верно и обратное: каждому пути, соединяющему точки $(0,0,0)$ и $(m-1, l+1, n)$, можно поставить в однозначное соответствие вполне определённый путь, соединяющий точки $(0,0,0)$ и (l, m, n) и хотя бы один раз пересекающий плоскость $\mathcal{P}_1$. Для этого достаточно заметить, что точка $(m-1, l+1, n)$ лежит в полупространстве $X < Y$ (по условиям исходной задачи $m, n \leq l$), поэтому путь в неё из точки $(0,0,0)$ с неизбежностью пересекает плоскость $\mathcal{P}_1$. Совершая зеркальное «отражение», обратное только что описанному, преобразуем любой путь, ведущий из точки $(0,0,0)$ в точку $(m-1, l+1, n)$, в путь, соединяющий точки $(0,0,0)$ и (l, m, n) и хотя бы один раз пересекающий плоскость $\mathcal{P}_1$. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между этими двумя множествами путей. Поэтому

$$Q_1 = \frac{((m-1)+(l+1)+n)!}{(m-1)!(l+1)!n!} = \frac{(l+m+n)!}{(l+1)!(m-1)!n!}.$$

Проводя аналогичные рассуждения и используя абсолютную симметрию задачи относительно параметров m и n, получим

$$Q_2 = \frac{(l+m+n)!}{(l+1)!m!(n-1)!}.$$

Теперь становится очевидным, что для вычисления количества путей Q_{12}, пересекающих обе плоскости, необходимо воспользоваться процедурой зеркального отражения дважды. Делается это следующим образом. Путь, пересекающий плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, схематично можно представить в виде

$$(0,0,0) \to \ldots \to (x_1, x_1, z_1) \to (x_1, x_1+1, z_1) \to \ldots$$

$$\ldots \to (x_2, y_2, x_2+n-l) \to (x_2+1, y_2, x_2+n-l) \to \ldots \to (l, m, n).$$

Первое зеркальное отражение проводится с начальным участком пути, начинающимся в точке $(0,0,0)$ и заканчивающимся в точке (x_1, x_1+1, z_1), которая является первой точкой пути, лежащей в полупространстве $X < Y$ (т. е. по другую сторону плоскости $\mathcal{P}_1$). Двигаясь назад от точки (x_1, x_1+1, z_1), будем каждый раз вместо отрицательного шага по оси X делать отрицательный шаг по оси Y, и наоборот, вместо отрицательного шага по оси Y будем делать отрицательный шаг по оси X. Нетрудно видеть, что при таком преобразовании исправленный путь будет начинаться не в точке $(0,0,0)$, а в точке $(-1, +1, 0)$.

Второе зеркальное отражение проведём с конечным участком пути, начинающимся в точке (x_2+1, y_2, x_2+n-l) и заканчивающимся в точке (l, m, n). Для определённости, как и раньше, будем считать, что точка (x_2+1, y_2, x_2+n-l) является первой точкой пути, лежащей по другую сторону плоскости $\mathcal{P}_2$ (вообще говоря, таких точек может быть несколько).

Преобразование конечного участка пути, как уже очевидно, будет таким: движение по оси X нужно заменить движением по оси Z, а движение по оси Z — движением по оси X. В результате конечной точкой пути станет не точка (l, m, n), а точка $(l+1, m, n-1)$.

Таким образом, любому пути, ведущему из точки $(0, 0, 0)$ в точку (l, m, n) и пересекающему обе плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, мы поставили в соответствие вполне определённый путь из точки $(-1, +1, 0)$ в точку $(l+1, m, n-1)$. Обратное утверждение о том, что любому пути, ведущему из точки $(-1, +1, 0)$ в точку $(l+1, m, n-1)$, можно поставить в однозначное соответствие некий путь из точки $(0, 0, 0)$ в точку (l, m, n), пересекающий обе плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, легко доказывается, если учесть, что точки $(-1, +1, 0)$ и $(l+1, m, n-1)$ лежат в разных полупространствах как относительно плоскости $\mathcal{P}_1$, так и относительно плоскости $\mathcal{P}_2$. Это означает, что путь, соединяющий их, обязательно пересечёт обе эти плоскости. Далее остаётся провести двойное зеркальное преобразование, обратное описанному выше. В итоге мы установим взаимно однозначное соответствие между множеством путей, ведущих из точки $(0, 0, 0)$ в точку (l, m, n) и пересекающих обе плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, и множеством путей, ведущих из точки $(-1, +1, 0)$ в точку $(l+1, m, n-1)$. Поэтому

$$Q_{12} = \frac{(l+m+n)!}{(l+2)!(m-1)!(n-1)!}.$$

В результате решение сформулированной задачи о количестве трёхсимвольных слов запишется как

$$Q_{l,m,n} = S - Q_1 - Q_2 + Q_{12} =$$

$$= \frac{(l+m+n)!}{l!m!n!} - \frac{(l+m+n)!}{(l+1)!(m-1)!n!} - \frac{(l+m+n)!}{(l+1)!m!(n-1)!} + \frac{(l+m+n)!}{(l+2)!(m-1)!(n-1)!} =$$

$$= \frac{(l+m+n)!}{l!m!n!}\Big[1 - \frac{m+n}{l+1} + \frac{mn}{(l+1)(l+2)}\Big]. \tag{2}$$

Заключение. Мы назвали числа $Q_{l,m,n}$ обобщёнными числами Каталана, имея в виду то, что формула (2) действительно обобщает известную по многим приложениям последовательность Каталана (1), которая получается из (2) при $n = 0$ и $m = l$. Формула (2) представляет не только самостоятельный теоретический интерес, но также полезна при решении многих прикладных задач теории вероятностей и математической статистики. Так, например, в наших исследованиях по изучению надёжности различных методов считывания случайных дискретных изображений (которые, собственно, и послужили стимулом для выполнения данной работы) нахождение точной формулы (2) было важнейшим этапом при расчёте замкнутых аналитических соотношений, описывающих вероятность безошибочного считывания, осуществляемого интеграторами с двумя пороговыми уровнями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gardner M.** Catalan numbers: an integer sequence that materializes in unexpected places // Sci. Amer. 1976. **234**, N 6. P. 120–125.

2. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в n-мерном пространстве // Автометрия. 1976. № 1. С. 116–119.

3. **Резник А. Л.** Моделирование на ЭВМ непрерывного считывания изображений дискретной структуры // Автометрия. 1981. № 6. С. 3–6.

4. **Reznik A. L., Efimov V. M., Torgov A. V., Soloview A. A.** Computer analytical calculations for the random discrete structures analysis // Proc. of the 10th Intern. Conf. Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-10-2010). St.-Petersburg, December 5–12, 2010. Vol. 1. P. 251–254.

5. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А.** Компьютерно-аналитический расчёт вероятностных характеристик процесса считывания случайных точечных изображений // Автометрия. 2011. **47**, № 1. С. 10–16.

Поступила в редакцию 23 августа 2011 г.