УДК 519.872 : 681.324

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА*

А. А. Назаров, И. А. Семенова

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный университет», 634050, г. Томск, просп. Ленина, 36
E-mail: inna_ac@mail.ru

Рассматриваются RQ-системы (Retrial Queueing Systems) с пуассоновским (простейшим) и марковским модулированным пуассоновским потоками. Исследование проводится методом асимптотических семиинвариантов с использованием теории векторных характеристических функций и матричной формы записи уравнений, что даёт возможность получить асимптотические результаты для целого класса моделей. Проведённый анализ однолинейной RQ-системы позволяет показать область применимости асимптотических результатов к допредельной ситуации.

Ключевые слова: RQ-система, асимптотический анализ, источник повторных вызовов.

Введение. В настоящее время во многих областях производства возникает необходимость использования процессов распределённой обработки информации. Это связано с бурным развитием систем коммуникаций, возникновением информационно-вычислительных систем, появлением и усложнением разнообразных технологических систем, созданием автоматизированных систем управления. Поэтому вполне естественно развитие сетей связи, соединяющих в единые системы различные устройства вычислительной техники. При оптимизации и проектировании сетей передачи данных наиболее действенным инструментом исследования является математическое моделирование. Такой метод позволяет получить вероятностно-временные характеристики для ещё не существующих сетей (на стадии проектирования). В качестве математических моделей вычислительных систем удобно использовать модели теории массового обслуживания [1], а именно системы с повторными вызовами (retrials). Это обусловлено их широкими практическими приложениями в таких областях, как оценивание производительности и проектирование телефонных сетей, локальных вычислительных сетей с протоколами случайного множественного доступа, широковещательных радиосетей, мобильных сотовых радиосетей. Повторные попытки получить обслуживание являются неотъемлемой чертой этих систем. Игнорирование данного эффекта может привести к значительным погрешностям при принятии инженерных решений. Математические аспекты исследования таких моделей рассмотрены в [2–5].

В предлагаемой работе исследование RQ-систем (Retrial Queueing Systems) проводится методом асимптотических семиинвариантов при условии большой задержки заявок в источнике повторных вызовов (ИПВ). Применяя различные асимптотические методы, можно получить удовлетворительное для практики приближённое (аппроксимационное) решение задачи при весьма широких предположениях относительно входа и обслуживания даже

*Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию РФ в рамках Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» (проект «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи»).

в отсутствие явного вида распределений характеристик. Похожее исследование проведено в монографии [6], где найдена гауссовская аппроксимация, в нашей терминологии — асимптотика второго порядка. В представленной работе предлагается исследование RQ-систем методом асимптотического анализа произвольного порядка, которое существенно уточняет аппроксимацию.

Для однолинейной RQ-системы с простейшим входящим потоком в данной работе получено аналитическое выражение для характеристической функции в допредельных условиях, что позволяет проверить точность асимптотических результатов. Кроме того, с помощью используемого метода векторных характеристических функций можно свести исследование RQ-систем с коррелированным входящим потоком и конечным числом обслуживающих приборов к решению матричного уравнения.

1. Математическая модель. Рассмотрим RQ-систему, т. е. систему массового обслуживания с источником повторных вызовов и конечным числом обслуживающих приборов, на вход которых поступает некоторый поток заявок [7]. Исследуем марковские системы с пуассоновским (простейшим) и марковским модулированным пуассоновским (MMP) потоками. Пуассоновский поток задан скалярной интенсивностью λ, а MMP-поток — матрицами Λ и Q, где Q — матрица инфинитезимальных характеристик цепи Маркова, управляющей MMP-потоком, а диагональная матрица Λ определяет значения условных интенсивностей λ_k этого потока.

Считается, что требование, заставшее один из приборов свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределённого по экспоненциальному закону с параметром μ. Если все приборы заняты, то поступившая заявка переходит в источник повторных вызовов, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка обращается к блоку обслуживания с повторной попыткой захвата одного из приборов. Если хотя бы один прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его на случайное время обслуживания, если же весь блок обслуживания занят, то заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки случайной продолжительности.

Ставится задача исследования случайного процесса, характеризующего число заявок в ИПВ.

2. RQ-система с простейшим входящим потоком. Рассмотрим однолинейную RQ-систему ($N = 1$, где N — число приборов), на вход которой поступает простейший поток заявок. Пусть $i(t)$ — число заявок в ИПВ; $n(t)$ определяет состояние прибора следующим образом: $n(t) = 0$, если прибор свободен, и $n(t) = 1$, если прибор занят.

Обозначим $P\{n(t) = n,\, i(t) = i\} = P(n, i, t)$ вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии n и в источнике повторных вызовов i заявок. Процесс $\{n(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(n, i, t)$ состояний $\{n, i\}$ рассматриваемой RQ-системы дифференциальные уравнения Колмогорова имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(0,i,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P(0,i,t) + \mu P(1,i,t), \\[2ex] \dfrac{\partial P(1,i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu)P(1,i,t) + \lambda P(0,i,t) + \sigma(i+1)P(0,i+1,t) + \lambda P(1,i-1,t), \end{cases} \tag{1}$$

здесь $i = 0, 1, 2, \ldots$, а также выполняется условие нормировки

$$\sum_{i=0}^{\infty}\{P(0,i,t) + P(1,i,t)\} = 1.$$

Запишем систему (1) для стационарного распределения $P(n,i,t)=P(n,i)$:

$$\begin{cases} -(\lambda+i\sigma)P(0,i)+\mu P(1,i)=0, \\ -(\lambda+\mu)P(1,i)+\lambda P(0,i)+\sigma(i+1)P(0,i+1)+\lambda P(1,i-1)=0. \end{cases}$$

Определим характеристические функции равенством

$$H(n,u)=\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{e}^{jui}P(n,i),$$

где $j=\sqrt{-1}$ — мнимая единица. Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathrm{e}^{jui}iP(n,i)=-j\,\frac{\partial H(n,u)}{\partial u},$$

тогда система уравнений для характеристических функций примет вид

$$\begin{cases} -\lambda H(0,u)+\sigma j\,\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}+\mu H(1,u)=0, \\ -(\lambda+\mu)H(1,u)+\lambda H(0,u)-\sigma j\mathrm{e}^{-ju}\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}+\lambda\mathrm{e}^{ju}H(1,u)=0, \end{cases}$$

откуда получим следующую систему:

$$\begin{cases} -\sigma j\,\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}=-\lambda H(0,u)+\mu H(1,u), \\ \sigma j\mathrm{e}^{-ju}\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}=\lambda H(0,u)+(\lambda(\mathrm{e}^{ju}-1)-\mu)H(1,u), \end{cases} \tag{2}$$

решение $\{H(0,u),\ H(1,u)\}$ которой удовлетворяет условию нормировки

$$H(0,0)+H(1,0)=1.$$

Для компактной записи вычислений дальнейшие исследования будем проводить в матричном виде. Обозначим вектор-строку $H(u)=\{H(0,u),\ H(1,u)\}$, матрицы $A(ju)$ и $B(ju)$ запишем в виде

$$A(ju)=\begin{pmatrix} -1 & \mathrm{e}^{-ju} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ju)^{\nu}}{\nu!}A_{\nu},$$

$$B(ju)=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & \lambda(\mathrm{e}^{-ju}-1)-\mu \end{pmatrix}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ju)^{\nu}}{\nu!}B_{\nu},$$

где

$$A_0=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\quad A_{\nu}=\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\nu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\quad B_0=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix};\quad B_{\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(-1)^{\nu} \end{pmatrix}.$$

Используя введённые обозначения, систему (2) запишем как

$$j\sigma\frac{\partial H(u)}{\partial u}A(ju) = H(u)B(ju), \tag{3}$$

$$H(0)E = 1, \tag{4}$$

где E — единичный двумерный вектор-столбец; $H(u)$ — двумерная векторная характеристическая функция; равенство (4) — условие нормировки.

3. RQ-система с входящим MMP-потоком. Рассмотрим однолинейную ($N = 1$) RQ-систему с источником повторных вызовов, на вход которой поступает MMP-поток заявок, заданный матрицей Q инфинитезимальных характеристик $q_{\nu k}$ цепи Маркова $k(t)$, управляющей MMP-потоком и диагональной матрицей Λ, определяемой условными интенсивностями λ_k.

Здесь, как и для системы с простейшим входящим потоком, $i(t)$ — число заявок в ИПВ, а $n(t)$ определяет состояние прибора.

Обозначим $P\{n(t) = n,\ k(t) = k,\ i(t) = i\} = P(n, k, i, t)$ вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии n, а управляющая MMP-потоком цепь Маркова $k(t)$ — в состоянии k и в источнике повторных вызовов i заявок.

Для распределения вероятностей $P(n, k, i, t)$ состояний $\{n, k, i\}$ рассматриваемой RQ-системы дифференциальные уравнения Колмогорова имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(0,k,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + i\sigma)P(0,k,i,t) + \mu P(1,k,i,t) + \sum\limits_{\nu} P(0,\nu,i,t)q_{\nu k}, \\ \dfrac{\partial P(1,k,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + \mu)P(1,k,i,t) + \lambda_k P(0,k,i,t) + \sigma(i+1)P(0,k,i+1,t) + \\ + \lambda_k P(1,k,i-1,t) + \sum\limits_{\nu} P(1,\nu,i,t)q_{\nu k}, \end{cases} \tag{5}$$

здесь $i = 0, 1, 2, \ldots$, а также выполняется условие нормировки

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k}\{P(0,k,i,t) + P(1,k,i,t)\} = 1.$$

Определим характеристические функции вида

$$H(n,k,u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{e}^{jui}P(n,k,i,t) = P\{n(t) = n,\ k(t) = k\}M\{\mathrm{e}^{jui(t)} \mid n(t) = n,\ k(t) = k\}.$$

Тогда для стационарного распределения $P(n, k, i, t) = P(n, k, i)$ получаем систему уравнений для векторных характеристических функций:

$$\begin{cases} \sigma j\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u} = H(0,u)(Q - \Lambda) + \mu H(1,u), \\ \sigma j\mathrm{e}^{-ju}\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u} = H(0,u)\Lambda + H(1,u)(Q + (\mathrm{e}^{ju} - 1)\Lambda - \mu I), \end{cases} \tag{6}$$

где I — диагональная единичная матрица, а векторы-строки $H(0,u)$, $H(1,u)$ имеют вид

$$H(0,u)=\{H(0,1,u),\ H(0,2,u),\ \ldots,\ H(0,N,u)\},$$

$$H(1,u)=\{H(1,1,u),\ H(1,2,u),\ \ldots,\ H(1,N,u)\}.$$

Решение $\{H(0,u),\ H(1,u)\}$ системы (6) удовлетворяет условию нормировки

$$H(0,0)+H(1,0)=R$$

(R — вектор стационарного распределения вероятностей цепи Маркова $k(t)$).

Введём матрицы $A(ju)$ и $B(ju)$ блочного вида:

$$A(ju)=\begin{pmatrix} -I & \mathrm{e}^{-ju}I \\ O & O \end{pmatrix}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ju)^\nu}{\nu!}A_\nu,$$

$$B(ju)=\begin{pmatrix} Q-\Lambda & \Lambda \\ \mu I & Q+(\mathrm{e}^{ju}-1)\Lambda-\mu I \end{pmatrix}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(ju)^\nu}{\nu!}B_\nu,$$

здесь I — диагональная единичная матрица размера $N\times N$, а O — нулевая матрица размера $N\times N$. Тогда систему (6) перепишем в матричном виде:

$$j\sigma\frac{\partial H(u)}{\partial u}A(ju)=H(u)B(ju), \tag{7}$$

$$H(0)E=I, \tag{8}$$

где E — единичный $(2\times N)$-мерный вектор-столбец.

Аналогичным образом записывается матричное уравнение для векторных характеристических функций RQ-системы с входящим MMP-потоком, различие заключается только в виде матриц $A(ju)$ и $B(ju)$.

Уравнения для характеристических функций всех рассматриваемых RQ-систем имеют одинаковый матричный вид (7), (8), отличающийся лишь размерами матриц $A(ju)$ и $B(ju)$. Поэтому предлагаемый далее метод асимптотических семиинвариантов в условии большой задержки при $\sigma\to 0$ применим для анализа всех перечисленных в данной работе RQ-систем.

4. Метод асимптотических семиинвариантов реализуется в построении последовательности асимптотик возрастающего порядка, в котором асимптотика первого порядка аналогично закону больших чисел определяет асимптотическое среднее значение числа заявок в ИПВ. Асимптотика второго порядка аналогично центральной предельной теореме позволяет построить гауссовскую аппроксимацию распределения вероятностей состояний ИПВ. Асимптотики более высокого порядка определяют соответствующие семиинварианты и аппроксимации распределения вероятностей, выполняющие более детальное исследование рассматриваемой характеристики.

Асимптотика первого порядка. Для нахождения асимптотики первого порядка обозначим $\sigma=\varepsilon$ и в уравнении (7) выполним замены:

$$u=\varepsilon w,\quad H(u)=F_1(w,\varepsilon).$$

Тогда уравнение (7) примет вид

$$j\frac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}A(j\varepsilon w) = F_1(w,\varepsilon)B(j\varepsilon w), \tag{9}$$

а равенство (8) запишется как

$$F_1(0,\varepsilon)E = 1. \tag{10}$$

Далее сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Предельное (при $\varepsilon \to 0$) значение $F_1(w)$ решения $F_1(w,\varepsilon)$ уравнения (9), удовлетворяющего условию (10), имеет вид

$$F_1(w) = R\mathrm{e}^{jw\kappa_1},$$

где вектор R — решение системы

$$R(B_0 + \kappa_1 A_0) = 0, \tag{11}$$

удовлетворяющее условию нормировки

$$RE = 1, \tag{12}$$

а величина κ_1 есть решение нелинейного уравнения

$$R(B_1 + \kappa_1 A_1)E = 0,$$

в котором вектор $R = R(\kappa_1)$ зависит от κ_1 и является решением системы (11), (12).

Найденные функции $F_1(w)$ служат основой построения асимптотики первого порядка.

Определение. Функцию

$$h_1(u) = \exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\sigma}\right\}$$

будем называть асимптотикой первого порядка характеристической функции $h(u) = H(0,u) + H(1,u)$ числа заявок $i(t)$ в ИПВ, а величину κ_1/σ — асимптотическим семиинвариантом первого порядка.

Асимптотика второго порядка. Для определения асимптотики второго порядка в уравнении (7) выполним замену:

$$H(u) = \exp\left\{j\frac{u}{\sigma}\kappa_1\right\}H_2(u),$$

тогда для вектора-функции $H_2(u)$ получим уравнение

$$j\sigma\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}A(ju) = H_2(u)\{B(ju) + \kappa_1 A(ju)\}, \tag{13}$$

решение $H_2(u)$ которого удовлетворяет условию

$$H_2(0)E = 1. \tag{14}$$

Теперь в системе (13), (14) обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и выполним замены:

$$u = \varepsilon w, \quad H_2(u) = F_2(w,\varepsilon).$$

Получим задачу

$$j\varepsilon \frac{\partial F_2(w,\varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_2(w,\varepsilon)\{B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w)\}, \tag{15}$$

$$F_2(0,\varepsilon)E = 1. \tag{16}$$

Аналогично теореме 1 была сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 2. Предельное (при $\varepsilon \to 0$) значение $F_2(w)$ решения $F_2(w,\varepsilon)$ уравнения (15), удовлетворяющего условию (16), имеет вид

$$F_2(w) = R \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\},$$

где вектор R определён в теореме 1, а величина κ_2 задаётся равенством

$$\kappa_2 = -\frac{g_1(B_1 + \kappa_1 A_1)E + \frac{1}{2}R(B_2 + \kappa_1 A_2)E}{RA_1E + g(B_1 + \kappa_1 A_1)E},$$

в котором векторы g, g_1 являются произвольными частными решениями следующих систем уравнений:

$$g(B_0 + \kappa_1 A_0) + RA_0 = 0,$$

$$g_1(B_0 + \kappa_1 A_0) + R(B_1 + \kappa_1 A_1) = 0.$$

Найденные функции $F_2(w)$ служат основой построения асимптотики второго порядка.

Определение. Функцию

$$h_2(u) = \exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma}\right\}$$

будем называть асимптотикой второго порядка характеристической функции $h(u)$ числа заявок $i(t)$ в ИПВ, а величину κ_2/σ — асимптотическим семиинвариантом второго порядка.

Асимптотика произвольного порядка. Для нахождения асимптотики произвольного порядка была сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 3. Предельное (при $\varepsilon \to 0$) значение $F_{n+1}(w)$ решения $F_{n+1}(w,\varepsilon)$ уравнения

$$j\varepsilon^n \frac{\partial F_{n+1}(w,\varepsilon)}{\partial w} A(j\varepsilon w) = F_{n+1}(w,\varepsilon)\Big\{B(j\varepsilon w) + \kappa_1 A(j\varepsilon w) + \sum_{\nu=1}^{n-1}\kappa_{\nu+1}\frac{(j\varepsilon w)^\nu}{\nu!}A(j\varepsilon w)\Big\},$$

удовлетворяющего условию

$$F_{n+1}(0,\varepsilon)E = 1,$$

имеет вид

$$F_{n+1}(w) = R\exp\left\{\frac{(jw)^{n+1}}{(n+1)!}\kappa_{n+1}\right\},$$

где вектор R определён в теореме 2, а величина κ_{n+1} вычисляется из равенства

$$\kappa_{n+1} = -\Big\{ g_n(B_1 + \kappa_1 A_1)E +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n-1} C_{n+1}^{\nu} f_\nu \Big(B_{m+1-\nu} + \sum_{k=0}^{n-\nu} C_{n+1-\nu}^{k} \kappa_{k+1} A_{n+1-\nu-k} \Big) E +$$

$$+ \frac{1}{n+1} R \Big(B_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^{k} \kappa_{k+1} A_{n+1-k} \Big) E \Big\} \Big/ \{ g(B_1 + \kappa_1 A_1)E + RA_1 E \},$$

в котором векторы g, g_n находятся из неоднородных систем линейных алгебраических уравнений

$$g(B_0 + \kappa_1 A_0) + RA_0 = 0,$$

$$g_n(B_0 + \kappa_1 A_0) + \sum_{\nu=1}^{n-1} C_n^{\nu} f_\nu \Big(B_{n-\nu} + \sum_{k=0}^{n-\nu} C_{n-\nu}^{k} \kappa_{k+1} A_{n-\nu-k} \Big) +$$

$$+ R \Big(B_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \kappa_{k+1} A_{n-k} \Big) = 0$$

и произвольных дополнительных условий, определяющих частные решения этих систем из множества всех их решений, а векторы f_ν задаются разложениями

$$f_\nu = g_\nu + \kappa_{\nu+1} g, \quad \nu = \overline{1, n-1}.$$

Найденные функции $F_{n+1}(w)$ служат основой построения асимптотики произвольного порядка.

Определение. Функцию

$$h_{n+1}(u) = \exp\Big\{ \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(ju)^\nu}{\nu!} \frac{\kappa_\nu}{\sigma} \Big\} \tag{17}$$

будем называть асимптотикой $(n+1)$-го порядка характеристической функции $h(u)$ числа заявок $i(t)$ в ИПВ, а величину κ_{n+1}/σ — асимптотическим семиинвариантом $(n+1)$-го порядка.

Рассмотрим применимость асимптотических результатов на примере исследования однолинейной RQ-системы с простейшим входящим потоком, так как для неё можно получить характеристическую функцию в явном виде в допредельной ситуации.

5. Область применимости результатов асимптотического анализа RQ-систем. Не трудно показать, что решение $\{H(0,u),\, H(1,u)\}$ системы (2), удовлетворяющее условию нормировки $H(0,0)+H(1,0)=1$, имеет вид

$$H(0,u)=\Big(1-\frac{\lambda}{\mu}\Big)\Big(\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda e^{ju}}\Big)^{\lambda/\sigma},\quad H(1,u)=\frac{\lambda}{\mu}\Big(\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda e^{ju}}\Big)^{(\lambda+\sigma)/\sigma}.$$

В результате получена характеристическая функция $h(u)$ в явном виде:

$$h(u)=Me^{jui(t)}=[1-\rho(e^{ju}-1)]\Big(\frac{1-\rho}{1-\rho e^{ju}}\Big)^{(\lambda+\sigma)/\sigma}. \tag{18}$$

С помощью обратного преобразования Фурье и допредельной характеристической функции $h(u)$ найдём вид распределения вероятностей числа заявок в ИПВ [8]:

$$P(i)=\sum_k P(k,i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui}h(u)du. \tag{19}$$

Используя выражение для асимптотики произвольного порядка (17), полученное в теореме 3, и обратное преобразование Фурье, запишем асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов:

$$P_\nu(i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui}h_\nu(u)du. \tag{20}$$

Распределение (20) будем называть асимптотической аппроксимацией ν-го порядка допредельного распределения.

Теперь выясним, насколько результаты асимптотического анализа близки к результатам, полученным в допредельной ситуации.

Найдём расстояние Колмогорова между распределениями (19) и (20):

$$D_\nu=\max_{0\le m\le\infty}\Big|\sum_{i=0}^{m}P_\nu(i)-\sum_{i=0}^{m}P(i)\Big|,$$

В качестве примера возьмём параметры, равные интенсивности входящего потока $\lambda = 0{,}5$ и времени обслуживания $\mu=1$, и параметр σ, характеризующий среднее время задержки в ИПВ. Последовательно уменьшая параметр σ, сравним результаты для аппроксимации второго (D_2) и третьего (D_3) порядков (см. таблицу).

Очевидно, что с уменьшением значений величины σ расстояние D уменьшается, т. е. повышается точность аппроксимации допредельного распределения асимптотическим распределением.

σ	D_2	D_3
0,10	0,1601	0,1202
0,05	0,1246	0,0997
0,01	0,0588	0,0417
0,005	0,0416	0,0288
0,001	0,0186	0,0120

Заключение. В данной работе проведено исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов. Создан унифицированный подход, позволяющий свести исследование рассматриваемых систем с простейшим коррелированным входящим потоком и конечным числом обслуживающих приборов к решению матричных уравнений одинаковой структуры.

Для однолинейной RQ-системы с простейшим входящим потоком известно допредельное распределение (19), что дало возможность сравнить его с аппроксимацией, найденной с помощью метода асимптотического анализа.

В результате большого количества численных экспериментов можно сделать вывод о том, что применение метода асимптотического анализа к исследованию RQ-систем целесообразно при $\sigma \leq 0{,}005$. Таким образом, допредельное распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов находится с использованием асимптотической аппроксимации второго и третьего порядков.

Предложенный метод асимптотического анализа позволяет провести исследования математических моделей вычислительных систем в виде RQ-систем, а также существенно повысить качество анализа пропускной способности телекоммуникационных каналов, в том числе при непуассоновском входящем потоке данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хорошевский В. Г., Павский В. А.** Расчет показателей эффективности функционирования распределенных вычислительных систем // Автометрия. 2008. **44**, № 2. С. 3–15.
2. **Falin G. I.** A survey of retrial queues // Queueing Systems. 1990. N 7. P. 127–167.
3. **Falin G. I., Templeton J. G. C.** Retrial queues. London: Chapman and Hall, 1997. 328 p.
4. **Назаров А. А., Судыко Е. А.** Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа // Проблемы передачи информации. 2010. **46**, № 1. С. 94–111.
5. **Artalejo J. R., Gómez-Corral A.** Retrial queueing systems. A computational approach. Berlin — Heidelberg: Springer Verlag, 2008. 318 p.
6. **Назаров А. А., Моисеева С. П.** Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
7. **Назаров А. А., Терпугов А. Ф.** Теория массового обслуживания: Учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.
8. **Назаров А. А., Семенова И. А.** Сравнение асимптотических и допредельных результатов анализа системы M/M/1/ИПВ: Сб. науч. статей. Минск: РИВШ, 2010. № 3. С. 272–277.

Поступила в редакцию 11 января 2011 г.