

УДК 517.587 : 519.216

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

С. А. Прохоров, В. В. Графкин

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С. П. Королева»,  
443086, г. Самара, Московское шоссе, 34  
E-mail: sp@smr.ru  
grafkinvv@yandex.ru

Аппроксимация структурных функций (СФ) с использованием ортогональных полиномов в условиях, предполагающих дальнейшее нахождение спектральной плотности мощности по полученной ортогональной модели, в большинстве случаев приводит к некорректному определению последней. Предложен метод построения ортогональных моделей СФ, в основе которого лежит предварительное смещение анализируемой СФ и использование в качестве базисов ортогональных функций. При этом применяется численно-аналитический подход к нахождению коэффициентов разложения, что позволяет определять ортогональные модели СФ, характеризующиеся небольшой погрешностью аппроксимации, и вычислять спектральную плотность мощности с большей точностью. Приведена реализация разработанных алгоритмов на примере построения ортогональных моделей СФ в базисах Лагерра и Лежандра.

*Ключевые слова:* случайный процесс, структурная функция, аппроксимация, ортогональная модель, спектральная плотность мощности.

**Введение.** Особенности применения методик построения ортогональных моделей функциональных характеристик случайных процессов рассматриваются в [1–4]. Данная работа посвящена анализу существующих и созданию новых подходов к построению моделей структурных функций (СФ) в случае использования ортогональных полиномов и ортогональных функций.

**Модели на базе ортогональных полиномов.** В работе [1] представлены наиболее распространённые ортогональные полиномы, примерами которых являются полиномы Лежандра

$$PLeg_k(\tau) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \left( \frac{x-1}{2} \right)^s, \quad (1)$$

характеризуемые интервалом существования  $[-1, 1]$  и нормой

$$\|PLeg_k\|^2 = \frac{2}{2k+1}. \quad (2)$$

Для построения ортогональных моделей СФ с помощью данных полиномов необходимо изменить интервал существования полиномов с  $[-1, 1]$  на  $[0, \tau_{k \max}]$ , соответствующий интервалу, на котором структурная функция вычислена. Это можно сделать, прибегнув к линейному преобразованию аргумента полиномов Лежандра:

$$\tau = ax + b \Rightarrow x = \frac{\tau - b}{a}, \quad (3)$$

где  $a = \tau_{k \max}/2$ ,  $b = \tau_{k \max}/2$ .

Таким образом, полиномы Лежандра, определённые на интервале  $[0, \tau_{k \max}]$ , будут иметь вид

$$P\text{Leg}M_k(\tau) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \left( \frac{\tau}{\tau_{k \max}} - 1 \right)^s. \quad (4)$$

Учитывая дифференциал

$$dx = \frac{2}{\tau_{k \max}} d\tau, \quad (5)$$

можно вычислить норму полиномов  $P\text{Leg}M_k(\tau)$ :

$$\|P\text{Leg}M_k\|^2 = \frac{\tau_{k \max}}{2k+1}. \quad (6)$$

Модель СФ  $S_x(\tau)$  [2] запишется в виде

$$S_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k P\text{Leg}M_k(\tau) 1(\tau), \quad (7)$$

где  $m$  — число членов разложения ряда;

$$1(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \tau \leq \tau_{k \max}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для модели СФ (7) коэффициенты разложения  $\beta_k$ , обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации [2]

$$\Delta_{\text{п}} = \int_0^{\tau_{k \max}} \left( S_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k P\text{Leg}M_k(\tau, \alpha) 1(\tau) \right)^2 d\tau = \min, \quad (8)$$

находятся из выражения

$$\beta_k = \frac{1}{\|P\text{Leg}M_k\|^2} \int_0^{\tau_{k \max}} S_x(\tau) P\text{Leg}M_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (9)$$

При этом качество аппроксимации принято оценивать по значению относительной методической погрешности аппроксимации [1, 2]

$$\delta_{\text{п}} = \Delta_{\text{п}} / \int_0^{\tau_{k \max}} S_x^2(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Необходимо отметить, что по известной СФ можно найти спектральную плотность мощности (СПМ) [5]:

$$g_x(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\infty} \sin(\omega\tau) S_x'(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где  $S'_x(\tau) = \frac{\partial S_x(\tau)}{\partial \tau}$ .

При этом (11) имеет смысл в том случае, если [5]

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial S_x(\tau)}{\partial \tau} = 0; \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^2 \frac{\partial S_x(\tau)}{\partial \tau} = 0. \quad (12)$$

С учётом (7) выражение (11) примет вид

$$g_a(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^{\tau_{k \max}} \sin(\omega\tau) \frac{\partial P\text{Leg}M_k(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (13)$$

где

$$\frac{\partial P\text{Leg}M_k(\tau)}{\partial \tau} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ \frac{1}{\tau_{k \max}} \sum_{s=1}^k s C_k^s C_{k+s}^s \left( \frac{\tau}{\tau_{k \max}} - 1 \right)^{s-1} & \text{при } k > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Обозначив  $r = k - 1$ , выражение (14) представим как

$$P_r(\tau) = \frac{\partial P\text{Leg}M_r(\tau)}{\partial \tau} = \begin{cases} 0 & \text{при } r < 0, \\ \frac{1}{\tau_{k \max}} \sum_{s=0}^r \frac{(r+s+2)!}{(r-s)!(s+1)!(s)!} \left( \frac{\tau}{\tau_{k \max}} - 1 \right)^s & \text{при } r \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Производную  $n$ -го порядка из (15) можно определить следующим образом:

$$P_r^{(n)}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < n, \\ \frac{1}{(\tau_{k \max})^{n+1}} \sum_{s=n}^r \frac{(r+s+2)!}{(r-s)!(s+1)!(s-n)!} \left( \frac{\tau}{\tau_{k \max}} - 1 \right)^{s-n} & \text{при } r \geq n. \end{cases} \quad (16)$$

Используя интеграл из [6], имеем

$$\begin{aligned} I(t, a) &= \int P_r(t) \sin(at) dt = \\ &= -\frac{\cos(at)}{a} \sum_{i=0}^{E[r/2]} (-1)^i \frac{P_r^{(2i)}(t)}{a^{2i}} + \frac{\sin(at)}{a} \sum_{i=1}^{E[(r+1)/2]} (-1)^{i-1} \frac{P_r^{(2i-1)}(t)}{a^{2i-1}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $E[n]$  — целая часть числа  $n$ . Выражение (13) легко преобразовать к виду

$$g_a(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \sum_{k=0}^m \beta_k [I(\tau_{k \max}, \omega) - I(0, \omega)]. \quad (18)$$

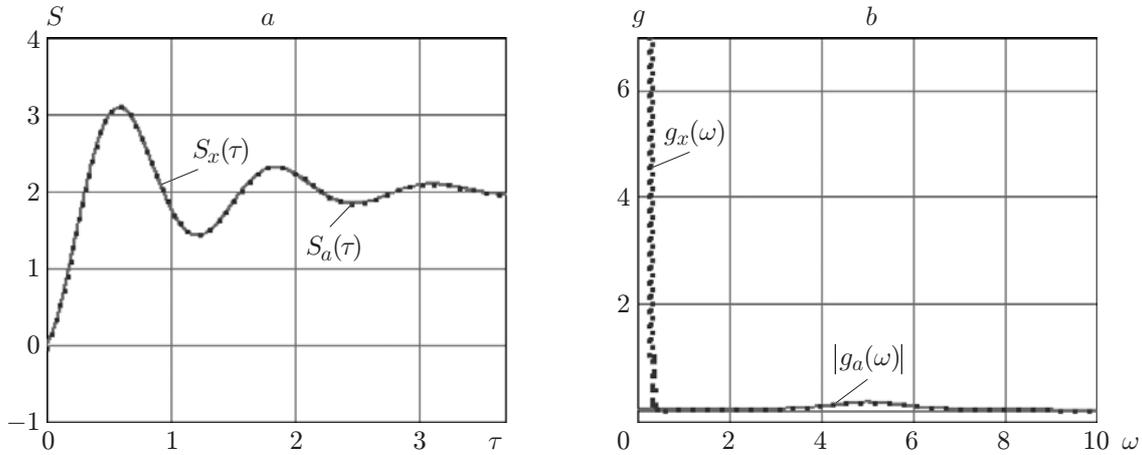


Рис. 1

На рис. 1, *a* представлены структурная функция, заданная выражением  $S_x(\tau) = 2 \times (1 - e^{-\lambda\tau} \cos(5\tau))$ , и её ортогональная модель, построенная на основе ортогональных полиномов Лежандра  $S_a(\tau)$ , а на рис. 1, *b* — СПМ  $g_x(\omega)$ , вычисленная по параметрам полученной ортогональной модели  $|g_a(\omega)|$ .

Относительная погрешность аппроксимации СФ в этом случае составила  $\delta_{\Pi} = 0,0005$ , однако в начальной области построения график спектральной мощности, найденной по параметрам ортогональной модели СФ, характеризуется колебаниями, значительно превосходящими по амплитуде экстремум, соответствующий преобладающей частоте. Одной из причин, обуславливающих этот недостаток, является дополнительная погрешность вычисления СПМ, возникающая вследствие ограничения полубесконечного интервала  $[0, \infty)$  некоторым конечным интервалом  $[0, \tau_{\max}]$  и определяемая как

$$\Delta_{\text{СПМ}} = \frac{1}{2\pi\omega} \int_{\tau_{k \max}}^{\infty} \sin \omega\tau \frac{\partial S_x(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (19)$$

Отметим, что если решение задачи исследования ограничивается только нахождением модели структурной функции, то использование ортогональных полиномов позволяет получать аппроксимацию СФ, характеризуемую значением относительной погрешности аппроксимации, в большинстве случаев не превышающим  $\delta_{\Pi} = 0,001$ .

На основании изложенного можно сделать вывод о том, что в случаях, когда необходимы дальнейшие преобразования СФ в целях получения функционально связанных с ней характеристик, целесообразно применять иные базисы, например ортогональные функции [2], которые определены на полубесконечном интервале  $[0, \infty)$ , соответствующем интервалу существования структурных функций случайных процессов [5].

**Модели на базе ортогональных функций.** Выражение для вычисления ортогональных функций Лежандра можно записать как [2]

$$\text{Leg}_k(\tau, \alpha) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \frac{(k+s)!}{(k-s)!(s!)^2} e^{-(2s+1)\alpha\tau}, \quad (20)$$

а также в виде рекуррентного соотношения [2]

$$\text{Leg}_k(\tau, \alpha) = \begin{cases} e^{-\alpha\tau} & \text{при } k = 0, \\ e^{-\alpha\tau} - 2e^{-3\alpha\tau} & \text{при } k = 1, \\ \frac{2k-1}{k}(1-2e^{-2\alpha\tau})\text{Leg}_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k-1}{k}\text{Leg}_{k-2}(\tau, \alpha) & \text{при } k > 1, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\alpha$  — параметр масштаба ортогональных функций.

Функции Лежандра характеризуются нормой [2]

$$\|\text{Leg}_k\|^2 = \frac{1}{2(2k+1)\alpha}. \quad (22)$$

Модель СФ  $S_x(\tau)$  в данном случае будет иметь вид [2]

$$S_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k \text{Leg}_k(\tau, \alpha). \quad (23)$$

Для модели (23) коэффициенты разложения  $\beta_k$ , обеспечивающие минимум квадратической погрешности аппроксимации [2]

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left( S_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k \text{Leg}_k(\tau, \alpha) \right)^2 d\tau = \min, \quad (24)$$

находятся из выражения

$$\beta_k = \frac{1}{\|\text{Leg}_k\|^2} \int_0^{\infty} S_x(\tau) \text{Leg}_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (25)$$

В данном случае относительная методическая погрешность примет вид

$$\delta = \Delta / \int_0^{\infty} S_x^2(\tau) d\tau, \quad (26)$$

а выражение для определения СПМ можно представить как

$$g_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k (-1)^{s+1} \frac{(k+s)!}{(k-s)!(s!)^2} \frac{(2s+1)\alpha}{(2s+1)^2\alpha^2 + \omega^2}. \quad (27)$$

Однако построение с помощью ортогональных функций моделей СФ, непосредственно вычисленных по случайному процессу, зачастую приводит к отклонениям значений аппроксимирующих функций, соответствующих бесконечному аргументу СФ, результатом чего является не только ортогональная модель, имеющая большую относительную погрешность, но и построение спектральной плотности мощности, не характеризующей исходный случайный процесс (рис. 2, *a, b*, обозначения кривых, как на рис. 1). Этот результат обуславливается характером поведения применяемых ортогональных функций — значение ортогональных функций Лежандра стремится к нулю при стремлении их аргумента к бесконечности, тогда как структурные функции крайне редко обладают такой особенностью.

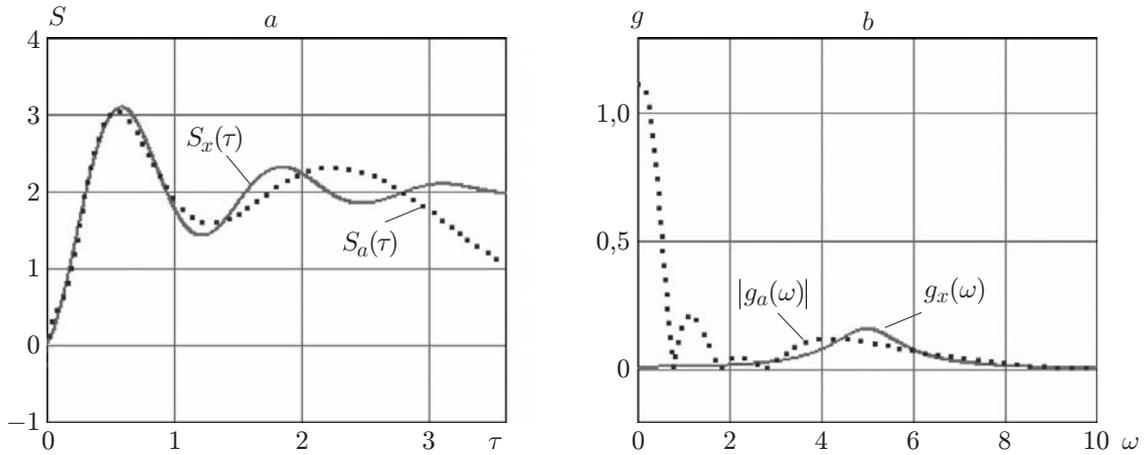


Рис. 2

**Смещённые структурные функции.** Решается данная проблема при помощи смещения структурной функции [2] относительно оси абсцисс на насыщающее значение СФ [7], в качестве которого берётся либо её среднее значение, либо значение, соответствующее бесконечному аргументу [2]:

$$\overset{\circ}{S}_x(\tau) = S_x(\tau) - m_s, \tag{28}$$

где  $m_s$  — насыщающее значение. Таким образом, определяется ортогональная модель смещённой СФ (рис. 3,  $a, b$ , обозначения кривых, как на рис. 1)

$$\overset{\circ}{S}_a(\tau) = \sum_{k=0}^m \overset{\circ}{\beta}_k \text{Leg}_k(\tau, \alpha), \tag{29}$$

т. е. выражение (25) примет вид

$$\overset{\circ}{\beta}_k = \frac{1}{\|\text{Leg}_k\|^2} \int_0^\infty \overset{\circ}{S}_x(\tau) \text{Leg}_k(\tau, \alpha) d\tau. \tag{30}$$

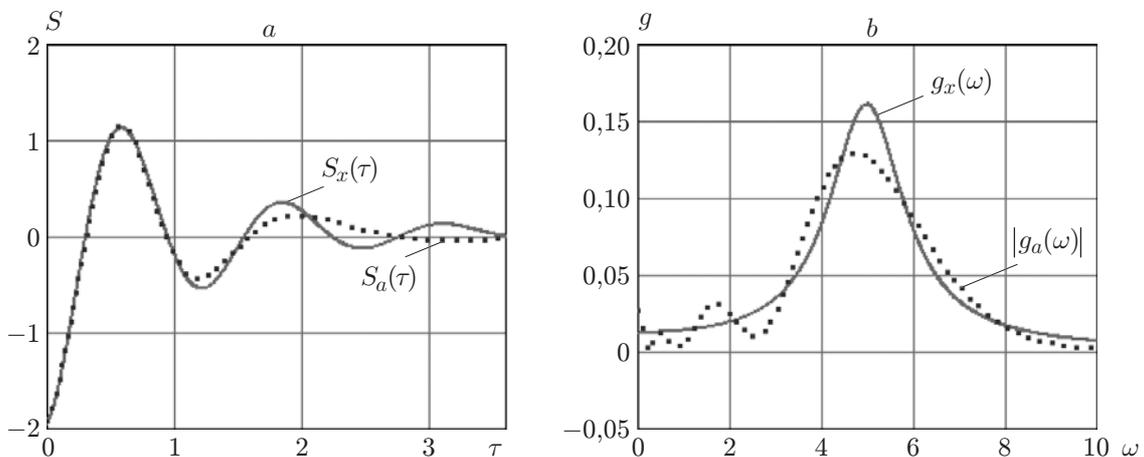


Рис. 3

Модель исходной СФ далее задаётся с учётом предварительно определённого насыщающего значения

$$S_x(\tau) = \sum_{k=0}^m \beta_k \overset{\circ}{\text{Leg}}_k(\tau, \alpha) + m_s. \quad (31)$$

Необходимо отметить, что вследствие нахождения спектральной плотности мощности из выражения, содержащего производную структурной функции, насыщающее значение СФ не вносит дополнительной погрешности, связанной с его определением, в результат вычисления СПМ. Следовательно, в выражении (27) можно использовать как коэффициенты  $\beta_k$ , так и  $\overset{\circ}{\beta}_k$ .

Несмотря на то что применение ортогональных функций Лежандра позволяет избежать погрешности  $\Delta_{\text{СПМ}}$ , анализ выражения (27) показывает, что при его использовании будут требоваться существенные вычислительные затраты, так как оно содержит факториалы, соответствующие порядку ортогональных функций. К тому же выражение (27), как и выражение (18), имеет неудобную форму для дальнейших аналитических преобразований. Более приемлемыми с этой точки зрения являются функции Лагерра [2, 8]

$$\text{Lag}_k(\tau, \alpha) = \begin{cases} e^{-(\alpha\tau/2)} & \text{при } k = 0, \\ e^{-(\alpha\tau/2)}(1 - \alpha\tau) & \text{при } k = 1, \\ \frac{2k - 1 - \alpha\tau}{k} \text{Lag}_{k-1}(\tau, \alpha) - \frac{k - 1}{k} \text{Lag}_{k-2}(\tau, \alpha) & \text{при } k > 1, \end{cases} \quad (32)$$

где  $\alpha$  — параметр масштаба ортогональных функций.

Функции Лагерра характеризуются нормой [2]

$$\|\text{Lag}_k\|^2 = 1/\alpha. \quad (33)$$

Далее, используя в выражениях (29), (30) вместо функций Лежандра функции Лагерра, можно получить ортогональную модель СФ в базисе Лагерра и по параметрам этой модели вычислить спектральную плотность мощности [2, 9], которая для данного базиса определяется как

$$g_x(\omega) = \frac{\cos \varphi}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+1} \beta_k \cos[(2k + 1)\varphi], \quad (34)$$

где  $\varphi = \arctg(2\omega/\alpha)$ .

Выражение (34) по сравнению с (27) имеет меньшие вычислительные затраты при нахождении СПМ. При этом ортогональная модель СФ в базисе Лагерра даёт возможность оперировать большим числом членов разложения ряда (рис. 4, *a, b*). К тому же методы, описанные в работе [8], позволяют найти коэффициенты разложения ряда (29), исключая погрешность, вызванную применением методов численного интегрирования, что обуславливало ограничение исследований определённым оптимальным числом членов разложения [2].

Ортогональная модель СФ, характеризующаяся числом членов разложения  $m = 30$  и погрешностью аппроксимации  $\delta = 0,007$ , приведена на рис. 4. При использовании методов численного интегрирования в выражении (30) с теми же параметрами, что и у модели СФ

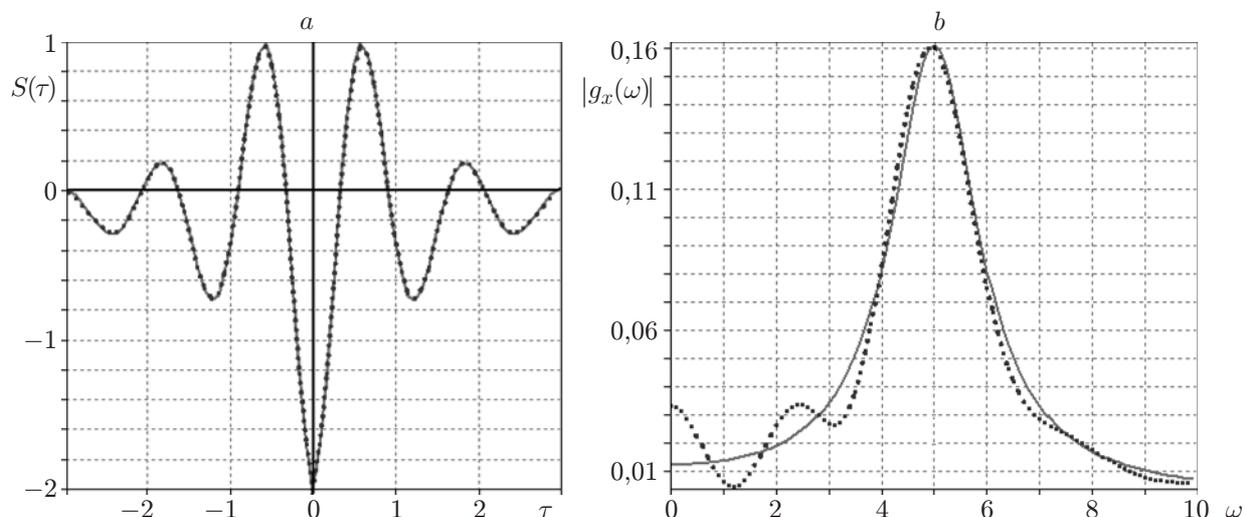


Рис. 4

(см. рис. 4), погрешность аппроксимации возрастает больше чем на порядок:  $\delta = 0,081$  (рис. 5). На рисунке левая часть СФ характеризуется применением численных методов при нахождении коэффициентов разложения, а правая часть определена с помощью методов из работы [8], позволяющих добиться выполнения равенства Парсеваля [1], согласно которому результирующая погрешность аппроксимации уменьшается с увеличением  $m$ .

Необходимо отметить, что методика построения моделей СФ с помощью ортогональных функций (в отличие от ортогональных полиномов) требует дополнительного параметра — масштаба ортогональных функций  $\alpha$ . При этом относительная погрешность аппроксимации зависит от величины данного параметра [2]. Выражения, определяющие значение параметра масштаба, обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации (оптимальное значение  $\alpha$ ) для наиболее распространённых базисов, представлены в работах [1, 2]. Для базисов Лагерра и Лежандра [1] оптимальное значение  $\alpha$  задаётся

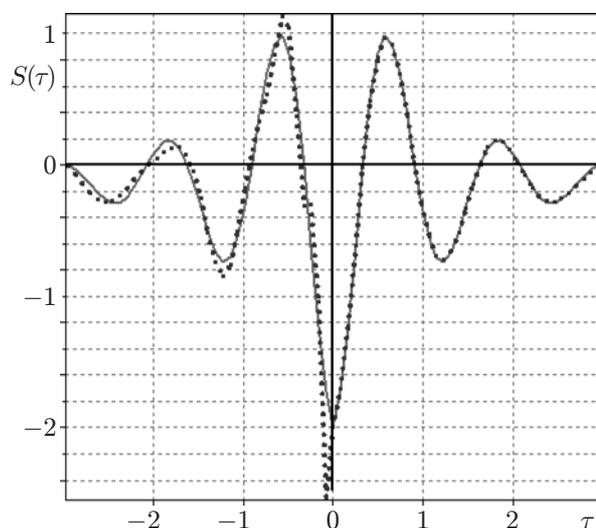


Рис. 5

соответственно выражениями

$$\alpha_{\text{Lag}} = 0,8/\Delta\tau, \quad (35)$$

$$\alpha_{\text{Leg}} = 0,4/(2m + 1)\Delta\tau, \quad (36)$$

где  $\Delta\tau$  — интервал дискретизации случайного процесса.

Анализ выражений (35) и (36) показывает, что значение оптимального параметра масштаба в случае использования базиса Лагерра не зависит от числа членов разложения ортогонального ряда, к тому же данный базис позволяет оперировать большим числом членов ряда, что довольно часто бывает необходимым.

**Заключение.** При построении ортогональных моделей структурных функций и спектральных плотностей мощности целесообразно применение ортогональных функций, а не ортогональных полиномов, заданных на конечном интервале  $[0, \tau_{\text{max}}]$ . Это даёт возможность избежать дополнительной составляющей погрешности восстановления модели структурной функции и спектральной плотности мощности.

С вычислительной точки зрения из рассмотренных ортогональных функций наиболее целесообразно использование ортогональных функций Лагерра, позволяющих получить удобные аналитические выражения для определения параметров модели структурной функции и спектральной плотности мощности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прохоров С. А., Куликовских И. М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов: Лабораторный практикум. Самара: СНЦ РАН, 2008. 301 с.
2. Прикладной анализ случайных процессов /Под ред. С. А. Прохорова. Самара: СНЦ РАН, 2007. 582 с.
3. Батищев В. И., Мелентьев В. С. Аппроксимационные методы и системы промышленных измерений, контроля, испытаний, диагностики. М.: Машиностроение-1, 2007. 393 с.
4. Дедус Ф. Ф., Махортых С. А., Устинин М. Н., Дедус А. Ф. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов /Под общ. ред. Ф. Ф. Дедуса. М.: Машиностроение, 1999. 357 с.
5. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
7. Аргучинцева А. В. Методы статистической обработки и анализа гидрометеорологических наблюдений: Учеб. пособие. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2007. 105 с.
8. Прохоров С. А., Куликовских И. М. Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физико-математические науки. 2009. № 2(19). С. 140–146.
9. Прохоров С. А., Графкин В. В. Сравнительный анализ методов определения спектральной плотности мощности по ортогональной модели структурной функции // Изв. СНЦ РАН. 2008. 10, № 3(25). С. 815–817.

Поступила в редакцию 30 июня 2010 г.