УДК 519.2

МЕТОД ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СПЛАЙНОВЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Буров[1], В. Г. Гетманов[2], С. Е. Орлов[2], В. В. Петроневич[1]

[1] *Федеральное государственное унитарное предприятие*
«Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского»,
140180, г. Жуковский, Московской обл., ул. Жуковского, 1
E-mail: mera@tsagi.ru
[2] *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение*
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"»,
115409, Москва, Каширское шоссе, 31
E-mail: vgetm@starnet.ru

Разработан метод цифровой фильтрации последовательностей экспериментальных данных с использованием аппроксимационных сплайновых функций. Поставлена задача цифровой фильтрации на основе таких функций и дано её общее решение. Рассмотрен пример построения аппроксимационных сплайновых функций с регулированием на концах интервалов наблюдений. Описаны результаты цифровой фильтрации данных аэродинамического эксперимента с помощью разработанного метода.

Ключевые слова: цифровая фильтрация, аппроксимация, сплайновые функции, экспериментальные данные.

Введение. Для ряда задач цифровой фильтрации последовательностей экспериментальных данных может возникать необходимость учёта неравномерной дискретизации, ограниченных интервалов времени наблюдений и нестационарности статистических характеристик шумовых погрешностей в наблюдениях. Достаточно часто цифровая фильтрация экспериментальных данных должна производиться при обеспечении требования минимизации фазовых искажений в отфильтрованных последовательностях.

Как правило, применение традиционных цифровых фильтров для экспериментальных данных с отмеченными особенностями сопряжено с определёнными сложностями. Такие фильтры рассчитываются при условии постоянного шага дискретизации; ограниченные интервалы наблюдений при осуществлении фильтрации приводят в случае неточного подбора начальных условий к переходным процессам, которые значительно увеличивают погрешности; нестационарность статистических характеристик шумовых погрешностей наблюдений требует разработки адаптивных цифровых фильтров. В основном обеспечение малых фазовых искажений для отфильтрованных последовательностей данных противоречит требованию снижения влияния шумовых погрешностей.

Известно, что на основе обычных сплайнов [1] или B-сплайнов [2], являющихся полиномиальными, вполне успешно реализуются многие задачи цифровой аппроксимационной фильтрации данных. Имеется значительное количество публикаций зарубежных [3–5] и отечественных [6–8] авторов, посвящённых различным аспектам проблемы применения для фильтрации указанных сплайнов.

Однако некоторые задачи фильтрации, требующие учёта функциональной природы данных, не всегда могут быть успешно решены на основе полиномиальных аппроксимационных сплайнов. В данной работе предлагаются сформированные на функциях достаточно общего вида аппроксимационные сплайны с регулированием по нулевым и первым производным на концах интервала наблюдения и ориентированные на решение рассматриваемой задачи цифровой фильтрации экспериментальных данных. Отдельные результаты по предлагаемым аппроксимационным сплайновым функциям изложены в [9, 10].

1. Постановка задачи цифровой фильтрации последовательностей экспериментальных данных на основе аппроксимационных сплайновых функций. Пусть наблюдения $y(t_i)$ конечной последовательности экспериментальных данных производятся с помощью аддитивной модели

$$y(t_i) = x_0(t_i) + w(t_i), \tag{1}$$

где t_i — моменты времени, определяющие неравномерную дискретизацию, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, N_f - 1$, N_f — число данных, расположенных на ограниченном интервале времени наблюдения (t_0, t_{N_f-1}). Будем считать, что исходная последовательность $x_0(t_i)$ из (1) порождается функциями $x_0(t) \in C^{L_0}(t_0, t_{N_f-1})$, где $C^{L_0}(t_0, t_{N_f-1})$ — множество непрерывных на интервале (t_0, t_{N_f-1}) функций, имеющих непрерывные производные до L_0-й включительно. Погрешности наблюдений $w(t_i)$ с нестационарными статистическими характеристиками моделируются в (1) независимыми случайными нормально распределёнными числами с нулевым математическим ожиданием и заданной функцией дисперсии $\sigma^2(t_i)$, зависящей от t_i. Необходимо отметить, что в качестве аргумента в модели (1) не обязательно должно выступать время; аргументом может быть любая физическая величина, например пространственная переменная.

Решение задачи цифровой фильтрации будем связывать с построением модельных функций $f(\alpha, t)$ известного вида: $f(\alpha, t) \in C_0^{L_0}(t_0, t_{N_f-1}) \subset C^{L_0}(t_0, t_{N_f-1})$, определённых на (t_0, t_{N_f-1}) и зависящих от вектора параметров α; для общности будем полагать, что вектор параметров ограничен: $\alpha \in A_0$. Введём вектор $y^T = (y(t_0), y(t_1), \ldots, y(t_{N_f-1}))$ и запишем функционал $S_0(y, \alpha)$, имеющий вполне очевидный физический смысл:

$$S_0(y, \alpha) = \sum_{i=0}^{N_f-1} (y(t_i) - f(\alpha, t_i))^2. \tag{2}$$

Реализация минимизационной задачи обеспечивает аппроксимацию наблюдений $y(t_i)$ значениями модельной функции $f(\alpha, t_i)$ с помощью выбора вектора

$$\alpha^\circ = \arg\{\min_{\alpha \in A_0} S_0(\alpha, y)\}. \tag{3}$$

Результат фильтрации последовательности $y(t_i)$, представляемый отфильтрованной последовательностью $x(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N_f - 1$, формируется из решения задачи (3) на основе выбора оптимальной модельной функции

$$x(t_i) = f(\alpha^\circ, t_i),$$

которая для моментов времени t_i выбранного вектора α° вследствие используемой модели наблюдений (1) и принятых статистических свойств погрешностей, связанных с заданной функцией дисперсии, должна обеспечивать наилучшую аппроксимацию значений $f(\alpha^\circ, t_i)$ к исходной последовательности $x_0(t_i)$.

Предложенную задачу цифровой фильтрации, трактуемую как аппроксимационную, будем реализовывать на основе модельных функций, которые принадлежат ко множеству введённых здесь А-сплайновых функций. Рассмотрим основные составляющие, необходимые для построения этих функций.

Сплайновые узлы на интервале времени (t_0, t_{N_f-1}) задаются числами τ_k, $k = 1, \ldots, n-1$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-1}$, $\tau_0 = t_0, \tau_n = t_{N_f-1}$. Соответствующие сплайновые интервалы $\tau_{k-1} \le t \le \tau_k$, $k = 1, \ldots, n$, в общем случае являются произвольными по величине. Обозначим граничные номера неравномерно расположенных данных на сплайновом интервале с номером k целыми числами N_{1k}, N_{2k}. На k-м сплайновом интервале располагаются данные с номерами, которые удовлетворяют неравенствам $N_{1k} \le i \le N_{2k}$. Очевидно, $N_{1(k+1)} = N_{2k} + 1$, $N_{11} = 0$, $N_{2n} = N_f - 1$.

Модельные базисные функции $f_k(\alpha_k, t)$ на k-м сплайновом интервале $\tau_{k-1} \le t \le \tau_k$ возьмём в виде взвешенных сумм базисных функций $f_{l,k}(t)$, $l = 0, 1, \ldots, L$ (l — номер базисной функции); вне k-го сплайнового интервала $t < \tau_{k-1}$, $t > \tau_k$ для базисных функций должны быть выполнены условия $f_{l,k}(t) = 0$. Примем, что $f_{l,k}(t) \in C_0^{L_0}(\tau_{k-1}, \tau_k)$. Модельная базисная функция $f_k(\alpha_k,\, t)$ для k-го интервала записывается в виде

$$f_k(\alpha_k, t) = \sum_{l=0}^{L} \alpha_{l,k} f_{l,k}(t),$$

где $\alpha_k^T = (\alpha_{0,k},\ \alpha_{1,k},\ \ldots,\ \alpha_{L,k})$ — вектор весовых коэффициентов; $f_k^T(t) = (f_{0,k}(t),$ $f_{1,k}(t),\ \ldots,\ f_{l,k}(t))$ — вектор базисных функций. Возможно представление для данной модельной базисной функции в форме скалярного произведения

$$f_k(\alpha_k, t) = f_k^T(t)\alpha_k.$$

Модельная функция $f(\alpha, t)$, определённая для (t_0, t_{N_f-1}), выразится суммой:

$$f(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\alpha_k, t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{L} \alpha_{l,k} f_{l,k}(t), \tag{4}$$

где вектор параметров α имеет размерность $(n(L+1),\, 1)$ и может быть сформирован как блочный вектор $\alpha^T = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \ldots, \alpha_n^T)$. В общем случае видно, что $f(\alpha, t)$ представляет собой последовательность кусочно-непрерывных функций с разрывами в точках τ_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Гладкость модельной функции (4) по нулевой и первой производным в сплайновых узлах τ_k обеспечивается выполнением линейных по α равенств:

$$h_{0k}(\alpha) = 0; \quad h_{1k}(\alpha) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$h_{0k}(\alpha) = f_k^T(\tau_k)\alpha_k - f_{k+1}^T(\tau_k)\alpha_{k+1} = 0; \tag{5}$$

$$h_{1k}(\alpha) = f_k^{(1)^T}(\tau_k)\alpha_k - f_{k+1}^{(1)^T}(\tau_k)\alpha_{k+1} = 0.$$

Рассмотрим возможность регулирования положением и наклоном модельной функции (4) на концах интервала наблюдения с помощью задания для неё значений нулевых и первых производных в точках $t = t_0$, $t = t_f$. Пусть эти производные на левом конце интервала наблюдения определяются заданием значений g_1, g_2, на правом конце — заданием значений g_3, g_4; введённые значения сформируем в виде вектора $g^T = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ размерности

(4, 1). Указанное регулирование эквивалентно введению следующих четырёх линейных по α равенств $h_{2r}(\alpha) = 0$, $r = 1, \ldots, 4$:

$$
\begin{aligned}
&h_{21}(\alpha) = \alpha_1^T f_1(t_0) - g(1) = 0; \quad h_{22}(\alpha) = \alpha_1^T f_1^{(1)}(t_0) - g(2) = 0;\\
&h_{23}(\alpha) = \alpha_n^T f_n(t_f) - g(3) = 0; \quad h_{24}(\alpha) = \alpha_n^T f_n^{(1)}(t_f) - g(4) = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Зададим допустимое множество A, к которому должны принадлежать векторы α, удовлетворяющие равенствам (5), (6):

$$A = \{\alpha\colon (h_{0k}(\alpha) = 0, \quad h_{1k}(\alpha) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad h_{2r}(\alpha) = 0,\ r = 1, \ldots, 4)\}.$$

Модельные функции (4) для векторов $\alpha \in A$ составляют множество А-сплайновых функций.

Необходимо отметить, что базисные функции $f_k(t)$, образующие модельные базисные функции $f_k(\alpha_k, t)$, могут быть достаточно произвольной природы, согласованной определённым образом с $C_0^{L_0}(t_0, t_{N-1})$. Так, для цифровой фильтрации узкополосных сигналов в качестве базисных функций могут использоваться синусоидальные функции. Вычисление А-сплайновых функций здесь дано для того, чтобы подчеркнуть их технологические отличия от традиционных сплайновых функций и обеспечить терминологические удобства.

Для наблюдений $y(t_i)$ и А-сплайновой функции $f(\alpha, t_i)$, заданной для моментов t_i, $i = 0, 1, \ldots, N_f - 1$, определяется сплайновый функционал

$$S(y, \alpha) = \sum_{i=0}^{N_f-1} (y(t_i) - f(\alpha, t_i))^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=N_{1k}}^{N_{2k}} (y(t_i) - f_k^T(t_i)\alpha_k)^2,$$

который, как видно, является квадратичным по вектору параметров α:

$$S(y, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=N_{1k}}^{N_{2k}} y^2(t_i) - 2\Big(\sum_{i=N_{1k}}^{N_{2k}} y(t_i) f_k^T(t_i)\Big)\alpha_k + \alpha_k^T \Big(\sum_{i=N_{1k}}^{N_{2k}} f_k(t_i) f_k^T(t_i)\Big)\alpha_k\Big). \tag{7}$$

Нахождение значений аппроксимационной сплайновой функции $f(\alpha^\circ, t_i)$ сводится к решению задачи условной оптимизации квадратичного функционала (7) с учётом допустимого множества A, задаваемого системой $2(n-1) + 4$ линейных равенств (5), (6):

$$\alpha^\circ = \arg\{\min_{\alpha \in A} S(y, \alpha)\}. \tag{8}$$

В качестве результата фильтрации в данном случае будет выступать отфильтрованная последовательность $x(t_i)$, порождённая аппроксимационной А-сплайновой функцией, полученной из (4) после подстановки в $f(\alpha, t)$ значений α° и t_i:

$$x(t_i) = f(\alpha^\circ, t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N_f - 1.$$

2. Общее решение задачи цифровой фильтрации на основе аппроксимационных сплайновых функций. Введём множители Лагранжа $\lambda_{0,\,k}$, $\lambda_{1,\,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, и $\lambda_{2,\,r}$, $r = 1, \ldots, 4$, $\lambda_0^T = (\lambda_{0,\,1}, \ldots, \lambda_{0,\,n-1})$, $\lambda_1^T = (\lambda_{1,\,1}, \ldots, \lambda_{1,\,n-1})$, $\lambda_2^T = (\lambda_{2,\,1}, \ldots, \lambda_{2,\,4})$ и $\lambda^T = (\lambda_0^T, \lambda_1^T, \lambda_2^T)$, на основе которых запишем функцию Лагранжа

$$L(y, \alpha, \lambda) = S(y, \alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{0k} h_{0k}(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{1k} h_{1k}(\alpha) + \sum_{r=1}^{4} \lambda_{2r} h_{2r}(\alpha).$$

Решение задачи условной оптимизации (8) сводится к задаче безусловной оптимизации функции Лагранжа по переменным α, λ. Для этой цели записываются необходимые условия экстремума в виде равенств нулю производных $L(y, \alpha, \lambda)$:

$$\frac{\partial L(y, \alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial L(y, \alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = 0. \tag{9}$$

Вследствие того что функционал (7) является квадратичным и ограничивающие равенства (4), (5) — линейными, условия (9) представляют собой систему линейных уравнений.

Для удобств записи необходимых условий экстремума в виде системы линейных уравнений используем векторно-матричные обозначения. Для функционала (7) определим матрицы Q_k и векторы P_k размерности $(L+1, L+1)$ и $(L+1,\, 1)$ соответственно:

$$Q_k = \sum_{i=N_{1k}}^{N_{2k}} f_k(t_i) f_k^T(t_i); \quad P_k^T = \sum_{i=N_{1k}}^{N_{2k}} y(t_i) f_k^T(t_i), \tag{10}$$

на основе которых функционал $S(y, \alpha)$ может быть представлен в матрично-векторных обозначениях:

$$S(y, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=N_{1k}}^{N_{2k}} y^2(t_i) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^T Q_k \alpha_k - 2 \sum_{k=1}^{n} P_k^T \alpha_k.$$

С использованием Q_k и P_k составим блочные матрицу Q и вектор P:

$$Q = \begin{vmatrix} Q_1, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & Q_2, & \ldots & 0 \\ 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 0, & \ldots & Q_n \end{vmatrix}; \quad P = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \ldots \\ P_n \end{vmatrix}, \tag{11}$$

позволяющие представить в компактной форме функционал

$$S(y, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=N_{1k}}^{N_{2k}} y^2(t_i) + \alpha^T Q \alpha - 2P^T \alpha.$$

Запишем введённые ограничения-равенства (5) в матрично-векторном виде. Составим блочную матрицу C_0 размерности $((n-1),(L+1)n)$:

$$C_0 = \left| \begin{array}{ccccc} f_1^T(\tau_1), & -f_2^T(\tau_1), & 0, & \dots & 0 \\ 0, & f_2^T(\tau_2), & -f_3^T(\tau_2), & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & f_{n-2}^T(\tau_{n-2}), & f_{n-1}^T(\tau_{n-2}), & 0 \\ 0, & \dots & 0, & f_{n-1}^T(\tau_{n-1}), & -f_n^T(\tau_{n-1}) \end{array} \right| \quad (12)$$

и блочную матрицу C_1 размерности $((n-1),(L+1)n)$:

$$C_1 = \left| \begin{array}{ccccc} f_1^{(1)^T}(\tau_1), & -f_2^{(1)^T}(\tau_1), & 0, & \dots & 0 \\ 0, & f_2^{(1)^T}(\tau_2), & -f_3^{(1)^T}(\tau_2), & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & f_{n-2}^{(1)^T}(\tau_{n-2}), & f_{n-1}^{(1)^T}(\tau_{n-2}), & 0 \\ 0, & \dots & 0, & f_{n-1}^{(1)^T}(\tau_{n-1}), & -f_n^{(1)^T}(\tau_{n-1}) \end{array} \right|. \quad (13)$$

С использованием матриц C_0, C_1 можно выразить условия-равенства в сплайновых узлах следующими матричными равенствами:

$$C_0\alpha = 0, \quad C_1\alpha = 0.$$

Запишем ограничения-равенства (6), которые управляют значениями нулевой и первой производных на концах интервала наблюдения в матрично-векторном виде. Введём соответствующую матрицу C_2 размерности $(4,\ (L+1)n)$, воспользовавшись определённым ранее управляющим вектором $g^T = (g_1, \dots, g_4)$:

$$C_2 = \left| \begin{array}{cccc} f_1^T(t_0), & 0, & \dots & 0 \\ f_1^{(1)^T}(t_0), & 0, & \dots & 0 \\ 0, & \dots & 0, & f_n^T(t_f) \\ 0, & \dots & 0, & f_n^{(1)^T}(t_f) \end{array} \right|. \quad (14)$$

На основе матрицы C_2 и вектора g указанные ограничения-равенства представляются соотношением

$$C_2\alpha - g = 0.$$

С использованием матрично-векторных обозначений функция Лагранжа $L(y,\alpha,\lambda)$ примет очевидный компактный вид

$$L(y,\alpha,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=N_{1k}}^{N_{2k}} y^2(t_i) + \alpha^T Q\alpha - 2P^T\alpha + \lambda_0^T C_0\alpha + \lambda_1^T C_1\alpha + \lambda_2^T(C_2\alpha - g).$$

Продифференцируем функцию Лагранжа по векторам α, λ_0, λ_1, λ_2, приравняем производные к нулю и получим необходимые условия экстремума в форме системы линейных уравнений размерности $(L+1)n+2(n-1)+4$, которые позволяют определить параметры аппроксимационной сплайновой функции и дополнительно найти множители Лагранжа:

$$\frac{\partial L(y,\alpha,\lambda)}{\partial\alpha} = 2Q\alpha - 2P + C_0^T\lambda_0 + C_1^T\lambda_1 + C_2^T\lambda_2 = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial L(y,\alpha,\lambda)}{\partial\lambda_0} = C_0\alpha = 0; \quad \frac{\partial L(y,\alpha,\lambda)}{\partial\lambda_1} = C_1\alpha = 0; \quad \frac{\partial L(y,\alpha,\lambda)}{\partial\lambda_2} = C_2\alpha - g = 0. \tag{16}$$

Основываясь на необходимых условиях в виде (15), (16), сформированных матрицах Q, C_0, C_1, C_2 и векторах P, g, составим блочные матрицу D и вектор b:

$$D = \begin{vmatrix} 2Q, & C_0^T, & C_1^T, & C_2^T \\ C_0, & 0, & 0, & 0 \\ C_1, & 0, & 0, & 0 \\ C_2, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} 2P \\ 0 \\ 0 \\ g \end{vmatrix}, \tag{17}$$

на основе которых найдём решение расширенной системы

$$Dz = b.$$

Первые $(L+1)n$ параметров вектора $z^T = (\alpha^T, \lambda_0^T, \lambda_1^T, \lambda_2^T)$ размерности $((L+1)n + 2(n-1)+4,\ 1)$, составленного в виде блочного, позволяют получить значения оптимальных параметров вектора α° и записать выражение для аппроксимационной сплайновой функции и отфильтрованной последовательности

$$x(t_i) = f(\alpha^\circ, t_i) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha^\circ_{0,k} f_{0,k}(t_i) + \alpha^\circ_{1,k} f_{1,k}(t_i) + \ldots + \alpha^\circ_{L,k} f_{L,k}(t_i)),\ i = 0, 1, \ldots, N_f - 1.$$

3. Цифровая фильтрация с использованием аппроксимационных сплайнов с регулированием на концах интервала наблюдения. Рассмотрим цифровую фильтрацию последовательностей экспериментальных данных аппроксимационными сплайновыми функциями частного вида, сформированными на основе дискретных полиномов второй степени, в целях использования их при решении примера в разд. 4. Введём для сплайновых функций регулирование положений и производных на концах интервала наблюдений.

По-прежнему будем полагать, что исходные данные для цифровой фильтрации задаются вектором наблюдений $y^T = (y(t_0), y(t_1), \ldots, y(t_{N_f-1}))$, последовательностью соответствующих моментов времени дискретизации $t_0, t_1, \ldots, t_{N_f-1}$ и сплайновыми узлами в виде последовательности $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$. На основе информации о моментах времени дискретизации и расположении сплайновых узлов формируется последовательность номеров граничных точек сплайновых интервалов N_{1k}, N_{2k}, $k = 1, \ldots, n$. Пусть заданы численные значения положений g_1, g_3 и наклонов g_2, g_4 на левом и правом концах интервала наблюдения; вектор $g^T = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ обеспечивает регулирование сплайновой функции.

Дискретные полиномы $f_{0,k}(t_i) = 1$, $f_{1,k}(t_i) = t_i$, $f_{2,k}(t_i) = t_i^2$, $f_k^T(t_i) = (f_{0,k}(t_i), f_{1,k}(t_i), f_{2,k}(t_i)) = (1, t_i, t_i^2)$ выступают в качестве базисных функций и задаются в дискретных точках t_i с номерами $N_{1k} \le i \le N_{2k}$, $k = 1, \ldots, n$. Вводятся векторы $\alpha_k^T = (\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}, \alpha_{2,k})$ размерности (3, 1). Модельная базисная функция в виде дискретного полинома второй степени для k-го сплайнового интервала представится скалярным произведением

$$f_k(\alpha_k, t_i) = f_k^T(t_i)\alpha_k = \alpha_{0,\,k} + \alpha_{1,\,k}t_i + \alpha_{2,\,k}(t_i)^2, \quad N_{1k} \le i \le N_{2k};$$
$$f_k(\alpha_k, t_i) = 0, \quad i < N_{1k},\ i > N_{2k}. \tag{18}$$

На основе наблюдений $y(t_0), y(t_1), \ldots, y(t_{N_f-1})$, моментов времени дискретизации $t_0, t_1, \ldots, t_{N_f-1}$, модельных базисных функций (18) и последовательности граничных точек $N_{11}, N_{21}, \ldots, N_{1n}, N_{2n}$ в соответствии с (10) формируются матрицы Q_k и векторы P_k, $k = 1, \ldots, n$. Матрицы Q_k в данном случае имеют размерность $((L+1), (L+1)) = (3,\,3)$ и их элементы $q_{rs,\,k}$, $r, s = 1,\,2,\,3$, можно вычислить по следующим соотношениям:

$$q_{11,\,k} = N_{2k} - N_{1k} + 1; \quad q_{12,\,k} = \sum_{i\,=\,N_{1k}}^{N_{2k}} t_i; \quad q_{13,\,k} = \sum_{i\,=\,N_{1k}}^{N_{2k}} (t_i)^2;$$

$$q_{23,\,k} = \sum_{i\,=\,N_{1k}}^{N_{2k}} (t_i)^3; \quad q_{33,\,k} = \sum_{i\,=\,N_{1k}}^{N_{2k}} (t_i)^4; \tag{19}$$

$$q_{21,\,k} = q_{12,\,k}; \quad q_{22,\,k} = q_{13,\,k}; \quad q_{31,\,k} = q_{13,\,k}; \quad q_{32,\,k} = q_{23,\,k}.$$

Векторы P_k имеют размерность $((L+1),\,1) = (3,\,1)$, и вычисление их элементов $p_{r,\,k}$, $r = 1,\,2,\,3$, может быть произведено по формулам

$$p_{1,\,k} = \sum_{i\,=\,N_{1k}}^{N_{2k}} y(t_i); \quad p_{2,\,k} = \sum_{i\,=\,N_{1k}}^{N_{2k}} (t_i)y(t_i); \quad p_{31,\,k} = \sum_{i\,=\,N_{1k}}^{N_{2k}} (t_i^2)y(t_i). \tag{20}$$

Из матриц Q_k, векторов P_k, $k = 1, \ldots, n$, и формул (19), (20) с использованием (11) формируются блочные матрица Q и вектор P.

Для дискретных полиномов второй степени матрицы C_0, C_1 в соответствии с исходными формулами (12), (13) будут иметь вид

$$C_0 = \left|- \begin{array}{ccccc} 1, \tau_1, \tau_1^2, & -1, -\tau_1, -\tau_1^2, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 1, \tau_2, \tau_2^2, & -1, -\tau_2, -\tau_2^2, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & 1, \tau_{n-2}, \tau_{n-2}^2, & -1, -\tau_{n-2}, -\tau_{n-2}^2, & 0 \\ 0, & \ldots & 0, & 1, \tau_{n-1}, \tau_{n-1}^2, & -1, -\tau_{n-1}, -\tau_{n-1}^2 \end{array}\right|, \tag{21}$$

$$C_1 = \left|\begin{array}{ccccc} 0,\,1,\,2\tau_1, & 0,\,-1,\,-2\tau_1, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 0,\,1,\,2\tau_2, & 0,\,-1,\,-2\tau_2, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & 0,\,1,\,2\tau_{n-2}, & 0,\,-1,\,-2\tau_{n-2}, & 0 \\ 0, & \ldots & 0, & 0,\,1,\,2\tau_{n-1}, & 0,\,-1,\,-2\tau_{n-1} \end{array}\right|. \tag{22}$$

Для дискретных полиномов второй степени матрица C_2 на основе (14) и с учётом того, что принято значение $t_0 = 0$, будет иметь вид

$$C_2 = \begin{vmatrix} 1,\,0,\,0, & 0, & \ldots & & 0 \\ 0,\,1,\,0, & 0, & \ldots & & 0 \\ 0, & \ldots & 0, & & 1,\,t_{N_f-1},\,t^2_{N_f-1} \\ 0, & \ldots & 0, & & 0,\,1,\,2t_{N_f-1} \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Соответствующая (17) блочная матрица D, включающая матрицы Q, C_0, C_1, C_2 ((19), (21)–(23)), и блочный вектор b, включающий векторы P, g (20), имеют размерности $((3n + 2(n-1) + 4),\ (3n + 2(n-1) + 4))$, $((3n + 2(n-1) + 4),\ 1)$ и заполняются матрицами и векторами из (19)–(23). Нахождение оптимального вектора z° осуществляется из линейной системы $Dz = b$. Коэффициенты вектора α° совпадают с первыми $3n$ коэффициентами вектора z°; на их основе можно записать выражение для аппроксимационной сплайновой функции и отфильтрованной последовательности

$$x(t_i) = f(\alpha^\circ, t_i) = \sum_{k=1}^{n} f_k^T(t_i)\alpha_k^\circ = \sum_{k=1}^{n} (\alpha^\circ_{0,\,k} + \alpha^\circ_{1,\,k}(t_i) + \alpha^\circ_{2,\,k}(t_i)^2). \tag{24}$$

4. Цифровая фильтрация данных аэродинамического эксперимента. Предложенный метод цифровой фильтрации, основанный на использовании аппроксимационных сплайновых функций, был апробирован на примере обработки данных аэродинамического эксперимента [11]. Рассмотрим описание эксперимента с учётом ряда введённых упрощений.

В аэродинамической трубе устанавливалась заданная постоянная скорость воздушного потока. Для эксперимента в непрерывном режиме угол атаки α_M модельной конструкции летательного аппарата (ЛА) изменялся со скоростью $\dot{\alpha}_M$ от минимального $\alpha_{M,\min}$ до максимального $\alpha_{M,\max}$ значения с помощью механизма управления углом атаки. Многоканальная система сбора производила запись дискретизованных сигналов от электромеханического датчика угла атаки $\alpha_M(i) = \alpha_M(Ti)$ модели ЛА и от сигналов тензометрических датчиков силовых $X(Ti)$, $Y(Ti)$, $Z(Ti)$ и моментных $M_x(Ti)$, $M_y(Ti)$, $M_z(Ti)$ нагрузок, действующих на модель ЛА (здесь T — шаг дискретизации, $i = 0, 1, 2, \ldots$).

Записанные дискретизованные сигналы подавались в систему алгоритмов первичной обработки первой группы, в которых формировался массив значений углов атаки $\alpha_M(i) = \alpha_M(Ti)$, $i = 0, 1, \ldots, N_f - 1$, и вычислялись массивы аэродинамических коэффициентов $c_{xa}(Ti)$, $c_{ya}(Ti)$, $c_{za}(Ti)$ и $m_{xa}(Ti)$, $m_{ya}(Ti)$, $m_{za}(Ti)$.

В системе алгоритмов первичной обработки второй группы на основе массивов углов атаки и аэродинамических коэффициентов вычислялись аэродинамические характеристики модели ЛА в виде зависимостей аэродинамических коэффициентов от дискретных значений угла атаки при заданной скорости потока в трубе:

$$c_{xa}(i) = F_1(\alpha_M(i)), \quad c_{ya}(i) = F_2(\alpha_M(i)), \quad c_{za}(i) = F_3(\alpha_M(i)),$$

$$m_{xa}(i) = F_4(\alpha_M(i)), \quad m_{ya}(i) = F_5(\alpha_M(i)), \quad m_{za}(i) = F_6(\alpha_M(i)).$$

Одновременно находились зависимости связей аэродинамических коэффициентов, например $c_{ya}(i) = P(c_{xa}(i))$ или $m_{za}(i) = P_1(c_{ya}(i))$ и т. д.

Информация от системы первичных алгоритмов подавалась в систему вторичных алгоритмов, работа которых обеспечивала повышение точности вычисленных аэродинамических характеристик.

Здесь представлены результаты работы одного из вторичных алгоритмов, реализующего цифровую фильтрацию зависимости коэффициентов подъёмной силы $c_{ya}(i)$ от коэффициентов сопротивления $c_{xa}(i)$, — экспериментальной поляры $c_{ya}(i) = P(c_{xa}(i))$, $i = 0, 1, \ldots, N_f - 1$. Сплошная кривая на рис. 1 представляет собой экспериментальную поляру для $\dot{\alpha}_M \approx 0{,}5$ град/с, $\alpha_{M,\min} = -1{,}59$ град, $\alpha_{M,\max} = 5{,}64$ град, $T = 0{,}05$ с, $N_f = 133$. Очевидно, что данная поляра дискретизована неравномерно и содержит ограниченное число точек наблюдений. Из анализа рис. 1 можно заключить, что в экспериментальной поляре присутствуют шумовые погрешности, причём дисперсию шумов погрешностей можно интерпретировать как нестационарную: на концах интервала $-0{,}17 \le c_{ya} \le 0{,}58$ дисперсия погрешностей больше, чем в средней его части.

Вторичный алгоритм обработки информации в данном случае должен осуществить фильтрацию нестационарных шумовых погрешностей и обеспечить малые фазовые искажения. Для реализации указанных требований были применены предложенные аппроксимационные сплайновые функции, использующие дискретные полиномы второй степени с подбором сплайновых узлов и с регулированием положений и производных функций на концах посредством задания коэффициентов вектора g.

Рассмотрена обратная поляра $c_{xa}(i) = P_0(c_{ya}(i))$ и сделаны переобозначения используемых привычных переменных $t_i = c_{ya}(i)$, $y(t_i) = c_{xa}(i)$. Экспертным путём на основе анализа графика рис. 1 для интервала $-0{,}17 \le c_{ya} \le 0{,}58$ произведено назначение сплайновых узлов c_{ya1}, c_{ya2}, $c_{ya3} = (-0{,}1,\ 0{,}3,\ 0{,}49)$ и коэффициентов вектора $g^T = (g_1, g_2, g_3, g_4) = (0{,}0165,\ -0{,}025,\ 0{,}043,\ 0{,}13)$, которые определили положение и производные на концах интервала для аппроксимационной сплайновой функции.

Экспериментальные данные $c_{ya}(i)$, $c_{xa}(i)$, назначенные сплайновые узлы, вектор g позволили сформировать матрицу Q с помощью формул (10), (19), (11), вектор P с использованием (10), (20), (11) и матрицы C_0, C_1, C_2 с применением формул (21)–(23).

После создания матриц Q и C_0, C_1, C_2 оказалось возможным составление блочной квадратной матрицы D по формулам (17); формирование векторов P и g позволило составить блочный вектор b на основе (17). Решив систему линейных уравнений $Dz = b$, из вектора z размерности $(3n + 2(n - 1) + 4,\ 1)$ получим вектор параметров модели $\tilde{\alpha}^T = (\tilde{\alpha}_1^T, \tilde{\alpha}_2^T, \ldots, \tilde{\alpha}_n^T)$ размерности $(3n,\ 1)$ и аппроксимационную сплайновую функцию

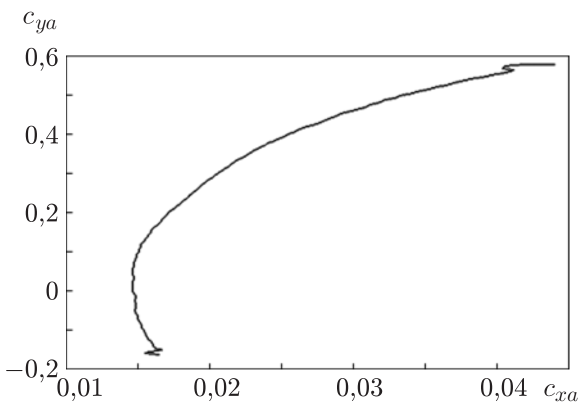

Рис. 1. Экспериментальная поляра

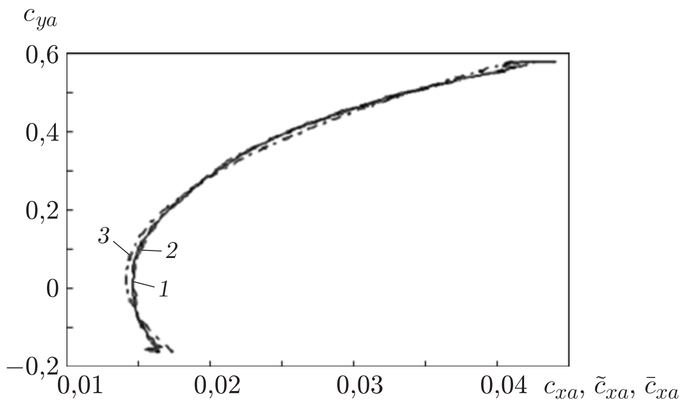

Рис. 2. Цифровая фильтрация для экспериментальной поляры

$\tilde{c}_{xa}(i)$ по (24):

$$\tilde{c}_{xa}(i) = \sum_{k=1}^{n} f_k^T(t_i)\tilde{\alpha}_k^{\circ}; \quad \tilde{c}_{xa}(i) = \tilde{P}_0(c_{ya}(i)), \quad i = 0, 1, \ldots, N_f - 1. \tag{25}$$

Результаты цифровой фильтрации отражены на рис. 2. Кривая *1* обозначает экспериментальную обратную поляру $c_{ya}(i) = P_0(c_{xa}(i))$, повторяющую рис. 1. Кривая *2* представляет собой результат сплайновой фильтрации (25), эта кривая почти точно совпадает с исходной полярой. Видно, что в результирующей аппроксимационной сплайновой функции устранены нестационарные шумовые погрешности на концах интервала и достигнуто практически нулевое фазовое искажение.

Рассмотрим цифровую фильтрацию экспериментальной обратной поляры с использованием её аппроксимации параболической моделью вида

$$\bar{c}_{xa}(i) = \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 c_{ya}(i) + \bar{\alpha}_2 (c_{ya}(i))^2 \tag{26}$$

по методу наименьших квадратов для $i = 0, 1, \ldots, N_f - 1$. Сравним погрешности аппроксимации с помощью параболических и сплайновых моделей. Опустим необходимые выкладки из [12] и приведём формулы для решения. Вектор параметров аппроксимационной параболической модели $\bar{\alpha}^T = (\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ находится из линейной системы $\bar{Q}\bar{\alpha} = \bar{P}$. При этом элементы матрицы $\bar{Q}$ размерности (3, 3) и вектора $\bar{P}$ размерности (3, 1) вычисляются следующим образом:

$$\bar{q}_{11} = N_f, \quad \bar{q}_{12} = \sum_{i=0}^{N_f-1} c_{ya}(i), \quad \bar{q}_{13} = \sum_{i=0}^{N_f-1} (c_{ya}(i))^2,$$

$$\bar{q}_{23} = \sum_{i=0}^{N_f-1} (c_{ya}(i))^3, \quad \bar{q}_{33} = \sum_{i=0}^{N_f-1} (c_{ya}(i))^4,$$

$$\bar{q}_{21} = \bar{q}_{12}, \quad \bar{q}_{22} = \bar{q}_{13}, \quad \bar{q}_{31} = \bar{q}_{13}, \quad \bar{q}_{32} = \bar{q}_{23},$$

$$\bar{p}_1 = \sum_{i=0}^{N_f-1} c_{xa}(i), \quad \bar{p}_2 = \sum_{i=0}^{N_f-1} (c_{ya}(i))c_{xa}(i), \quad \bar{p}_3 = \sum_{i=0}^{N_f-1} (c_{ya}(i))^2 c_{xa}(i).$$

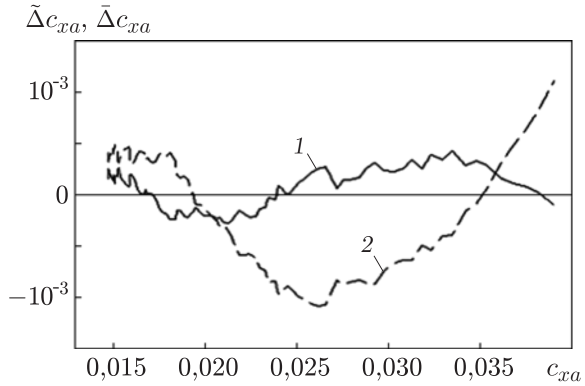

Рис. 3. Функции погрешностей цифровой фильтрации

На рис. 2 кривая *3* описывает график, соответствующий параболической модели (26).

Точность предлагаемой цифровой фильтрации была оценена с помощью сравнения вычисленных функций погрешностей, представимых формулами

$$\tilde{\Delta}c_{xa}(i) = c_{xa}(i) - \tilde{c}_{xa}(i); \quad \bar{\Delta}c_{xa}(i) = c_{xa}(i) - \bar{c}_{xa}(i), \tag{27}$$

и вычисленных значений среднеквадратичных погрешностей цифровой фильтрации по формулам

$$\begin{gathered} \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N_2 - N_1} \sum_{i=N_1}^{N_2} (c_{xa}(i) - \tilde{c}_{xa}(i))^2}; \\ \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N_2 - N_1} \sum_{i=N_1}^{N_2} (c_{xa}(i) - \bar{c}_{xa}(i))^2}, \end{gathered} \tag{28}$$

где введённые границы суммирования удовлетворяют неравенствам $0 \le N_1 < N_2 \le N_f - 1$. На рис. 3 показаны результаты вычисления погрешностей. Кривая *1* является функцией $\tilde{\Delta}c_{xa}(i) = \tilde{G}(c_{xa}(i))$, кривая *2* относится к функции $\bar{\Delta}c_{xa}(i) = \bar{G}(c_{xa}(i))$, $N_1 \le i \le N_2$, для выбранных границ $N_1 = 20$, $N_2 = 113$. Приведём оценки среднеквадратичных погрешностей, вычисленных в соответствии с графиками рис. 3: $\tilde{\sigma} = 1{,}78 \cdot 10^{-4}$, $\bar{\sigma} = 6{,}73 \cdot 10^{-4}$, позволяющие судить о величине погрешностей предлагаемой цифровой фильтрации на основе аппроксимационных сплайновых функций, которые оказываются примерно в 4 раза меньше погрешностей, возникающих при аппроксимации параболической моделью.

Заключение. Созданный в данной работе метод цифровой фильтрации последовательностей экспериментальных данных, основанный на аппроксимационных сплайновых функциях, подтвердил свою эффективность. Применение предлагаемых аппроксимационных сплайновых функций позволило осуществить цифровую фильтрацию данных с неравномерной дискретизацией и на ограниченном временном интервале. Благодаря возможности регулирования положений и наклонов аппроксимационных сплайновых функций на концах интервалов наблюдений оказалась возможной фильтрация шумовых погрешностей с нестационарной интенсивностью. Цифровая фильтрация на основе аппроксимационных сплайнов обеспечила почти нулевые фазовые искажения.

Метод цифровой фильтрации последовательностей экспериментальных данных, использующий аппроксимационные сплайновые функции, допускает дальнейшее его совершенствование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
2. **Де Бор К.** Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1985. 305 с.
3. **Pang D., Ferrari L. A., Sancar P. V.** B-spline FIR filters // Circuits, Systems, Signal Process. 1994. **13**, N 1. P. 31–64.
4. **Unser M., Aldroubi A., Eden M.** Polynomial spline signal approximation: Filter design and asymptotic equivalence with Shannon's sampling theorem // IEEE Trans. Inform. Theory. 1992. **38**, N 1. P. 95–103.
5. **Unser M., Aldroubi A., Eden M.** B-spline signal processing. I. Theory // IEEE Trans. Signal Process. 1993. **41**, N 2. P. 821–833.
6. **Ланге П. К.** Сплайн-аппроксимация дискретных значений сигналов с применением методов цифровой фильтрации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2003. **19**. С. 134–138.
7. **Идрисов Ф. Ф., Терпугов А. Ф.** Фильтрация случайных процессов сплайнами первого порядка // Изв. вузов. Сер. Физика. 2004. № 2. С. 22–25.
8. **Хуторцев В. В., Федоренко О. С.** Использование метода сплайн-функций при синтезе цифровых алгоритмов фильтрации с группированием наблюдений // Радиотехника. 2010. № 2. С. 4–15.
9. **Гетманов В. Г.** Восстановление нестационарных зависимостей с использованием аппроксимационных сплайнов // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1991. № 6. С. 46–53.
10. **Гетманов В. Г.** Цифровая обработка неравномерно дискретизованных сигналов на основе аппроксимационных сплайнов // Измер. техника. 2003. № 6. С. 24–28.
11. **Буров В. В., Волобуев В. С., Глазков С. А. и др.** Измерительно-вычислительный комплекс трансзвуковой аэродинамической трубы Т-128 ЦАГИ // Датчики и системы. 2010. № 5. С. 20–24.
12. **Себер Дж.** Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.

Поступила в редакцию 2 ноября 2010 г.