УДК 681.3.08 + 519.2

КОМПЬЮТЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА СЧИТЫВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

А. Л. Резник, В. М. Ефимов, А. А. Соловьев

Учреждение Российской академии наук
Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Приводится доказательство одного из аналитических соотношений, требующихся при вычислении вероятности безошибочного считывания случайных дискретных изображений, осуществляемого интеграторами с двумя пороговыми уровнями. Особенностью проведённых исследований является то, что доказываемое в данной работе соотношение первоначально было получено с помощью аналитических расчётов на ЭВМ.

Ключевые слова: случайное изображение, безошибочное считывание, пороговый уровень, аналитические выкладки на ЭВМ.

Введение. В работах [1–4] задача нахождения вероятности безошибочного k-порогового «телевизионного» считывания случайного двумерного пуассоновского дискретно-точечного изображения была редуцирована к следующей одномерной задаче.

Пусть n точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайно выбраны на интервале (0, 1), т. е. имеется n независимых испытаний случайной величины, равномерно распределённой на интервале (0, 1). Требуется найти вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ события, заключающегося в том, что внутри интервала (0, 1) не существует ни одного подынтервала Ω_ε длиной ε, содержащего более k точек.

Несмотря на кажущуюся простоту этой редуцированной задачи, её общее решение к настоящему времени известно лишь для случая $k = 1$. Далее будет приведено доказательство частной аналитической зависимости, характеризующей вероятность безошибочного считывания при наличии двух пороговых уровней ($k = 2$). Интересно отметить, что доказываемая в предлагаемой работе формула была «подсказана» компьютером, для чего авторам пришлось создать несколько программных систем, осуществляющих эквивалентные аналитические преобразования на ЭВМ.

Расчёт вероятностных формул с помощью программ машинной аналитики. Вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$, нахождение аналитического вида которой является в данной работе главной проблемой, можно представить в виде многомерного интеграла

$$P_{n,k}(\varepsilon) = n! \int_{D_{n,k}(\varepsilon)} \dots \int dx_1 \dots dx_n, \tag{1}$$

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00458), Президиума РАН (проект № 228/2009) и Президиума СО РАН (интеграционный проект № 71/2009).

где область интегрирования $D_{n,k}(\varepsilon) \subset R^n$ описывается системой линейных неравенств

$$\begin{cases} 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < 1, \\ x_{k+1} - x_1 > \varepsilon, \\ x_{k+2} - x_2 > \varepsilon, \\ \vdots \\ x_n - x_{n-k} > \varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

Например, для $k = 1$ вычисление многомерного интеграла (1) по области (2) сводится к нахождению повторного интеграла

$$P_{n,1}(\varepsilon) = n! \int\limits_{(n-1)\varepsilon}^{1} dx_n \left\{ \int\limits_{(n-2)\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} dx_{n-1} \cdots \left\{ \int\limits_{2\varepsilon}^{x_4-\varepsilon} dx_3 \left\{ \int\limits_{\varepsilon}^{x_3-\varepsilon} dx_2 \left\{ \int\limits_{0}^{x_2-\varepsilon} dx_1 \right\}\right\}\right\}\right\}. \tag{3}$$

Последовательно интегрируя по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим известную [5, 6] формулу

$$P_{n,1}(\varepsilon) = (1-(n-1)\varepsilon)^n, \quad 0 \le \varepsilon \le 1/(n-1). \tag{4}$$

К сожалению, при $k > 1$ интеграл (1) по области интегрирования (2) невозможно представить в виде единственного повторного интеграла, в результате чего решение задачи усложняется настолько, что к настоящему времени её точное аналитическое решение неизвестно даже для $k = 2$. Поэтому для нахождения частных решений при фиксированных и последовательно возрастающих значениях n предложен [1, 2] алгоритм эквивалентных преобразований, сводящий интеграл (1) к конечной сумме повторных интегралов с расставленными пределами интегрирования и указанием для каждого из них диапазона изменения параметра ε, внутри которого справедлива каждая из рассчитываемых формул. Для задачи с двухпороговым считыванием ($k = 2$) дополнительно разработана [3] специальная комбинаторно-рекурсивная модель, когда непрерывное считывание заменяется дискретной схемой бросания n неразличимых шаров по r урнам, а непрерывные формулы от параметра ε получаются предельным переходом при $r \to \infty$. Поскольку огромный объём аналитических выкладок, необходимых для нахождения частных решений, делает практически невозможным их проведение вручную, обе предложенные нами вычислительные схемы были абсолютно формализованы и запрограммированы. Применение созданных программ машинной аналитики позволило значительно продвинуться в вычислении вероятностей $P_{n,k}(\varepsilon)$ и установить новые ранее неизвестные зависимости. Так, для формул $P_{n,2}(\varepsilon)$, описывающих вероятность безошибочного считывания при двух пороговых уровнях ($k = 2$), в результате программного расчёта установлены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &P_{4,2}(\varepsilon) = 2(1-\varepsilon)^4, && 1/2 < \varepsilon < 1; \\ &P_{6,2}(\varepsilon) = 5(1-2\varepsilon)^6, && 1/3 < \varepsilon < 1/2; \\ &P_{8,2}(\varepsilon) = 14(1-3\varepsilon)^8, && 1/4 < \varepsilon < 1/3; \\ &P_{10,2}(\varepsilon) = 42(1-4\varepsilon)^{10}, && 1/5 < \varepsilon < 1/4; \\ &P_{12,2}(\varepsilon) = 132(1-5\varepsilon)^{12}, && 1/6 < \varepsilon < 1/5. \end{aligned} \tag{5}$$

Анализ этих «компьютерных» зависимостей позволил усмотреть общую закономерность и высказать гипотезу, заключающуюся в том, что при двух пороговых уровнях (т. е. при $k = 2$) для чётных n на интервале $1/(n/2) < \varepsilon < 1/((n/2) - 1)$ справедлива формула

$$P_{n,\,2}(\varepsilon) = (2/n)C_n^{(n/2)-1}(1 - ((n/2) - 1)\varepsilon)^n. \qquad (6)$$

Впервые это соотношение было опубликовано в работе [3], но его строгого доказательства до настоящего времени не существовало. Цель данной работы как раз заключается в строгом обосновании представленной формулы.

Доказательство «компьютерной» формулы. Сформулируем задачу, строгое решение которой будет приведено далее.

Имеется интервал (0, 1), на который случайно брошены $n = 2m$ точек. Требуется найти вероятность P события, заключающегося в том, что внутри интервала (0, 1) не существует ни одного подынтервала Ω_ε длиной ε ($1/m < \varepsilon < 1/(m-1)$), содержащего более двух точек.

Нетрудно убедиться, что при сформулированных условиях любое допустимое размещение случайных точек должно подчиняться схеме, изображённой на рисунке. В частности, все «заштрихованные» подынтервалы Δ_i, имеющие фиксированную длину $\Delta = 1 - (m-1)\varepsilon$, должны содержать по две точки, а в «зазоры» между этими подынтервалами не имеет право попасть ни одна случайная точка, так как это с неизбежностью приведёт к невозможности такого размещения $2m$ точек на интервале (0, 1), чтобы все чётные и все нечётные точки были удалены друг от друга на расстояние, большее ε. (Отметим, что длина $\Delta = 1 - (m-1)\varepsilon$ каждого из заштрихованных подынтервалов находится в диапазоне $0 < \Delta < \varepsilon$, это обеспечивается ограничением $1/m < \varepsilon < 1/(m-1)$, содержащимся в формулировке задачи.) Нахождение вероятности P_0, соответствующей размещению случайных точек на рисунке, разобьём на два этапа. На первом этапе определим вероятность P_1 того, что все $n = 2m$ точек при случайном бросании их на интервал (0, 1) попадут в заштрихованную зону, объединяющую все подынтервалы Δ_i, $i = \overline{1,\, m}$, но при этом не будем требовать, чтобы в каждый из подынтервалов Δ_i попало точно по две точки, как это изображено на рисунке, а затем умножим её на условную вероятность P_2 попадания в каждую из m заштрихованных зон (урн) точно двух точек (шаров) при условии, что совокупно во все m зон (урн) бросалось $2m$ точек (шаров). Очевидно, что вероятность попадания всех точек в заштрихованную зону

$$P_1 = (m\Delta)^{2m} = (m(1 - (m-1)\varepsilon))^{2m}.$$

Поскольку вероятность P_2 того, что при случайном бросании $2m$ неразличимых шаров по

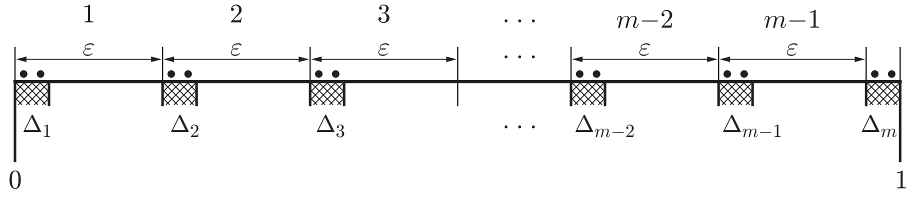

Схема размещения чётного ($n = 2m$) числа случайных точек на интервале (0, 1), обеспечивающая возможность их безошибочного «одномерного» считывания интегратором, имеющим апертуру ε и два пороговых уровня

m урнам в каждой из урн окажется по два шара, есть

$$P_2 = \frac{(2m)!}{m^{2m}2^m}$$

(этот результат легко получить, если воспользоваться равенством $P_2 = Q_m(2m) \times \times Q_{m-1}(2m-2)Q_{m-2}(2m-4)\dots Q_1(2)$, где $Q_t(2t) = C_{2t}^2(1/t)^2(1-1/t)^{2t-2}$ — вероятность попадания точно двух шаров в фиксированную урну при бросании $2t$ шаров по t урнам), то, умножая её на вероятность $P_1 = (m(1-(m-1)\varepsilon)^{2m}$, получим соотношение для P_0:

$$P_0 = P_1 P_2 = \frac{(2m)!}{2^m}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m}. \tag{7}$$

Теперь следует заметить, что учитываемые формулой (7) условия размещения случайных точек по m подобластям Δ_i являются необходимыми, но не достаточными для выполнения системы неравенств (2). Для вычисления искомой вероятности P требуется дополнительно учесть, что в рассматриваемом случае двухпорогового считывания ($k = 2$) все ближайшие члены с чётными и нечётными номерами в ранжированной последовательности $x_1 < < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ должны быть удалены друг от друга на расстояние, большее ε (следствие группы неравенств $x_{k+i} - x_i > \varepsilon$ в системе (2)). Если представить координаты пары случайных точек, попавших в подынтервал Δ_i, в виде

$$\begin{cases} x_{2i-1} = (i-1)\varepsilon + \delta_{2i-1}, \\ x_{2i} = (i-1)\varepsilon + \delta_{2i}, \end{cases} \tag{8}$$

то для выполнения ограничений, накладываемых системой неравенств (2), необходимо и достаточно, чтобы соблюдались неравенства

$$\begin{cases} \delta_{2i-1} < \delta_{2j-1}, & \forall (i < j), \\ \delta_{2i} < \delta_{2j}, & \forall (i < j), \\ \delta_{2i-1} < \delta_{2i}, & \forall i. \end{cases} \tag{9}$$

Если принять во внимание, что все случайные величины δ_s, $s = \overline{1, 2m}$, независимы и равномерно распределены на интервале $(0, \Delta)$, то для расчёта искомой вероятности P следует представленную соотношением (7) вероятность P_0 умножить на отношение N_m/A_m, где A_m — общее число таких перестановок из $2m$ индексных переменных δ_s, $s = \overline{1, 2m}$, для которых любой нечётный элемент δ_{2i-1} всегда встречается раньше соответствующего ему чётного элемента δ_{2i}; N_m — общее количество перестановок, входящих в число A_m, для которых элементы с нечётными индексами встречаются в порядке возрастания нечётных индексов, а элементы с чётными номерами встречаются в порядке возрастания чётных индексов. Очевидно, что $A_m = (2m)!/2^m$ (из общего числа $(2m)!$ всех возможных перестановок нужно выбрать лишь те, в которых элементы каждой из m пар $(\delta_1, \delta_2), (\delta_3, \delta_4), \ldots, (\delta_{2m-1}, \delta_{2m})$ «упорядочены» между собой по возрастанию индексов), поэтому для отыскиваемой нами вероятности P с учётом (7) имеем соотношение

$$P = P_0 \frac{N_m}{A_m} = \frac{(2m)!}{2^m}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m} \frac{N_m}{(2m)!/2^m} = N_m(1-(m-1)\varepsilon)^{2m}. \tag{10}$$

В отличие от A_m найти соотношение для N_m значительно сложнее. Эта задача эквивалентна отысканию количества различных «правильных» LR-слов (Left—Right-слов), имеющих длину $2m$ (LR-словом длиной $2m$ будем называть любое слово, составленное из m символов L и m симолов R, а правильным LR-словом будем называть то, которое обладает таким свойством, что в любом префиксе слова (т. е. в любом его начальном сегменте) количество символов R не превышает количества символов L). Обозначая последовательно встречающиеся (при просмотре LR-слова слева направо) символы L любого LR-слова нечётными индексными переменными $\delta_1, \delta_3, \ldots, \delta_{2m-1}$, а последовательно встречающиеся символы R — чётными индексными переменными $\delta_2, \delta_4, \ldots, \delta_{2m}$, легко устанавливаем полную идентичность этих двух задач (поскольку любому совместному размещению m чётных и m нечётных индексных переменных тоже соответствует одно и только одно $2m$-символьное LR-слово).

Докажем, что искомое количество N_m правильных LR-слов равно $(1/m)C_{2m}^{m-1}$ (именно здесь мы используем программную «подсказку» (6)). Доказательство будем вести по индукции. Для этого предположим, что формула

$$N_m = \frac{1}{m}\, C_{2m}^{m-1} = \frac{1}{m+1}\, C_{2m}^{m} \tag{6a}$$

верна для значений $m \le M$, далее докажем её для $m = M+1$ (справедливость формулы для $m = 1$ очевидна). Схема доказательства такова: сначала подсчитаем N^*_{M+1} — количество «неправильных» LR-слов, т. е. тех слов, у которых имеется хотя бы один префикс с количеством символов R, превышающим количество символов L, а затем легко найдём N_{M+1}, используя простое соображение, что совокупное число различных правильных и неправильных LR-слов, имеющих длину $2(M+1)$, равно C_{2M+2}^{M+1}. Все неправильные слова разобьём на непересекающиеся классы, каждый из которых будет характеризоваться максимальной длиной правильного префикса. Сразу заметим, что для любого LR-слова эта величина всегда чётная. Каждое неправильное LR-слово, у которого максимальная длина правильного префикса составляет $2l$, характеризуется тем, что сам максимальный префикс является правильным LR-словом длиной $2l$, затем обязательно следует символ R (делающий это слово неправильным), а далее — «оставшиеся символы» в произвольном порядке. Исходя из предположения индукции количество правильных префиксов, имеющих длину $2l$, равно $(1/(l+1))C_{2l}^{l}$. Так как мы рассматриваем слова, состоящие из $M+1$ символов L и $M+1$ символов R, оставшиеся символы, о которых говорилось выше, есть не что иное, как $M-l+1$ символов L и $M-l$ символов R, способных образовать $C_{2M-2l+1}^{M-l}$ различных последовательностей. Суммируя по всем возможным значениям l, получаем формулу для количества неправильных LR-слов, имеющих длину $2(M+1)$:

$$N^*_{M+1} = \sum_{l=0}^{M} \Big\{ \frac{1}{l+1}\, C_{2l}^{l} C_{2M-2l+1}^{M-l} \Big\}. \tag{11}$$

Используя очевидное равенство $C_{2M-2l+1}^{M-l} = \dfrac{1}{2}\, C_{2(M+1)-2l}^{M+1-l}$ и вводя под знак суммы в (11) дополнительный член, соответствующий индексу $l = M+1$, после несложных преобразований будем иметь

$$N^*_{M+1} = \frac{1}{2}\Big[\sum_{l=0}^{M+1} \Big\{ \frac{1}{l+1}\, C_{2l}^{l} C_{2(M+1)-2l}^{M+1-l} \Big\} - \frac{1}{M+2}\, C_{2M+2}^{M+1} \Big]. \tag{12}$$

Замечая, что в разности, стоящей в квадратных скобках, уменьшаемое (т. е. сумма по индексу l) есть $\frac{1}{2}\,C_{2M+4}^{M+2}$ [7, с. 623, формула (14)], после очевидных упрощений получим формулу для общего количества неправильных LR-слов, имеющих длину $2(M+1)$:

$$N_{M+1}^{*} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\,C_{2M+4}^{M+2} - \frac{1}{M+2}\,C_{2M+2}^{M+1}\Big] = C_{2M+2}^{M}.$$

Соответственно число правильных LR-слов длиной $2(M+1)$ есть

$$N_{M+1} = C_{2M+2}^{M+1} - N_{M+1}^{*} = C_{2M+2}^{M+1} - C_{2M+2}^{M} = \frac{1}{M+2}\,C_{2M+2}^{M+1}. \tag{13}$$

Тем самым предположение индукции доказано для $m = M+1$, что и завершает доказательство. Подставляя теперь равенство (6а) в (10) и заменяя $2m$ величиной n, окончательно получаем требуемую формулу для вероятности P события, заключающегося в том, что внутри интервала (0, 1) не существует ни одного подынтервала Ω_ε длиной ε $(1/m < \varepsilon < 1/(m-1))$, содержащего более двух точек:

$$P = N_m \times (1-(m-1)\varepsilon)^{2m} = \frac{1}{m+1}\,C_{2m}^{m}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m} =$$

$$= \frac{1}{m}\,C_{2m}^{m-1}(1-(m-1)\varepsilon)^{2m} = (2/n)C_n^{(n/2)-1}(1-((n/2)-1)\varepsilon)^{n}. \tag{14}$$

Заключение. Проведённые в данной работе исследования показали, что оценивание надёжности считывания случайных дискретных изображений, проводимого интеграторами, обладающими несколькими пороговыми уровнями, является весьма сложной задачей. В отличие от вероятности безошибочного однопорогового считывания, вычисление которой базируется на простой и компактной формуле (4), получение даже частных решений для считывания, проводимого с несколькими пороговыми уровнями, представляет собой сложно формализуемый и весьма трудоёмкий в вычислительном плане процесс. Вообще говоря, в предлагаемой работе удалось реализовать идею, высказанную в своё время Дж. фон Нейманом: исследователь сталкивается с задачей, которую не в состоянии решить, привлекает ЭВМ для проведения трудоёмких расчётов, способных натолкнуть его на «правильный» ответ, и в случае удачи (т. е. зная подсказанное компьютером решение) проводит строгое и конструктивное доказательство. В нашем случае формула (6) «подсказана» компьютером, а её строгое доказательство мы представляем впервые. Интересно также отметить, что коэффициенты, входящие в полученную формулу (6), являются числами Каталана, которые впервые встречаются в работах Л. Эйлера и возникают при решении огромного числа вероятностно-комбинаторных и прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в n-мерном пространстве // Автометрия. 1976. № 1. С. 116–119.
2. **Резник А. Л.** Моделирование на ЭВМ непрерывного считывания изображений дискретной структуры // Автометрия. 1981. № 6. С. 3–6.

3. **Reznik A. L.** Analytical solution of probabilistic problems resulting from random partitioning of an interval with the use of computer // Pattern Recogn. Image Analysis. 1996. **6**, N 4. P. 657–661.
4. **Reznik A. L., Efimov V. M.** Analytical computer calculations in image analysis: correct reading of random discrete-point fields // Proc. of the IASTED Intern. Conf. on Signal Processing, Pattern Recognition, and Applications, June 30–July 2, 2003. Rhodes, Greece. P. 6–10.
5. **Уилкс С.** Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.
6. **Parzen E.** Modern probabillity theory and its applications. New York — London: John Wiley and Sons, Inc., 1960. 464 p.
7. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

Поступила в редакцию 13 октября 2010 г.