УДК 519.21 : 621.391

О ПРИМЕНЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ К ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ МОМЕНТА ПОЯВЛЕНИЯ ОБЪЕКТА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАШУМЛЁННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

В. П. Пяткин, Г. И. Салов

Учреждение Российской академии наук
Институт вычислительной математики и математической геофизики
Сибирского отделения РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6
E-mail: pvp@ooi.sscc.ru
sgi@ooi.sscc.ru

Рассматривается применение стохастической аппроксимации в бесконечномерном гильбертовом пространстве к задаче обнаружения объекта на одном наблюдаемом изображении, искажённом шумом, а также к задаче скорейшего обнаружения момента появления объекта в последовательности зашумлённых изображений. Наличие априорной информации не предполагается, но предполагается, что в распоряжении наблюдателя имеются две стохастически независимые последовательности независимых «точных» реализаций зашумлённых изображений, не содержащих и содержащих объект, который наблюдатель должен будет (неоднократно) обнаруживать в ближайшее время.

Ключевые слова: зашумлённое изображение, последовательность изображений, обнаружение объектов, обнаружение с обучением.

Введение. Данная работа представляет собой продолжение [1], но может читаться и независимо от неё. Приводятся некоторые новые результаты применения стохастической аппроксимации в бесконечномерном гильбертовом пространстве к проблеме обнаружения объектов. Часто обнаружение важных объектов ведётся последовательно по ряду направлений в пространстве с остановками на каждом из них на некоторое время. Поскольку алгоритм обнаружения обычно не зависит от направления, достаточно рассмотреть проблему обнаружения на отдельном направлении. Пусть к наблюдателю поступают изображения $X_1, X_2, \ldots$, искажённые шумом. Значимый для него объект может присутствовать уже на первом изображении, но нередко он отсутствует, а затем, начиная с изображения с неизвестным заранее номером θ, появляется. Требуется обнаружить этот объект как можно скорее — по минимальному числу изображений с момента появления объекта. Данная проблема весьма важна для создания разного рода информационных систем (научного, военного и гражданского назначения). Присутствие объекта на искажённом шумом изображении проявляется в изменениях (вероятностных) характеристик изображения. Эти изменения часто незначительны и носят лишь случайный характер. Поэтому для обнаружения таких изменений, а вместе с ними и объекта, необходимо применять статистические критерии (тесты), позволяющие как можно лучше учитывать имеющуюся и наблюдаемую информацию. Проблема скорейшего обнаружения появления объекта в последовательности зашумлённых изображений является обобщением другой трудной проблемы — обнаружения важного объекта на единственном зашумлённом изображении. Сосредоточим сначала внимание на последней.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-07-00131).

Целью данной работы является исследование возможности применения стохастической аппроксимации и метода кумулятивных сумм в задаче обнаружения объектов.

Обнаружение объекта на одном наблюдаемом изображении. В большинстве практически важных ситуаций зашумлённое (случайное) изображение можно рассматривать как случайное поле и даже как случайный элемент [2] со значениями в пространстве действительных функций двух переменных (координат), заданных на некоторой ограниченной (прямоугольной) области $D \in R^2$ и интегрируемых с квадратом, т. е. как случайный элемент со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(D)$ [1, 2]. Вероятностные закономерности такого изображения обусловливаются распределением (вероятностной мерой) P, определённым на σ-алгебре борелевских подмножеств пространства $L^2(D)$ [2]. С математической точки зрения задача обнаружения объекта на одном наблюдаемом изображении $X = X(u)$, $u \in D$, — это задача с двумя предположениями (гипотезами H_0: $P = P_0$ и H_1: $P = P_1$) относительно распределения P. Нулевая гипотеза H_0 соответствует случаю, когда важного объекта нет, а есть только случайный фон. При альтернативной гипотезе H_1 изображение X содержит важный объект, интересующий наблюдателя. Требуется найти критерий (тест) для различения этих гипотез, что является задачей математической статистики случайных процессов и полей. Как известно, оптимальный критерий, отклоняющий гипотезу H_0 с наибольшей вероятностью, когда она ложна, строится с помощью функционала (отношения) правдоподобия, совпадающего с производной Радона — Никодима $\rho(X) = P_1(dX)/P_0(dX)$ на $L^2(D)$, когда мера P_1 абсолютно непрерывна относительно меры P_0. Если учитывать не всё изображение, а только отдельные величины $X(u_i)$, где $\{u_1, u_2, \ldots\}$ — ограниченное множество точек на D, что грозит большими потерями информации, то отыскание отношения правдоподобия потребует обращения специальной матрицы, которое может быть эффективно осуществлено лишь в исключительных случаях. На практике, однако, вероятностные меры P_0 и P_1 редко бывают известными наблюдателю. Даже когда они известны и мера P_1 абсолютно непрерывна относительно меры P_0, отыскание ρ (если меры P_0 и P_1 не являются гауссовскими или каким-либо образом связанными с ними) представляет собой весьма трудную задачу. Поэтому, следуя [1, 3], обратимся к другому подходу.

Пусть $\mathbf{P}$ — общая вероятностная мера, заданная на σ-алгебре всех рассматриваемых здесь событий, $\mathbf{E}$ — математическое ожидание по этой мере $\mathbf{P}$. Обозначим через $Y = Y(u)$, $u \in D$, зашумлённое изображение X, не содержащее важный объект, а через $Z = Z(u)$ — содержащее такой объект. Пусть F — функционал в $L^2(D)$ такой, что $\mathbf{E}[F(Y)]^2 < \infty$. Если функционал правдоподобия ρ существует и $\mathbf{E}[\rho(Y)]^2 < \infty$, то выражение

$$\max_F \frac{\mathbf{E}[F(Z) - F(Y)]}{\sqrt{\mathbf{D}F(Y)}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{D}$ означает дисперсию, достигает максимума при $F = k_1\rho + k_2$. Интуитивно ясно, что и в противном случае, когда $\mathbf{E}[\rho(Y)]^2 = \infty$ или функционал правдоподобия не существует вовсе, функционал F, максимизирующий выражение (1), также будет подходящим для обнаружения объекта. Таким образом, отыскание нужного функционала сводится к вариационной задаче, которую можно решать в удобном с точки зрения вычислений классе функционалов [1, 3]. Ограничимся здесь рассмотрением возможности получения линейного функционала вида

$$F(X) = \int\limits_D X(u)h(u)du. \tag{2}$$

Обозначим скалярное произведение элементов $f, g \in L^2(D)$ и норму элемента f как

$$(f,g) = \int\limits_D f(u)g(u)du, \quad \|f\| = \Big(\int\limits_D f^2(u)du\Big)^{1/2}.$$

Результат подстановки (2) в (1) можно представить в виде (в операторных обозначениях)

$$\frac{(m_Z - m_Y,\, h)}{\sqrt{(Bh, h)}}, \tag{3}$$

где $m_Z = m(Z;u) = \mathbf{E}Z(u)$, $m_Y = m(Y;u) = \mathbf{E}Y(u)$ — средние значения в точке $u \in D$, а B — интегральный оператор в $L^2(D)$ с ядром $\mu(u,v) = \mathbf{E}Y(u)Y(v) - m(Y;u)m(Y;v)$. Оператор B является вполне непрерывным, самосопряжённым и положительным, отсюда и из (3) вытекает следующий факт [1, 3, 4]. Для максимизации выражения (1) функционалом (2) необходимо и достаточно, чтобы весовая функция $h \in L^2(D)$ была решением интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int\limits_D \mu(u,v)h(v)dv = m(Z;u) - m(Y;u). \tag{4}$$

Предположим, что ядро $\mu(u,v)$, а также средние значения $m(Z;u)$ и $m(Y;u)$ неизвестны наблюдателю (типичный на практике случай), но в его распоряжении имеются (или он может получить) две независимые друг от друга последовательности независимых «точных» реализаций зашумлённых изображений, не содержащих и содержащих важный объект, который подлежит в дальнейшем обнаружению на аналогичных изображениях. Если обозначить через $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ возможные значения этих последовательностей, то они будут представлять собой две стохастически независимые друг от друга последовательности независимых случайных элементов (независимость наблюдений) с распределениями P_0 и P_1 соответственно.

Пусть существует решение $h \in L^2(D)$ интегрального уравнения (4). Тогда приведённый в [1] и далее специальный алгоритм стохастической аппроксимации даёт наблюдателю беспрецедентную возможность получить по последовательностям $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ сразу последовательность оценок W_n для h, сходящуюся к $h \in L^2(D)$, минуя предварительное оценивание по $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ неизвестных наблюдателю $m(Z;u)$, $m(Y;u)$ и $\mu(u,v)$, а также и последующее за ним отыскание приближённого решения уравнения Фредгольма первого рода, т. е. некорректной задачи с приближёнными (с неизвестной точностью) данными — оценками $m(Z;u)$, $m(Y;u)$ и $\mu(u,v)$, которое очень сложно. Напомним, что в методе Тихонова, как и в методе Лаврентьева, для получения приближённого решения уравнения Фредгольма первого рода необходимо знать уровень погрешности приближённых данных.

Кроме того, предположим, что оператор B строго положительный ($(Bf, f) > 0$) для любого $f \in L^2(D)\backslash\{0\}$ и $\{a_n, n \geq 1\}$ — последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{5}$$

Тогда справедлива

Теорема. Пусть существует решение $h \in L^2(D)$ интегрального уравнения (4), W_1 — произвольный случайный элемент со значениями в $L^2(D)$ с $\mathbf{E}\|W_1\|^2 < \infty$, стохастически независимый от $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$, а последовательность случайных элементов $\{W_n, \, n \geq 2\}$ определяется рекуррентной формулой

$$W_{n+1}(u) = W_n(u) + a_n \Big\{ Z_n(u) - Y_{2n}(u) \Big[1 + \int\limits_D (Y_{2n}(v) - Y_{2n-1}(v)) W_n(v) dv \Big] \Big\}. \tag{6}$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\|W_n - h\| \to 0, \, n \to \infty\} = 1, \quad \mathbf{E}\|W_n - h\|^2 \to 0, \, n \to \infty.$$

Это утверждение вытекает из результатов работы [4]. Подставив построенную с помощью (6) оценку W_n для h в (2), наблюдатель получит искомую оценку $F^* = F_n^*$ для функционала F:

$$F^*(X) = \int\limits_D X(u) W_n(u) du. \tag{7}$$

Используя (7), решение о наличии объекта на наблюдаемом изображении X можно принимать в том случае, когда

$$\int\limits_D X(u) W_n(u) du > C_n,$$

где C_n — пороговый уровень, который выбирается надлежащим образом с помощью последовательности $\{Y_n\}$ так, чтобы вероятность ложного обнаружения («ложной тревоги»)

$$P_0 \Big(\int\limits_D Y(u) W_n(u) du > C_n \Big)$$

имела приемлемое значение.

Обнаружение объекта в последовательности наблюдаемых изображений. Вернёмся теперь к более сложной проблеме. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые зашумлённые изображения, подлежащие наблюдению последовательно, и каждое X_n $(n = 1, \ldots, \theta - 1)$ имеет распределение вероятностей P_0, в то время как X_n $(n = \theta, \theta + 1, \ldots)$ имеет распределение вероятностей P_1. Другими словами, на первых изображениях важный объект может отсутствовать, а затем появляется в заранее неизвестный (случайный) момент времени θ. Требуется обнаружить этот важный объект как можно скорее при естественном ограничении на величину вероятности ложной (преждевременной) тревоги. Как и выше, предположим, что распределения P_0 и P_1 не известны наблюдателю, но он имеет (или может получить) две последовательности $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ независимых точных реализаций зашумлённых изображений, не содержащих и содержащих важный объект, который предстоит обнаружить, т. е. наблюдатель может с помощью процедуры стохастической аппроксимации (6) получить оценку $F^* = F_n^*$ для функционала F, подходящего для обнаружения объекта на одном изображении. Тогда обнаружить или оценить момент θ появления важного объекта в наблюдаемой последовательности зашумлённых изображений можно с помощью метода кумулятивных сумм (CUSUM), развитого в [5].

Пусть $\gamma_n = F^*(X_n)$, $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + \gamma_n$. В соответствии с методом кумулятивных сумм подходящий здесь момент (правило) остановки наблюдений и объявления тревоги о происшедшем появлении объекта определяется по формуле

$$\tau = \inf\Big\{n\colon \max_{0\le k\le n}(S_n - S_k) \ge C + b_n\Big\},$$

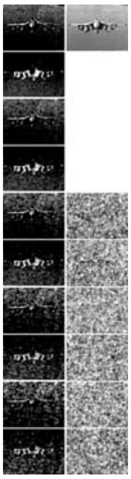
где $\{b_n\}$ — не слишком быстро возрастающая последовательность. Эта стратегия допускает и удобное с точки зрения вычислений рекуррентное представление. Пусть $\varsigma_0 = 0$, $\varsigma_n = \max\{0, \varsigma_{n-1} + \gamma_n\}$. Тогда подходящий момент объявления тревоги определяется как

$$\tau = \inf\{n:\ \varsigma_n \ge C + b_n\}. \qquad (8)$$

Отыскание оптимального соотношения между константой C и последовательностью $\{b_n\}$ в методе кумулятивных сумм представляет собой известную нерешённую трудную задачу (см. [5]).

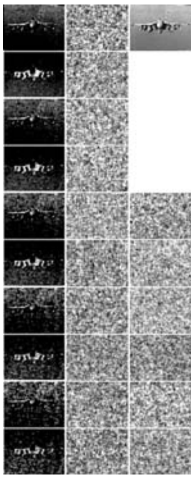
Результаты, полученные при моделировании. Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение алгоритма стохастической аппроксимации и метода кумулятивных сумм к задаче обнаружения с большим (с дисперсией, равной 150) аддитивным не белым гауссовским шумом реального объекта — самолёта, изображение которого в чистом виде (без шума) и со значениями, приведёнными на весь интервал [0, 255], даётся в верхнем правом углу каждого рисунка. В левой колонке каждого рисунка снизу вверх показаны в виде изображений попарно отрицательные и положительные части оценок W_n решения уравнения (4), полученные с помощью (6) при $n = 100, 200, 500, 1000, 5000$ с начальным приближением $W_1 \equiv 0$ и $a_n = 0{,}0001/n^{0{,}6}$.

Для функционала (7) была взята оценка W_{500}. В результате при применении правила (8) с $C = 4{,}69$ и $b(n) \equiv 0{,}7n$ (которые выбраны так, чтобы средняя задержка с обнаружением не сильно зависела от значения $\theta \in \{1, 2, \ldots, 50\}$) к 100 последовательностям вида $X_1, \ldots, X_{50}$, где $X_n \equiv Y_n$ — случайный фон (объект отсутствует), только у пяти из них была ложная тревога. Контрольные наблюдаемые последовательности с $\theta = 5, 15, 25, 45$ после квантования представлены на рис. 1–4 снизу вверх до момента обнаружения τ включительно в правой колонке на рис. 1 и в последующих колонках на рис. 2–4. Как видно, задержки с обнаружением получились небольшими, а именно $\tau - \theta = 1, 1, 0$ и 2.



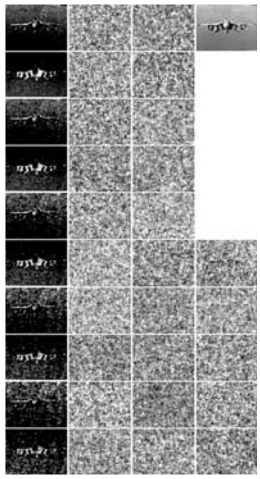
$\theta = 5$

Рис. 1



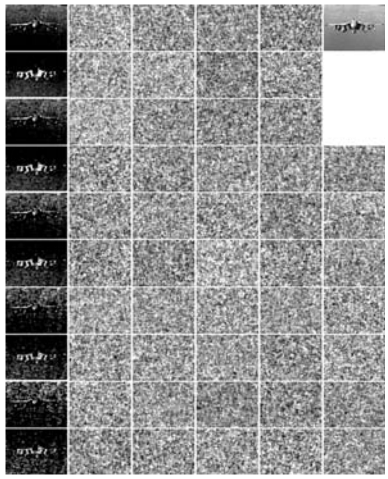
$\theta = 15$

Рис. 2



$\theta = 25$

Рис. 3



$\theta = 45$

Рис. 4

Заключение. Полученные в данной работе результаты чётко свидетельствуют об эффективности применения метода стохастической аппроксимации и метода кумулятивных сумм для построения подходящего правила (алгоритма) обнаружения момента появления важного для наблюдателя объекта в последовательности зашумлённых изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Салов Г. И.** О стохастической аппроксимации в гильбертовом пространстве и задаче обнаружения появления объекта в последовательности зашумленных изображений // Сиб. журн. индустр. матем. 2009. **12**, № 1(37). С. 127–135.
2. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971. Т. 1. 664 с.
3. **Гаткин Н. Г., Далецкий Ю. Л.** К вопросу об оптимальном выделении сигнала на фоне произвольного шума // Теория вероятностей и ее применения. 1971. **16**, вып. 4. С. 749–753.
4. **Салов Г. И.** Об одной теореме стохастической аппроксимации в гильбертовом пространстве и ее приложениях // Теория вероятностей и ее применения. 1979. **24**, вып. 2. С. 407–413.
5. **Боровков А. А.** Математическая статистика. М.: Физматлит, 2007. 704 с.

Поступила в редакцию 18 февраля 2011 г.