УДК 004.93; 004.932

ФОРМИРОВАНИЕ ИНВАРИАНТОВ ПРИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

С. Н. Чуканов

Учреждение Российской академии наук
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН,
644099, г. Омск, ул. Певцова, 13
E-mail: chukanov@ofim.oscsbras.ru

Рассматривается алгоритм формирования инвариантов векторных полей, ассоциированных с интегральными кривыми динамических систем, относительно действия группы специальных аффинных преобразований. Алгоритм построения топологических инвариантов векторных полей распространён на случай, когда элементы специальной аффинной группы отличаются в различных точках интегральной кривой.

Ключевые слова: визуализация процессов в динамических системах, распознавание образов, инвариант векторного поля, группа аффинных преобразований.

Введение. Алгоритм определения инвариантов пространственных кривых имеет практическое значение при распознавании образов векторных полей [1]. В работе [2] рассмотрен метод построения функции трёхмерного изображения, инвариантной к действию групп вращения и переноса. В [3] представлены инварианты векторных полей, определяемых интегральными кривыми динамических систем, по отношению к действию специальной аффинной группы преобразований $SA(n)$, которое формируется действиями специальной линейной группы $SL(n)$ и группы переносов $T(n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$; инварианты формируются на основе построения форм Маурера — Картана [4, 5]. Однако эти инварианты корректны, если действие элементов группы $SA(n)$ одинаково для любой точки кривой.

В данной работе предлагается формирование топологических инвариантов пространственной кривой (и соответствующих векторных полей) для случая, когда действия элементов группы $SA(n)$ отличаются в разных точках кривой.

Постановка задачи. Для кривой $\mathbf{c}(s)$: $[0,s] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(s) = (c_1(s),\dots,c_n(s))^T$, $\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'', \dots, \mathbf{c}^{(n)}) \neq 0$, сформируем матрицу $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{c}$: $[0,s] \to SL(n)$, $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{c} = \{\det(\mathbf{c}', \dots, \mathbf{c}^{(n)})\}^{-(1/n)}(\mathbf{c}',\dots,\mathbf{c}^{(n)})$ [1, 4, 6, 7], которая $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{c}$ инвариантна по отношению к действию элементов специальной аффинной группы, если элементы группы $SA(n)$ одинаковы в каждой точке кривой. Если кривую параметризовать специальной аффинной длиной дуги [1, 4, 6, 7]

$$\sigma = \int_0^s (\det(\mathbf{c}'(u),\dots,\mathbf{c}^{(n)}(u)))^{2/n(n-1)} du,$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-07-00032а).

то после любых специальных аффинных преобразований кривая снова будет параметризована той же специальной аффинной длиной дуги σ. Для кривой, параметризованной длиной дуги σ, можно определить специальные аффинные кривизны:

$$\chi_1 = \det(\mathbf{c}'', \mathbf{c}''', \ldots, \mathbf{c}^{(n+1)}; \ \chi_2 = \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}''', \ldots, \mathbf{c}^{(n+1)}); \ \ldots.$$

По кривизнам $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{n-1}$ получим уравнение для этой кривой в форме Маурера — Картана [4, 6]:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{c}}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{c}}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{n-1}\chi_1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{n-2}\chi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\chi_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}. \tag{1}$$

Решение уравнений при $\chi_i = \mathrm{const}$, $i = 1, \ldots, n-1$, и $\mathbf{A} = \mathrm{const}$ может быть представлено в виде $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{c}}(\sigma) = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{c}}(0)\mathrm{e}^{\mathbf{A}\sigma}$, где $\mathrm{e}^{\mathbf{A}\sigma}$ — экспонента матрицы: $\mathrm{e}^{\mathbf{A}\sigma} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mathbf{A}\sigma)^n/n!$.

Если существует зависимость матрицы $\mathbf{A}$ от длины дуги σ: $\mathbf{A}(\sigma)$, то решение может иметь вид [8, 9]

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{c}}(\sigma) = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{c}}(0)\prod_0^\sigma \exp(\mathbf{A}(s)ds), \tag{2}$$

где используется интегральное произведение

$$\prod_0^\sigma \exp(\mathbf{A}(s)ds) = \lim_{\max(\Delta s_k)\to 0}\Big[\prod_{k=1}^{n}\exp(\mathbf{A}(s_k)\Delta s_k)\Big] \tag{3}$$

(здесь $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$; $s_0 = 0$; $s_n = \sigma$).

Рассмотрим действие элемента группы $g \in SA(n)$; g: $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{a}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in SL(n)$, $\mathbf{a} \in T^n$, на элементы матрицы $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{c}}$ [1, 4, 5]:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{c}} \to g\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}}, \quad g = g(\sigma), \quad \det(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}}) \neq 0. \tag{4}$$

После преобразования (1) получим $(g\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}})^{-1}(g\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}})' = \mathbf{A}$, или

$$(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}})^{-1}\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}}' = \bar{\mathbf{A}}(\sigma) = g^{-1}\mathbf{A}g - g^{-1}g'. \tag{5}$$

Имеем следующее решение уравнения (5) (см. выражение (2)) относительно $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}}$:

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}}(\sigma) = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}}(0)\prod_0^\sigma \exp(\bar{A}(s)ds) = \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}}(0)\prod_0^\sigma \exp((g^{-1}(s)\mathbf{A}(s)g(s) - g^{-1}(s)g'(s))ds) =$$

$$= \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{c}}(0)g(\sigma)^{-1}\Big[\prod_0^\sigma \exp(\mathbf{A}(s)ds)\Big]g(0). \tag{6}$$

Доказательство правила подобия, используемого в (6), приведено в Приложении.

Если $g(\sigma) = g(0)$ (что выполняется для замкнутых кривых), то выражение

$$W = \operatorname{tr}\Big(g(0)^{-1}\Big[\prod_0^\sigma \exp(\mathbf{A}(s)ds)\Big]g(0)\Big) = \operatorname{tr}\Big[\prod_0^\sigma \exp(\mathbf{A}(s)ds)\Big] \tag{7}$$

не будет зависеть от g, т. е. W является топологическим инвариантом.

П р и м е р. Рассмотрим окружность $\mathbf{c}(\sigma) = [-\sin(\sigma),\, \cos(\sigma)]^T$. В этом случае

$$\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{c}(\sigma) = \begin{bmatrix} -\cos(\sigma) & \sin(\sigma) \\ -\sin(\sigma) & -\cos(\sigma) \end{bmatrix}; \tag{8}$$

$\chi_1 = 1$; $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{c}^{-1}\boldsymbol{\alpha}'_\mathbf{c} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Действие группы

$$g(\sigma) = \begin{pmatrix} a + b\sin(\sigma) & 0 \\ 0 & a - b\sin(\sigma) \end{pmatrix} \in SL(2), \quad a > b, \tag{9}$$

на вышеуказанную окружность ведёт к изменению формы Маурера — Картана:

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_\mathbf{c}^{-1}\bar{\boldsymbol{\alpha}}'_\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -b(a + b\sin(\sigma))^{-1}\cos(\sigma) & -1 \\ 1 & -b(a - b\sin(\sigma))^{-1}\cos(\sigma) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Определение матрицы $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_\mathbf{c}(\sigma)$ при условии $\sigma = 2\pi n$, $n \in Z$, приводит к $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_\mathbf{c}(2\pi n) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, т. е. матрица инвариантна по отношению к действию группы.

Применение метода формирования инвариантов к кривой, описываемой уравнениями Френе. Для кривой $\mathbf{c}(s)$: $[0, s] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(s) = (c_1(s), \ldots, c_n(s))^T$, сформируем матрицу $(\mathbf{c}'(s), \mathbf{c}''(s), \ldots, \mathbf{c}^{[n]}(s))$ и по векторам (столбцам) этой матрицы последовательность ортов $\mathbf{N} = (\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\nu}_1, \ldots, \boldsymbol{\nu}_{n-1})$ [10]:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nu}_0 = \mathbf{c}'(s)|\mathbf{c}'(s)|^{-1}, \\
&\ldots \\
&\boldsymbol{\nu}_p = \Big(\mathbf{c}^{[p+1]} - (c^{[p]})'\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{c}^{[p]}}\Big)\Big|\mathbf{c}^{[p+1]} - (c^{[p]})'\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{c}^{[p]}}\Big|^{-1}, \\
&\ldots \\
&\boldsymbol{\nu}_{n-1} = \Big(\mathbf{c}^{[n]} - (c^{[n-1]})'\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{c}^{[n-1]}}\Big)\Big|\mathbf{c}^{[n]} - (c^{[n-1]})'\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{c}^{[n-1]}}\Big|^{-1},
\end{aligned}$$

где $c^{[p]}$ и $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{c}^{[p]}}$ определяются из условий $\mathbf{c}^{[p]} = c^{[p]}\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{c}^{[p]}}$, $|\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{c}^{[p]}}| = 1$.

Для матрицы $\mathbf{N}$ выполняются соотношения Френе:

$$\mathbf{N}'\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{K}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где ненулевые компоненты матрицы $\mathbf{K}$ — коэффициенты $\kappa_p(s)$, $p = 1, \dots, n-1$, — называются кривизнами кривой в точке s. Эти коэффициенты определяются из условий нормирования векторов $\boldsymbol{\nu}_p$, $p = 0, \dots, n-1$. В [10] соотношения Френе приводятся в покомпонентной форме.

Решение уравнения $\mathbf{N}'\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{K}(s)$ относительно матрицы $\mathbf{N}$ можно представить в виде интегрального произведения [9]:

$$\mathbf{N}(s) = \Big[\prod_0^s \exp(\mathbf{K}(\sigma)d\sigma)\Big]\mathbf{N}(0). \tag{12}$$

При матричном преобразовании $\mathbf{g}(s)$ матрицы $\mathbf{N}(s)$, зависящем от параметра s: $\mathbf{N}(s) \to \mathbf{g}(s)\mathbf{N}(s)$, кривизны $\mathbf{K}(s)$ будут иметь вид (см. выражение (5))

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{g}(s)\mathbf{K}(s)\mathbf{g}^{-1}(s) - \mathbf{g}^{-1}(s)\mathbf{g}'(s), \tag{13}$$

а интегральное произведение запишется как

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{g}(s)\Big[\prod_0^s \exp(\mathbf{K}(\sigma)d\sigma)\Big]\mathbf{g}^{-1}(0)\mathbf{N}(0). \tag{14}$$

След матрицы

$$\mathrm{tr}\Big\{\mathbf{g}(s)\Big[\prod_0^s \exp(\mathbf{K}(\sigma)d\sigma)\Big]\mathbf{g}^{-1}(0)\Big\} = \mathrm{tr}\Big[\mathbf{g}(s)\mathbf{g}^{-1}(0)\Big]\mathrm{tr}\Big[\prod_0^s \exp(\mathbf{K}(\sigma)d\sigma)\Big] \in \mathbb{R} \tag{15}$$

можно декомпозировать на компонент $\mathrm{tr}\Big[\prod_0^s \exp(\mathbf{K}(\sigma)d\sigma)\Big]$, инвариантный по отношению к преобразованию $\mathbf{g}(s)$ матрицы $\mathbf{N}(s)$, и компонент $\mathrm{tr}[\mathbf{g}(s)\mathbf{g}^{-1}(0)] \in \mathbb{R}$. Для незамкнутых кривых компонент $\mathrm{tr}[\mathbf{g}(s)\mathbf{g}^{-1}(0)]$ зависит только от преобразования в начальной точке кривой $\mathbf{g}(0)$ и в точке с длиной дуги s: $\mathbf{g}(s)$; зависимость в промежуточных точках «стирается». Для замкнутых кривых выполняется $\mathbf{g}(s) = \mathbf{g}(0)$, $\mathrm{tr}[\mathbf{g}(s)\mathbf{g}^{-1}(0)] = 1$ и след матрицы

$$\mathrm{tr}\Big\{\mathbf{g}(s)\Big[\prod_0^s \exp(\mathbf{K}(\sigma)d\sigma)\Big]\mathbf{g}^{-1}(0)\Big\} = \mathrm{tr}\Big[\prod_0^s \exp(\mathbf{K}(\sigma)d\sigma)\Big] \tag{16}$$

инвариантен по отношению к преобразованию $\mathbf{g}(s)$ (см. выражение (7)). В частном случае $\mathbf{g}(s)$ могут быть элементами матричных групп $SO(n)$ или $SE(n)$.

Заключение. В представленной работе рассмотрен алгоритм формирования параметров матриц, построенных дифференцированием параметризованной кривой и инвариантных по отношению к действию группы специальных аффинных преобразований. Алгоритм формирования инвариантов отличается от известных алгоритмов тем, что он распространён на случай, когда элементы специальной аффинной группы разные в различных точках параметризованной кривой. Для замкнутых кривых построены инварианты, не зависящие от преобразований матрицы в каждой точке кривой. Если в каждой точке кривой сформировать репер Френе, то предложенный алгоритм позволяет найти инварианты кривой относительно действия элементов групп $SO(n)$, $SE(n)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Правило подобия [8, 9]:

$$\prod_0^\sigma \exp((g^{-1}(s)\mathbf{A}(s)g(s) - g^{-1}(s)g'(s))ds) = g(\sigma)^{-1}\Big[\prod_0^\sigma \exp(\mathbf{A}(s)ds)\Big]g(0). \qquad (\text{П}1)$$

Доказательство. Пусть

$$Q(\sigma) = \prod_0^\sigma \exp(\mathbf{A}(s)ds), \quad Q(0) = I, \quad Q'(s)Q^{-1}(s) = \mathbf{A}(s).$$

Тогда

$$g^{-1}(\sigma)\Big(\prod_0^\sigma \exp(\mathbf{A}(s)ds)\Big)g(0) = g^{-1}(\sigma)Q(\sigma)(g(0)Q(0))^{-1} =$$

$$= \prod_0^\sigma \exp\Big([(g^{-1}Q)'(g^{-1}Q)^{-1}(s)]ds\Big) = \prod_0^\sigma \exp\Big(((g^{-1})'(g^{-1})^{-1} + g^{-1}(Q'Q^{-1})g)ds\Big) =$$

$$= \prod_0^\sigma \exp\Big((g^{-1}(s)\mathbf{A}(s)g(s) - g^{-1}g')ds\Big), \qquad (\text{П}2)$$

где используются тождества $(g^{-1})'(g^{-1})^{-1} = -g^{-1}g'$, $(g^{-1}Q)'(g^{-1}Q)^{-1} = (g^{-1})'(g^{-1})^{-1} + g^{-1}(Q'Q^{-1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Olver P. J., Sapiro G., Tannenbaum A.** Differential invariant signatures and flows in computer vision: A symmetry group approach // Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision /Ed. B. M. Ter Haar Romeny. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 255–306.
2. **Чуканов С. Н.** Преобразование Фурье функции трехмерного изображения, инвариантное к действию групп вращения и переноса // Автометрия. 2008. **44**, № 3. С. 80–87.
3. **Nadjafikhah M., Mahdipour S. A.** Affine classification of n-curves // Balkan Journ. of Geometry and Its Appl. 2008. **13**, N 2. P. 66–73.
4. **Fels M., Olver P. J.** Moving coframes: I. A practical algorithm // Acta Appl. Math. 1998. **51**, N 2. P. 161–213.

5. **Kogan I. A.** Two algorithms for a moving frame construction // Canad. Journ. Math. 2003. **55**, N 2. P. 266–291.
6. **Guggenheimer H.** Differential geometry. N. Y.: Dover Publ., 1977. 378 p.
7. **Spivak M.** A differential geometry. Berkeley: Publish or Perish, 1979. Vol. 1–5.
8. **Cartier P., DeWitt-Morette C.** Functional integration: Action and symmetries. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 456 p.
9. **Dollard J. D., Friedman C. N.** Product integration with applications to differential equations. Reading: Addison-Wesley, 1979. 254 p.
10. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.

Поступила в редакцию 6 сентября 2010 г.