УДК 519.24 + 621.391

НОВЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ВЫБОРКАМИ, БОЛЕЕ МОЩНЫЙ, ЧЕМ КРИТЕРИИ ВИЛКОКСОНА И УИТНИ*

Г. И. Салов

Учреждение Российской академии наук
Институт вычислительной математики и математической геофизики
Сибирского отделения РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6
E-mail: sgi@ooi.sscc.ru

Предлагаются новые непараметрические статистики и основанный на них критерий (тест) для проверки гипотезы однородности трёх и двух выборок, одна из которых содержит чётное число элементов и, значит, может быть разбита на две выборки, против альтернативной гипотезы, состоящей в том, что случайные величины одной выборки стохастически больше случайных величин двух других выборок. Критерий чувствителен главным образом к сдвигам распределений и является более мощным, чем критерии Вилкоксона — Манна — Уитни и Уитни, по крайней мере для задач с выборками из экспоненциальных и равномерных распределений.

Ключевые слова: две выборки, три выборки, критерии однородности, непараметрические критерии, зашумлённое изображение, обнаружение объектов.

1. Введение. Постановка задачи. Предлагаемая работа примыкает к исследованиям автора [1, 2], но может читаться независимо. Для ясности рассмотрим сначала один важный пример.

Пример. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ — совокупность наблюдений (результатов измерений), полученных в m «точках» заданной области возможного положения некоторого важного для наблюдателя протяжённого объекта на зашумлённом изображении, и пусть в целях обнаружения этого объекта в случае его присутствия одновременно по обе стороны от этой области (симметрично) берутся ещё две совокупности наблюдений (две выборки) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Многие другие способы наблюдений, в частности, в радиолокации также могут быть приведены к этой схеме (см., например, [3]). Пусть, кроме того, наблюдателю из «физического» смысла и/или прошлого опыта известно, что если в поле зрения объект отсутствует, то $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ можно рассматривать как стохастически независимые случайные величины с одной и той же непрерывной функцией распределения вероятностей, скажем $F(x)$. Если же интересующий наблюдателя объект находится на заданной области, то величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ имеют тенденцию быть стохастически больше величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$, т. е. каждая из величин ζ_i имеет другую непрерывную функцию распределения вероятностей $G(x)$, $G(x) \leq F(x)$. Но функции $F(x)$ и $G(x)$ не известны наблюдателю (типичный на практике случай).

Задача состоит в том, чтобы по трём выборкам $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ распознать (обнаружить) тот случай, когда объект присутствует. Требуется указать алгоритм, приводящий к такому результату с максимальной вероятностью. С точки зрения математической статистики это задача теории проверки гипотез. Чтобы свести к минимуму риск

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-07-00131-а).

сделать неверный вывод, следует проверить статистическую гипотезу H_0 об отсутствии объекта, означающую, что случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$ одинаково распределены, при естественной альтернативной гипотезе H_1, состоящей в том, что величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ стохастически больше величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$ одновременно (объект присутствует).

В работах многих авторов, в том числе и в [3], в качестве альтернативной к H_0 берут гипотезу о том, что величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ стохастически больше величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$, объединённых в одну выборку. В лучших из этих работ используют критерий Вилкоксона, предложенный в 1945 г., или Манна — Уитни. Эти критерии эквивалентны, поскольку их статистики фукционально связаны [4, 5]. Однако в случае объединения выборок гипотеза H_0 может быть легко ошибочно отклонена в пользу H_1, когда в поле зрения будет присутствовать не протяжённый объект, интересующий наблюдателя, а, например, контур некоторого не представляющего для наблюдателя никакого интереса («мешающего») объекта. Другими словами, рассматриваемая альтернативная гипотеза H_1 сильнее учитывает форму важного для наблюдателя протяжённого объекта.

Итак, требуется указать (построить) статистический критерий (или критерии), желательно оптимальный или близкий к нему, для проверки гипотезы H_0 против H_1, а также определить вероятности возможных ошибочных решений, характеризующие этот критерий (или критерии).

Обозначим через $\mathbf{I}\{A\}$ функцию-индикатор события A, равную 1, если событие A произошло, и 0 в противном случае. Еще в 1951 г. Уитни в работе [6] для проверки гипотезы H_0 против H_1 предложил (непараметрический) статистический критерий, основанный на паре непараметрических статистик типа Манна — Уитни:

$$U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{\zeta_i > \xi_j\}; \quad V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{\zeta_i > \psi_j\}. \tag{1.1}$$

Предложенный им критерий отвергает гипотезу H_0 в пользу H_1, когда одновременно $U > C_1$ и $V > C_1$, где критическое значение C_1 выбирается по заранее заданному допустимому уровню значимости α (уровню вероятности отвергнуть гипотезу H_0, когда она правильна) и равно наименьшему целому C, при котором выполняется неравенство

$$\sum_{u>C} \sum_{v>C} \mathbf{P}\{U = u, V = v \mid H_0\} \le \alpha.$$

Работа Уитни, в отличие от работ Вилкоксона и Манна и Уитни, посвящённых задаче с двумя выборками, долгое время оставалась почти незамеченной специалистами-прикладниками.

Насколько нам известно, для задач с двумя и тремя выборками лучшего критерия, чем критерии Вилкоксона — Манна — Уитни и Уитни, до сих пор не было предложено в литературе. Для краткости эти критерии будем обозначать через WMW и Wh соответственно.

Целью данной работы является получение более мощного критерия.

2. Новый критерий. Известно, что нередко эффективность непараметрических критериев ниже эффективности «хороших» параметрических критериев и сколько-нибудь развитая теория об оптимальных критериях существует именно в параметрическом случае (см., например, [7, 8]). Поэтому естественно пытаться как-то «параметризовать» упомянутую задачу.

Для $m = n$ наиболее простым способом сделать это является группировка наблюдений в тройки (ξ_i, ζ_i, ψ_i), $i = 1, \ldots, m$. Если верна гипотеза H_0, то вероятность p^+ события

$E_i^+ = \{\zeta_i > \max(\xi_i,\, \psi_i)\}$ будет равна вероятности p^- события $E_i^- = \{\zeta_i < \min(\xi_i,\, \psi_i)\}$: $p^+ = p^- = 1/3$. При нарушении однородности эти вероятности ведут себя по-разному относительно значения 1/3. При гипотезе H_1 вероятность $\mathbf{P}\{E_i^+ \mid H_1\}$ будет больше 1/3, а вероятность $\mathbf{P}\{E_i^- \mid H_1\}$ — меньше 1/3, так что гипотезы H_0 и H_1 в параметрах p^+ и p^- могут быть записаны в виде $H_0\colon p^+ = p^-$ и $H_1\colon p^+ > p^-$.

В [1, 2] были введены статистики

$$\nu^+ = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{I}\{E_i^+\}; \quad \nu^- = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{I}\{E_i^-\}; \quad \nu^0 = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{I}\{E_i^0\}. \tag{2.1}$$

Среди всех критериев, основанных на статистиках (2.1), существует критерий, равномерно наиболее мощный относительно альтернативы H_1, т. е. отвергающий гипотезу H_0 с наибольшей вероятностью, когда верна гипотеза H_1 (доказательство этого факта совпадает с рассуждениями, приведёнными, например, в [7, гл. 4, п. 7] и [1]). Он получается из условного распределения статистики ν^+ при заданном значении $\nu^0 = z$, которое является биномиальным с параметром $p = 1/2$ и числом независимых испытаний $m - z$. Этот критерий или, точнее, его так называемый нерандомизированный (детерминированный) вариант, отвергает гипотезу H_0 в пользу H_1, когда

$$\nu^+ > h_1(\nu^0), \tag{2.2}$$

где критическое значение $h_1 = h_1(z)$ — наименьшее целое число h такое, что

$$\sum_{i=h+1}^{m-z} \binom{m-z}{i} 2^{-(m-z)} \le \alpha. \tag{2.3}$$

Поскольку знак равенства из-за дискретности левой части может не достигаться, выбирая α, необходимо следить за истинным уровнем значимости критерия (2.2), который запишем как

$$\mathbf{P}\{\nu^+ > h_1(\nu^0) \mid H_0\} = \sum_{z=0}^{m} \mathbf{P}\{\nu^+ > h_1(z) \mid \nu^0 = z;\, H_0\}\mathbf{P}\{\nu^0 = z \mid H_0\}. \tag{2.4}$$

Будем обозначать критерий (2.2) через ν.

При сравнении критериев оказалось, что ν-критерий, вообще говоря, не мощнее критерия Уитни (подробности см. далее). Это можно объяснить тем, что группировка наблюдений в отдельные независимые тройки (ξ_i, ζ_i, ψ_i), $i = 1, \ldots, m$, не обеспечивает достаточно полного сопоставления выборок.

Поэтому в общем случае введём в рассмотрение расширенное множество событий:

$$E_{ij}^+ = \{\zeta_i > \max(\xi_j, \psi_j)\}, \quad E_{ij}^- = \{\zeta_i < \min(\xi_j, \psi_j)\}, \quad E_{ij}^0 = \bar{E}_{ij}^+ \cap \bar{E}_{ij}^-,$$

и более «богатые» статистики:

$$S_E^+ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{E_{ij}^+\}; \quad S_E^- = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{E_{ij}^-\}; \quad S_E^0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{E_{ij}^0\}. \tag{2.5}$$

Статистики (2.5) принимают значения от 0 до mn с суммой $S_E^+ + S_E^- + S_E^0 = mn$, на основе этих статистик можно строить новые критерии.

Тот факт, что среди всех критериев, основанных на статистиках (2.1), критерий (2.2) является наиболее мощным для своего уровня значимости, наводит на мысль рассмотреть критерий, построенный с помощью условного распределения S_E^+ при фиксированном значении $S_E^0 = z$, т. е. условной вероятности $\mathbf{P}\{S_E^+ \le u \mid S_E^0 = z;\ H_0\}$. При этом условная критическая область определяется неравенством $\{u > h_2(z) = h_2(z, \alpha)\}$. Эти соображения приводят нас к S_E-критерию вида

$$S_E^+ > h_2(S_E^0). \tag{2.6}$$

Очевидно, S_E-критерий является непараметрическим, так как распределение статистик (2.5) при гипотезе H_0 не зависит от неизвестной непрерывной функции распределения $F(x)$ (её параметров).

Истинный уровень значимости S_E-критерия запишем в виде

$$\mathbf{P}\{S_E^+ > h_2(S_E^0) \mid H_0\} = \sum_{z=0}^{mn} \mathbf{P}\{S_E^+ > h_2(z) \mid S_E^0 = z;\ H_0\}\mathbf{P}\{S_E^0 = z \mid H_0\}. \tag{2.7}$$

Теорема. Критерий Вилкоксона — Манна — Уитни эквивалентен частному случаю S_E-критерия и уступает ему по мощности, по крайней мере в ситуациях с экспоненциальными и равномерными распределениями.

Доказательство. Критерий Манна — Уитни есть частный случай S_E-критерия, когда $h(z)$ — линейная функция вида $2h(z) \equiv C_2 - z$, $z = 0, 1, \ldots, mn$. Действительно, в этом случае справедливы следующие равенства для событий:

$$\{S_E^+ > (C_2 - S_E^0)/2)\} = \{2S_E^+ + S_E^0 > C_2\} = \{U > C_2\}, \tag{2.8}$$

где U — статистика критерия Манна — Уитни, которая в отличие от статистики, фигурирующей в (1.1), построена по выборке $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ и объединённой выборке $(\xi_1, \ldots, \xi_n,\ \psi_1, \ldots, \psi_n)$ и совпадает с точностью до константы со статистикой критерия Вилкоксона (см., например, [5]). Это означает, что WMW-критерий не мощнее S_E-критерия.

Далее, если в качестве первоначального значения $h_2(z)$, $z = 0, 1, \ldots, mn$, взять наименьшее h такое, что

$$\mathbf{P}\{S_E^+ > h \mid S_E^0 = z,\ H_0\} \le \alpha \tag{2.9}$$

при подходящем α, то чтобы получить S_E-критерий мощнее WMW-критерия, по крайней мере в случае экспоненциальных и равномерных распределений, достаточно подправить (уменьшить) ряд наибольших значений $h_2(0), h_2(1), \ldots$. При этом благодаря малости соответствующего ряда вероятностей $\mathbf{P}\{S_E^0 = 0 \mid H_0\}$, $\mathbf{P}\{S_E^0 = 1 \mid H_0\}, \ldots$ истинный уровень значимости S_E-критерия лишь несколько увеличится, зато мощность критерия может значительно возрасти, что будет показано далее.

Проблема оптимальных критических значений $h_2(z)$, $z = 0, \ldots, mn$, остаётся открытой.

3. О мощности критериев. Весьма интересно сравнить мощности критериев Wh, ν, WMW и S_E. Для расчёта критериев (вычисления критических значений и мощности) необходимы распределения статистик критериев при H_0 и H_1. Получим их при H_0.

Под l-разбиением $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(n)$ числа n будем понимать совокупность, состоящую из l целых неотрицательных (≥ 0) чисел, расположенных в некотором определённом порядке, сумма которых равна n. Пусть $\mathfrak{p}' = \{n_0', n_1', \ldots, n_m'\}$ и $\mathfrak{p}'' = \{n_0'', n_1'', \ldots, n_m''\}$ — два $(m+1)$-разбиения числа n.

Удобно положить $0! = 1$.

Предложение 1 (см. [2]). Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — независимые случайные величины. Если каждая из них имеет одну и ту же непрерывную функцию распределения вероятностей $F(x)$, т. е. верна гипотеза H_0, то

$$\mathbf{P}\{U = u,\, V = v \mid H_0\} = \frac{m!(n!)^2}{(m+2n)!} \sum_{\mathfrak{p}'(n)} \sum_{\mathfrak{p}''(n)} \prod_{i=0}^{m} \binom{n_i' + n_i''}{n_i'},$$

где суммирование проводится по тем парам $(m+1)$-разбиений $(\mathfrak{p}'(n), \mathfrak{p}''(n))$, для которых

$$\sum_{i=0}^{m} (m-i) n_i' = u; \quad \sum_{i=0}^{m} (m-i) n_i'' = v. \tag{3.1}$$

Получим теперь явную формулу для совместного распределения статистик (2.5) при H_0. Обозначим через $\mathfrak{P}(u,v)$ множество тех $(m+1)^2$-разбиений $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(n)$ вида

$$n_{00}, n_{01}, \ldots, n_{0m}, n_{10}, n_{11}, \ldots, n_{1m}, \ldots, n_{m(m-1)}, n_{mm},$$

для которых

$$\sum_{h=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (m - \max(h,k)) n_{hk} = u; \quad \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \min(h,k) n_{hk} = v. \tag{3.2}$$

Предложение 2. Пусть выполнены условия предложения 1. Тогда имеет место формула

$$\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\, S_E^- = v \mid H_0\} = \frac{m!n!}{(m+2n)!} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(u,v)} \Big(\prod_{k=0}^{m} s_k! \Big) \Big(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}! \Big)^{-1}, \tag{3.3}$$

где

$$s_k = \sum_{h=0}^{m} (n_{hk} + n_{kh}), \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{3.4}$$

Доказательство. В силу предположения непрерывности $F(x)$ без ограничения общности можно считать, что величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ имеют различные значения. Обозначим $\zeta_{(1)} < \zeta_{(2)} < \cdots < \zeta_{(m)}$ эти величины, расположенные в порядке возрастания их значений.

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Введём в рассмотрение $m+1$ открытых промежутков $I_0 = (-\infty, x_1)$, $I_k = (x_k, x_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, $I_m = (x_m, \infty)$, а также $(m+1)^2$ прямоугольников вида $I_{hk} = I_h \times I_k$, $h, k = 0, 1, \ldots, m$. В силу предположения непрерывности $F(x)$ для вероятности p_k попадания случайной величины ξ_j (или ψ_j) в промежуток I_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, имеем очевидные равенства

$$p_0 = F(x_1), \quad p_k = F(x_{k+1}) - F(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad p_m = 1 - F(x_m).$$

Предположение о независимости наблюдений приводит к тому, что вероятность попадания пары (ξ_j, ψ_j) в прямоугольник I_{hk} равна $p_{hk} = p_h p_k$.

Отсюда вероятность того, что из всех n пар ровно n_{00} пар попадёт в прямоугольник I_{00}, а также соответственно ровно n_{hk} пар попадёт в прямоугольник I_{hk} $(h, k = 0, 1, \ldots, m)$, связана с полиномиальным распределением (см., например, [9, гл. 6, § 9]) и запишется в виде

$$\frac{n!}{n_{00}!n_{01}!\cdots n_{0m}!n_{10}!n_{11}!\cdots n_{m(m-1)}!n_{mm}!}\,p_{00}^{n_{00}}p_{01}^{n_{01}}\cdots p_{0m}^{n_{0m}}p_{10}^{n_{10}}p_{11}^{n_{11}}\cdots p_{m(m-1)}^{n_{m(m-1)}}p_{mm}^{n_{mm}} =$$

$$= \frac{n!}{n_{00}!n_{01}!\cdots n_{0m}!n_{10}!n_{11}!\cdots n_{m(m-1)}!n_{mm}!}\,\{F(x_1)\}^{2n_{00}}\{F(x_1)[F(x_2)-F(x_1)]\}^{n_{01}}\times\cdots$$

$$\cdots\times\{F(x_1)[1-F(x_m)]\}^{n_{0m}}\{[F(x_2)-F(x_1)]F(x_1)\}^{n_{10}}\{F(x_2)-F(x_1)\}^{2n_{11}}\times\cdots$$

$$\cdots\times\{[F(x_m)-F(x_{m-1})][1-F(x_m)]\}^{n_{m(m-1)}}\{1-F(x_m)\}^{2n_{mm}} =$$

$$= \frac{n!}{n_{00}!n_{01}!\cdots n_{0m}!n_{10}!n_{11}!\cdots n_{m(m-1)}!n_{mm}!}\,[F(x_1)]^{s_0}[F(x_2)-F(x_1)]^{s_1}\times$$

$$\times[F(x_3)-F(x_2)]^{s_2}\cdots[F(x_m)-F(x_{m-1})]^{s_{m-1}}[1-F(x_m)]^{s_m}.$$

Если при этом $\zeta_{(1)} = x_1, \zeta_{(2)} = x_2, \ldots, \zeta_{(m)} = x_m$, то согласно (2.5) будем иметь

$$S_E^+ = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{h,k=0}^{i} n_{hk};\quad S_E^- = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h,k=i}^{m} n_{hk}. \tag{3.5}$$

Из представлений (3.5) с помощью индукции по m следуют представления (3.2), более простые с вычислительной точки зрения.

Таким образом, условная вероятность

$$\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\, S_E^- = v \,|\, \zeta_{(1)} = x_1, \ldots, \zeta_{(m)} = x_m;\, H_0\}$$

может быть записана в виде

$$n! \sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}(u,v)} \Big(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}!\Big)^{-1}[F(x_1)]^{s_0}[F(x_2)-F(x_1)]^{s_1}\times$$

$$\times[F(x_3)-F(x_2)]^{s_2}\cdots[F(x_m)-F(x_{m-1})]^{s_{m-1}}[1-F(x_m)]^{s_m}. \tag{3.6}$$

Чтобы получить вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\, S_E^- = v \,|\, H_0\}$, введём в рассмотрение упорядоченные величины $\eta_k = F(\zeta_{(k)})$ и $y_k = F(x_k)$, $k = 1, \ldots, m$. Элемент совместного распределения величин $\eta_1, \ldots, \eta_m$ имеет вид $m!dy_1\cdots dy_m$, а само распределение сосредоточено в области, задаваемой неравенствами $0 \le y_1 < y_2 \cdots < y_m \le 1$ [10, с. 350, 11, с. 247]. Заменяя в (3.6) $F(x_k)$ значением y_k, интеграл от (3.6) по упомянутой области приведём к виду

$$m!n! \sum_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}(u,v)} \Big(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}!\Big)^{-1}\int_0^1 [1-y_m]^{s_m}dy_m \int_0^{y_m}[y_m-y_{m-1}]^{s_{m-1}}dy_{m-1}\times\cdots$$

$$\cdots \times \int\limits_0^{y_3} [y_3 - y_2]^{s_2} dy_2 \int\limits_0^{y_2} [y_2 - y_1]^{s_1} y_1^{s_0} dy_1. \qquad (3.7)$$

Вычисление интеграла в (3.7) в силу положительности подынтегральных функций сводится к последовательным интегрированиям (справа налево). Имеем (см., например, [12, п. 855.51])

$$\int\limits_0^{y_2} (y_2 - y_1)^{s_1} y_1^{s_0} dy_1 = \frac{s_0! s_1!}{(s_0 + s_1 + 1)!} y_2^{s_0 + s_1 + 1}.$$

Отсюда для интеграла по y_2 в (3.7) получаем

$$\frac{s_0! s_1!}{(s_0 + s_1 + 1)!} \int\limits_0^{y_3} [y_3 - y_2]^{s_2} y_2^{s_0 + s_1 + 1} dy_2 = \frac{s_0! s_1! s_2!}{(s_0 + s_1 + s_2 + 2)!} y_3^{s_0 + s_1 + s_2 + 2}.$$

Проведём теперь индукцию по m. Предположим (предположение индукции), что интеграл по y_{m-2} в (3.7) при $m - 2 > 2$ есть

$$\frac{s_0! s_1! s_2! \cdots s_{m-2}!}{(s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-2} + m - 2)!} y_{m-1}^{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-2} + m - 2}. \qquad (3.8)$$

Тогда для интеграла по y_{m-1} находим

$$\int\limits_0^{y_m} [y_m - y_{m-1}]^{s_{m-1}} y_{m-1}^{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-2} + m - 2} dy_{m-1} =$$

$$= \frac{(s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-2} + m - 2)! s_{m-1}!}{(s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-1} + m - 1)!} y^{s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{m-1} + m - 1}.$$

Принимая во внимание множитель в (3.8), замечаем, что представление полученного вида верно и при $m - 1$, а значит, верно для всех m.

Следовательно, интеграл по y_m в (3.7) сводится к эйлеровому интегралу 1-го рода [13, с. 750–752]. Это означает, что он равен

$$\frac{s_0! s_1! \cdots s_{m-1}!}{(s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1} + m - 1)!} \int\limits_0^1 [1 - y_m]^{s_m} y_m^{s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1} + m - 1} dy_m =$$

$$= \frac{s_0! s_1! \cdots s_m!}{(s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1} + s_m + m)!} = \frac{s_0! s_1! \cdots s_m!}{(m + 2n)!}, \qquad (3.9)$$

поскольку согласно (3.4)

$$\sum_{k=0}^{m} s_k = \sum_{k=0}^{m} \sum_{h=0}^{m} (n_{hk} + n_{kh}) = 2n.$$

Подставляя (3.9) в (3.7), получаем требуемый результат. Предложение 2 доказано.

Совместное распределение статистик S_E^+ и S_E^0 при гипотезе H_0 даётся формулой

$$\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\, S_E^0 = z \,|\, H_0\} = \mathbf{P}\{S_E^+ = u,\, S_E^- = mn - u - z \,|\, H_0\}.$$

Суммируя по $u = 0, \ldots, mn - z$, находим маргинальное распределение статистики S_E^0 при H_0. Остаётся воспользоваться известным определением условной вероятности, чтобы получить условное распределение $\mathbf{P}(S_E^+ = u \,|\, S_E^0 = z, H_0)$ статистики S_E^+ при фиксированном значении $S_E^0 = z$ и H_0, необходимое для вычисления критических значений C_2 и $h_2 = h_2(z)$ $(z = 0, 1, \ldots, mn)$, а также истинного уровня значимости S_E-критерия (2.7).

Перейдём теперь к более трудному вопросу о мощности критериев. К сожалению, при гипотезе H_1 явное вычисление возникающих интегралов, как правило, не представляется возможным. Рассмотрим сначала важный и часто встречающийся в приложениях при анализе изображений случай-исключение, когда в наблюдениях наиболее вероятны малые значения (например, яркости) и менее вероятны большие. Довольно хорошо соответствует этому случаю и сравнительно часто используется показательное (экспоненциальное) распределение (см., например, [14, 15]).

Для определённости и простоты предположим, что

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \quad (x \geq 0), \tag{3.10}$$

а $G(x)$ отличается лишь сдвигом $a > 0$:

$$G(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(x-a)} \quad (x \geq a). \tag{3.11}$$

Тогда при $x \geq a$

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-a} G(x) = b_0 + b_1 G(x), \tag{3.12}$$

где $b_0 = 1 - \exp(-a)$; $b_1 = 1 - b_0$. В этом случае удаётся получить простые выражения, зависящие от известных функций.

Предложение 3 (см. [2]). Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — независимые случайные величины, и пусть каждая из величин ξ_j и ψ_j имеет функцию распределения вероятностей (3.10), а каждая из величин ζ_i — функцию распределения (3.11), т. е. имеет место гипотеза H_1.

Тогда вероятность $\mathbf{P}\{U = u,\, V = v \,|\, H_1\}$ допускает представление

$$m!(n!)^2 \sum_{\mathfrak{p}'(n)} \sum_{\mathfrak{p}''(n)} \prod_{i=0}^{m} \binom{n'_i + n''_i}{n'_i} \sum_{r=0}^{n'_0 + n''_0} \Big(b_0^{n'_0 + n''_0 - r} b_1^{2n - n'_0 - n''_0 + r} \times$$
$$\times [(m + 2n - n'_0 - n''_0 + r)!(n'_0 + n''_0 - r)!]^{-1} \Big), \tag{3.13}$$

где, как и в предложении 1, суммирование проводится по тем парам $(m+1)$-разбиений $(\mathfrak{p}'(n), \mathfrak{p}''(n))$ числа n, которые удовлетворяют равенствам (3.1).

Предложение 4. При тех же условиях, что и в предложении 3, вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\, S_E^- = v \,|\, H_1\}$ может быть записана в виде

$$m!n! \sum_{\mathfrak{p}(n) \in \mathfrak{P}(n)} \Big(\prod_{k=0}^{m} s_k! \Big) \Big(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}! \Big)^{-1} \sum_{r=0}^{s_0} b_0^{s_0 - r} b_1^{2n - s_0 + r} [(m + 2n - s_0 + r)!(s_0 - r)!]^{-1}, \tag{3.14}$$

где s_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, как и раньше, определяются формулой (3.4).

Доказательство. Подставляя (3.12) в (3.6), замечаем, что условная вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\, S_E^- = v \,|\, \zeta_{(1)} = x_1, \ldots, \zeta_{(m)} = x_m;\, H_1\}$ допускает представление

$$n! \sum_{\mathfrak{p}(n) \in \mathfrak{P}(n)} \Big(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}! \Big)^{-1} \sum_{r=0}^{s_0} \binom{s_0}{r} b_0^{s_0 - r} b_1^{2n - s_0 + r} [G(x_1)]^r [G(x_2) - G(x_1)]^{s_1} \times$$

$$\times [G(x_3) - G(x_2)]^{s_2} \cdots [G(x_m) - G(x_{m-1})]^{s_{m-1}} [1 - G(x_m)]^{s_m}.$$

Вводя теперь в рассмотрение упорядоченные величины $\eta_k = G(\zeta_{(k)})$ и $y_k = G(x_k)$, $k = 1, \ldots, m$, аналогично (3.7) получим вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\, S_E^- = z \,|\, H_1\}$ в виде

$$m!n! \sum_{\mathfrak{p}(n) \in \mathfrak{P}(n)} \Big(\prod_{h,k=0}^{m} n_{hk}! \Big)^{-1} \sum_{r=0}^{s_0} \binom{s_0}{r} b_0^{s_0 - r} b_1^{2n - s_0 + r} \int_0^1 [1 - y_m]^{s_m} dy_m \times$$

$$\times \int_0^{y_m} [y_m - y_{m-1}]^{s_{m-1}} dy_{m-1} \cdots \int_0^{y_3} [y_3 - y_2]^{s_2} dy_2 \int_0^{y_2} [y_2 - y_1]^{s_1} y_1^r dy_1. \tag{3.15}$$

Но согласно (3.8) и (3.9) интеграл по y_m в (3.15) равен

$$\frac{r! s_1! \cdots s_{m-1}!}{(r + s_1 + \cdots + s_{m-1} + m - 1)!} \int_0^1 [1 - y_m]^{s_m} y_m^{r + s_1 + \cdots + s_{m-1} + m - 1} dy_m =$$

$$= \frac{r! s_1! \cdots s_m!}{(r + s_1 + \cdots + s_{m-1} + s_m + m)!} = \frac{r! s_1! \cdots s_m!}{(m + 2n - s_0 + r)!}. \tag{3.16}$$

Подставляя (3.16) в (3.15), получаем представление (3.14). Предложение 4 доказано.

Изучение критериев начнём с Wh и ν, мощности которых определяются формулами

$$\sum_{u > C_1} \sum_{v > C_1} \mathbf{P}\{U = u,\, V = v \,|\, H_1\}, \quad \mathbf{P}\{\nu^+ > h_1(\nu^0) \,|\, H_1\}$$

соответственно и являются функциями параметра (сдвига) a распределения (3.11). Небольшое числовое исследование выполнено для случаев $m = n = 7$ и $m = n = 9$. Полученные значения мощности для нескольких различных значений a даны в табл. 1 с точностью до трёх значащих цифр после запятой. Значения при $a = 0{,}0$ являются истинными уровнями значимости критериев (приведены с точностью до четырёх значащих цифр после запятой). Для каждого значения m первая строка принадлежит Wh-критерию с критическим значением C_1, равным 32 при $m = 7$ и 54 при $m = 9$, вторая — ν-критерию с α в (2.3), равным 0,121 при $m = 7$ и 0,08 при $m = 9$. Из сравнения приведённых в табл. 1 числовых результатов видно, что мощность ν-критерия может быть больше мощности Wh-критерия в области низких и высоких значений функции мощности, но в области средних значений его мощность может быть меньше мощности Wh-критерия.

Таблица 1

Мощности критериев Уитни и ν

m	a									
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	2,5
7	0,0607	0,102	0,160	0,233	0,408	0,582	0,782	0,940	0,985	0,996
	0,0516	0,087	0,137	0,201	0,359	0,530	0,746	0,933	0,986	0,997
9	0,0365	0,070	0,123	0,196	0,387	0,586	0,800	0,959	0,992	0,998
	0,0363	0,072	0,127	0,200	0,386	0,581	0,807	0,964	0,995	0,999

Сравним теперь мощность критерия Wh с мощностью критериев WMW и S_E. Для WMW-критерия она вычислялась и как мощность критерия Манна — Уитни, и, для убедительности, как мощность эквивалентного ему S_E-критерия с условно линейной функцией $h_2(z)$ (ср. с (2.8)) вида

$$h_2(z) \equiv \Big[\frac{C_2 - z}{2}\Big], \quad z = 0, 1, \ldots, mn, \tag{3.17}$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x. Мощность последнего вычислялась по общей формуле

$$\sum_{z=0}^{mn} \mathbf{P}\{S_E^+ > h_2(z) \,|\, S_E^0 = z;\, H_1\}\mathbf{P}\{S_E^0 = z \,|\, H_1\}.$$

Полученные значения мощности для нескольких различных значений параметра a в (3.11) и двух значений (случаев) $m = n$ сведены в табл. 2 с точностью до трёх цифр после запятой.

Как и ранее, значения при $a = 0{,}0$ являются истинными уровнями значимости критериев (приведены с точностью до четырёх значащих цифр после запятой).

В каждом случае первая строка принадлежит Wh-критерию с критическим значением C_1, равным 16 в случае $m = 5$ и 32 в случае $m = 7$. Вторая строка принадлежит критерию

Таблица 2

Мощности критериев Wh, Вилкоксона и S_E

m	a									
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	2,5
5	0,0579	0,088	0,130	0,181	0,307	0,445	0,633	0,839	0,935	0,975
	0,0496	0,078	0,120	0,175	0,317	0,477	0,691	0,898	0,972	0,992
	0,0465	0,076	0,122	0,183	0,339	0,501	0,683	0,762	0,656	0,491
	0,0470	0,077	0,123	0,185	0,344	0,514	0,723	0,907	0,970	0,990
	0,0489	0,079	0,126	0,189	0,350	0,523	0,735	0,920	0,979	0,995
7	0,0452	0,078	0,125	0,189	0,349	0,522	0,737	0,922	0,980	0,995
	0,0396	0,071	0,121	0,190	0,374	0,573	0,803	0,962	0,994	0,999
	0,0333	0,065	0,119	0,195	0,391	0,589	0,794	0,888	0,801	0,634
	0,0333	0,065	0,119	0,195	0,392	0,590	0,802	0,944	0,980	0,992
	0,0382	0,073	0,130	0,209	0,413	0,618	0,833	0,969	0,995	0,999

Таблица 3

Значения $h_2(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 25$ $(m = n = 5)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h_2	19	19	19	19	18	17	16	16	15	14	13	12	12
z	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
h_2	11	10	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Манна — Уитни и эквивалентному ему S_E-критерию с критическим значением C_2 в (2.8) и (3.17), равным 38 в первом случае и 72 во втором. Сравнение второй строки с первой в каждом случае показывает, что критерий Вилкоксона — Манна — Уитни значительно мощнее критерия Уитни.

Третья, четвёртая и пятая строки в каждом случае принадлежат S_E-критерию. В третьей строке приведены значения мощности S_E-критерия с собственными критическими значениями $h_2(z)$, $z = 0, 1, \ldots, mn$, удовлетворяющими соотношению (2.9) со значением α, равным 0,063 в первом случае ($m = 5$) и 0,04 во втором ($m = 7$). Сравнение третьей строки со второй показывает, что мощность S_E-критерия с собственными критическими значениями $h_2(z)$ больше мощности WMW-критерия в области малых и средних значений параметра a, но значительно падает при больших значениях a. Это падение связано с тем, что условная вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+ = mn \,|\, S_E^0 = 0;\ H_0\}$ приближённо равна 0,08 в случае $m = 5$ и 0,058 в случае $m = 7$, т. е. в обоих случаях она больше α в (2.9). Поэтому соотношению (2.9) отвечает критическое значение $h_2(0) = mn$, что и вызвало потерю мощности. Для четвёртой строки в обоих случаях критическое значение $h_2(0)$ было сделано равным значению $h_2(1)$. Хотя это и устранило снижение мощности в области высоких значений параметра a, но в этой области S_E-критерий всё же остался хуже WMW-критерия. Коррекции лишь одного критического значения оказалось недостаточно.

Значения мощности, полученные после замены теперь уже трёх собственных критических значений $h_2(0)$, $h_2(1)$ и $h_2(2)$, существенно, но не максимально увеличившей мощность S_E-критерия при незначительном повышении его уровня значимости, приведены в пятой строке для $m = 5$. Все соответствующие ей критические значения $h_2(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 25$, даны в табл. 3.

В последней строке табл. 2 приведены значения мощности S_E-критерия с подправленными критическими значениями $h_2(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 11$. Все критические значения $h_2(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 49$, соответствующие этой строке, приведены в табл. 4.

При каждом m из сравнения пятой и второй строк табл. 2 достаточно хорошо видно, что S_E-критерий с подходяще подобранными критическими значениями мощнее критерия Вилкоксона — Манна — Уитни.

Таблица 4

Значения $h_2(z)$, $z = 0, 1, \ldots, 49$ $(m = n = 7)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
h_2	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	32	31	31	30	29	29	28
z	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
h_2	27	26	26	25	24	23	22	22	21	20	19	19	18	17	16	16	15
z	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	—
h_2	14	13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	—

Таблица 5

Мощности критериев Вилкоксона и S_E в случае (3.18), (3.19)

m	a									
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
5	0,0496	0,080	0,132	0,211	0,325	0,471	0,637	0,798	0,922	0,987
	0,0489	0,081	0,139	0,231	0,360	0,517	0,684	0,834	0,940	0,991
7	0,0396	0,074	0,136	0,237	0,385	0,566	0,750	0,895	0,974	0,998
	0,0382	0,075	0,146	0,263	0,425	0,612	0,786	0,913	0,979	0,998

В следующем примере с равномерными распределениями имеет место не только их сдвиг, но ещё и изменение дисперсии.

Пусть

$$F(x) = x, \quad 0 \le x \le 1, \tag{3.18}$$

$$G(x) = \frac{x-a}{1-a}, \quad 0 \le a < 1, \ \ a \le x \le 1. \tag{3.19}$$

Тогда при $a \le x \le 1$

$$F(x) = a + (1-a)G(x). \tag{3.20}$$

Положив $b_0 = a$, $b_1 = 1 - b_0$, из (3.19), (3.20) и доказательства предложения 4 замечаем, что и в этом случае вероятность $\mathbf{P}\{S_E^+ = u,\ S_E^- = v \mid H_1\}$ может быть представлена с помощью (3.14).

Значения мощности критериев Вилкоксона — Манна — Уитни и S_E в случае с распределениями (3.18), (3.19), подсчитанные с теми же самыми критическими значениями C_2 и $h_2(z)$, что были взяты в случае с распределениями (3.10), (3.11), даны в табл. 5.

Первая и третья строки принадлежат критерию Вилкоксона — Манна — Уитни, вторая и четвёртая — S_E-критерию. В результате сравнения соответствующих строк замечаем, что и в этом примере S_E-критерий оказался более мощным, чем критерий Вилкоксона — Манна — Уитни.

Заключение. Проведённое в данной работе исследование в основном имело своей целью получение нового критерия, более мощного, чем критерии Вилкоксона — Манна — Уитни и Уитни. Попутно выяснилось, что критерий ν, введённый ранее в [1, 2], приблизительно равноценен по мощности критерию Уитни [6]. Большим преимуществом критерия ν является возможность его применения и при неоднородности наблюдений вдоль положения протяжённого объекта (см. также [2]), к тому же он много проще с точки зрения вычислений.

В рассмотренном первым важном случае с экспоненциальными распределениями (3.10), (3.11) наиболее мощным оказался S_E-критерий. Далее идёт распространённый критерий Вилкоксона — Манна — Уитни и, заметно уступая, критерий Уитни. Хотя этот случай и может показаться слишком специальным, в то же время он является практически общим, так как значения параметра $a > 0$ изменялись в довольно широкой области. Кроме того, поскольку S_E-критерий является непараметрическим, а «непараметрические критерии, как того и следовало ожидать, в целом значительно более устойчивы, чем «индивидуальные» критерии, обладающие свойством оптимальности в той или иной конкретной задаче» [8, с. 449], то представляется вероятным, что установленное преимущество

S_E-критерия по мощности сохранится и в более широком ряде случаев с другими распределениями; второй пример с равномерными распределениями (3.18), (3.19) подтверждает это предположение.

Поэтому новый непараметрический S_E-критерий представляется чрезвычайно полезным, в частности, для задач типа обнаружения плохо видимого протяжённого объекта на зашумлённом изображении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Салов Г. И.** Метод получения равномерно наиболее мощных критериев для обнаружения протяженных объектов на случайном фоне // Автометрия. 1995. № 1. С. 34–38.
2. **Салов Г. И.** О мощности непараметрических критериев для обнаружения протяженных объектов на случайном фоне // Автометрия. 1997. № 3. С. 60–75.
3. **Hansen V. G., Olsen B. A.** Nonparametric radar extraction using generalized sign test // IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst. 1971. **7**, N 5. P. 942–950.
4. **Гаек Я., Шидак З.** Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971. 375 с.
5. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 899 с.
6. **Whitney D. R.** A bivariate extension of the U statistic // Ann. Math. Statist. 1951. **22**, N 2. P. 274–282.
7. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964. 498 с.
8. **Боровков А. А.** Математическая статистика. М.: Физматлит, 2007. 703 с.
9. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 1. 527 с.
10. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Теория распределений. М.: Наука, 1966. 587 с.
11. **Уилкс С.** Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.
12. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
13. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 2. 800 с.
14. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. Кн. 1. 312 с. Кн. 2. 480 с.
15. **Красильников Н. Н.** Теория передачи и восприятия изображений. М.: Радио и связь, 1986. 246 с.

Поступила в редакцию 15 марта 2011 г.